

UMA PROPOSTA DE DECOMPOSIÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PARA DMPC

R. R. ROCHA¹ e L. C. OLIVEIRA-LOPES¹

¹ Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Química
E-mail para contato: rosi.rocha28@gmail.com; lcol@ufu.br

RESUMO – Neste trabalho, uma nova partição para sistemas lineares com base nas matrizes da representação em espaço de estados foi desenvolvida para aplicação em Controle Preditivo Distribuído baseado em Modelo (DMPC). Na decomposição proposta, cada novo subsistema tem um subconjunto de entradas e estados que afetam as saídas controladas e deve satisfazer a condição de controlabilidade. As interações extraídas dos submodelos são tratadas como perturbações no sistema de controle preditivo. A proposta de partição foi aplicada a um sistema industrial de moagem de minério e o controle preditivo distribuído foi avaliado. Os resultados obtidos mostram que a proposta de partição incorporada ao DMPC apresenta resultados promissores.

1. INTRODUÇÃO

Existem três tipos de estratégias de controle: o centralizado, o descentralizado e o distribuído. A maioria das grandes plantas químicas emprega o controle descentralizado como estratégia (Scattolini, 2009), mas ela não funciona adequadamente para processos com fortes interações. A opção de controle centralizado, embora capaz de tratar de forma ótima as interações, possui custos estruturais e organizacionais elevados. O controle distribuído, de outra forma, preserva a topologia e flexibilidade do controle descentralizado ao tempo que oferece desempenho próximo ao obtido pelo controle centralizado, uma vez que as interações são modeladas e informações são compartilhadas entre os subsistemas.

O MPC (Controle Preditivo baseado em Modelo) é um método geral especialmente adequado para problemas de controle multivariável com restrições e com interações significativas. A utilização da abordagem MPC distribuído (DMPC) requer que o modelo da planta seja particionado. Geralmente o modelo é decomposto de acordo com a estrutura física da instalação, com base em uma análise matemática, ou através da combinação de ambas metodologias. Quando um sistema é muito complexo, por apresentar muitos estados, entradas e saídas, o processo de decomposição baseado na intuição, percepção da estrutura física e/ou experiência, pode ser difícil ou até mesmo inviável. Neste contexto, o desenvolvimento de métodos sistemáticos de decomposição de modelos, e que extraiam informações a partir das equações de estado do modelo da planta são de grande aplicabilidade.

Uma das propostas de particionamento disponíveis é aquela introduzida por Zhang e Wang (2012), que é feita analisando-se a distribuição das entradas que serão manipuladas. Esta metodologia não é vantajosa para os casos em que a matriz **B** apresenta colunas em que todos os elementos são não nulos. Nesses casos, o subsistema gerado possui todos os estados do modelo original. Assim, essa abordagem não atende satisfatoriamente as demandas de

controle com elevado grau de interação entre os subsistemas. Dessa forma, um procedimento de particionamento de modelos, concebido de forma a incorporar efeitos diretos e indiretos de cada variáveis manipulada nas saídas controladas parece ser ainda necessário.

O objetivo desse trabalho é desenvolver uma metodologia, baseada na teoria de grafos, para o particionamento de modelos lineares e invariantes no tempo para utilização em controladores preditivos distribuídos que tratam as diferenças planta-submodelos como perturbações ao sistema.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere que o modelo da planta seja descrito em representação de espaço de estados no tempo discreto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

em que $\mathbf{x}(k) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos estados do processo; $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ refere-se ao vetor de entradas do sistema ou variáveis manipuladas; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são as matrizes dos estados e entradas, respectivamente. Supõe-se que o conjunto (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável.

Neste trabalho, a decomposição do modelo da planta é realizada com base no grafo orientado dos efeitos nas variáveis controladas a partir do espaço das entradas. Primeiramente, verifica-se quais saídas cada entrada afeta, posteriormente, o efeito estado-saída é avaliado. Existem dois níveis de efeitos, o efeito direto e o efeito indireto. É preciso considerar primeiro os diretos mais dominantes, e se eles não são explícitos no modelo, em seguida, a seleção é baseada no efeito indireto de todas entradas sobre as saídas controladas especificadas.

Definição 1: Defina-se um conjunto $\varphi_i = \{\alpha | \mathbf{B}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$, no qual $\mathbf{B}_{\alpha i}$ é o elemento da α -ésima linha e i -ésima coluna da matriz \mathbf{B} . O conjunto $\vartheta_i = \{x_{\alpha i}, \alpha \in \varphi_i\}$ representa os estados diretamente controlados pela entrada u_i .

Definição 2: Defina-se um conjunto $\xi_i = \{\alpha | \mathbf{A}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$, no qual $\mathbf{A}_{\alpha i}$ é o elemento da α -ésima linha e i -ésima coluna da matriz \mathbf{A} . O conjunto $\rho_i = \{x_{\alpha i}, \alpha \in \xi_i\}$ representa os estados diretamente controlados pela entrada x_i .

Definição 3: Defina-se um conjunto π_i com os estados que deverão ser incluídos no submodelo Mx_i . Cada submodelo $M\pi_i$ será definido baseado no mapeamento dos estados pertencentes aos conjuntos ϑ_i e ρ_i que afetam o espaço das saídas com base na matriz \mathbf{C} .

A proposta de partição de sistemas proposta baseia-se nas Definições (1-3). As etapas de construção dos subsistemas gerados pela decomposição proposta são:

Etapa 1: criar o conjunto φ_i (e o conjunto ϑ_i) e o conjunto ξ_i (e o conjunto ρ_i), baseando-se na matriz estrutural dos estados \mathbf{P} ;

Etapa 2: criar o conjunto π_i com os estados pertencentes aos conjuntos ϑ_i e ρ_i que afetam diretamente os estados que afetam o espaço das saídas;

Etapa 3: incluir no conjunto $M\pi_i$, os elementos pertencentes ao conjunto π_i ;

Etapa 4: agrupar os submodelos $M\pi_i$ e $M\pi_j$ (para $i \neq j$) se π_i e π_j forem conjuntos idênticos. Criar o novo conjunto de estados pela junção das u_i e u_j ;

Etapa 5: verificar se o submodelo $M\pi_i$ é controlável, caso contrário elementos adicionais de π_i deveram ser incluídos até que esta restrição seja satisfeita.

A forma compacta de cada submodelo pode ser escrita como $\mathbf{x}_i \in \pi_i$, e então o modelo completo da planta pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (2)$$

em que, $i = 1, \dots, M$; $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ são os vetores de estados e entradas do subsistema $M\pi_i$ no instante k , respectivamente; $\mathbf{x}_i(k)$, $\mathbf{u}_i(k)$ são os vetores de estados e entradas do subsistema $M\pi_j$, respectivamente.

2.1. Projeto do MPC distribuído com partição proposta

O modelo do subsistema i pode ser então escrito da seguinte forma (Rocha, 2014):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k+1) &= \mathbf{A}_{ii}\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \mathbf{B}_{d,i}\mathbf{d}_i(k) \\ \hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k) &= \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (3)$$

O controlador trata as interações entre os subsistemas como perturbações. Portanto, tem-se:

$$\mathbf{B}_{d,i}\mathbf{d}_i(k) = \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{A}_{ij}\hat{\mathbf{x}}_j(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (4)$$

em que $\mathbf{B}_{d,i}$ é a matriz das perturbações do subsistema i . Para cada subsistema, supõe-se que modelo nominal das Equações 3 e 4 podem ser descritos como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i(k+1) &= \mathbf{A}_{ii}\hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) \\ \hat{\mathbf{y}}_i(k) &= \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5)$$

As saídas controladas são obtidas a partir do modelo nominal, como segue:

$$\hat{\mathbf{Y}}_i(k|k) = \mathbf{\Psi}_i\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) + \mathbf{\Theta}_i\Delta\mathbf{U}_i(k|k) + \mathbf{Y}_i\mathbf{u}_i(k-1|k) + \mathbf{\Xi}_i(\mathbf{y}_{p,i}(k) - \hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k)) \quad (6)$$

em que,

$$\Theta_i = \Omega_i \begin{bmatrix} B_{ii} & \dots & 0 \\ A_{ii}B_{ii} + B_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ii}^{H_{pi}-1}B_{ii} + \dots + B_{ii} & \dots & A_{ii}^{H_{pi}-H_{ci}}B_{ii} + \dots + B_{ii} \end{bmatrix}, \Omega_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_i \end{bmatrix}$$

$$\Psi_i = \Omega_i \begin{bmatrix} A_{ii} \\ A_{ii}^2 \\ \vdots \\ A_{ii}^{H_{pi}} \end{bmatrix}, \Upsilon_i = \Omega_i \begin{bmatrix} B_{ii} \\ A_{ii}B_{ii} + B_{ii} \\ \vdots \\ A_{ii}^{H_{pi}-1}B_{ii} + \dots + B_{ii} \end{bmatrix}, \Xi_i = \Omega_i \begin{bmatrix} B_d C_i \\ A_{ii}B_d C_i + B_d C_i \\ \vdots \\ A_{ii}^{H_{pi}-1}B_d C_i + \dots + B_d C_i \end{bmatrix}, \quad (7)$$

A função objetivo que se deve minimizar em cada controlador é dado por (MACIEJOWSKI, 2002):

$$V_i(k) = \sum_{j=H_{wi}}^{H_{pi}} \|\hat{y}_i(k+j|k) - r_i(k+j)\|_{Q_i(j)}^2 + \sum_{j=H_{wi}}^{H_{pi}} \|\Delta \hat{u}_i(k+j|k)\|_{R_i(j)}^2 \quad (8)$$

em que $Q_i > 0$ e $R_i \geq 0$ são matrizes de ponderação das saídas e das entradas do subsistema i , respectivamente. O objetivo é projetar um algoritmo MPC distribuído para o cálculo de uma sequência de ações de controle com base nos estados e entradas do sistema. As ações de controle obtidas devem garantir a convergência assintótica da malha fechada e minimização da função objetivo local.

As ações de controle são obtidas resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{u_i(k+l|k), l=0, \dots, H_u-1} V_i(k) \\ \text{Sujeito a: } & \hat{Y}_i(k|k) = \Psi_i \hat{x}_i(k|k) + \Theta_i \Delta U_i(k|k) + \Upsilon_i u_i(k-1|k) + \Xi_i (y_{p,i}(k) \\ & \quad - \hat{y}_{a,i}(k)) \\ & \hat{x}_i(k|k) = x_i(k) \\ & x_i(0) = x_{i0} \end{aligned} \quad (9)$$

O problema descrito pela Equação (9) é um problema de programação quadrática. De acordo com a teoria do horizonte móvel, apenas a primeira ação de controle é de fato aplicada à planta. Assim, se n é o número de entradas manipuladas, dever-se utilizar apenas as n primeiras linhas do vetor $\Delta U_i(k)_{opt}$, o que pode ser representado da seguinte forma:

$$\Delta u_i(k)_{opt} = [I_n \quad \mathbf{0}_n \quad \dots \quad \mathbf{0}_n] \Delta U_i(k)_{opt} \quad (10)$$

em que I_n é uma matriz identidade $n \times n$, e $\mathbf{0}_n$ é uma matriz de zeros $n \times n$.

3. ESTUDO DE CASO: SISTEMA DE MOAGEM DE MINÉRIO INDUSTRIAL

3.1. Descrição do Processo

O sistema apresentado na Figura 1 é um típico fluxograma de um sistema de moagem industrial e é apresentado em Ylinen et al. (1987). As saídas controladas são: tamanho dos grãos da corrente de *overflow* do hidrociclone, definida como y_1 e densidade da alimentação

do hidrociclone, chamada de y_2 . Estas saídas são controladas manipulando-se a alimentação de minério (u_1) e a alimentação de água secundária (u_2).

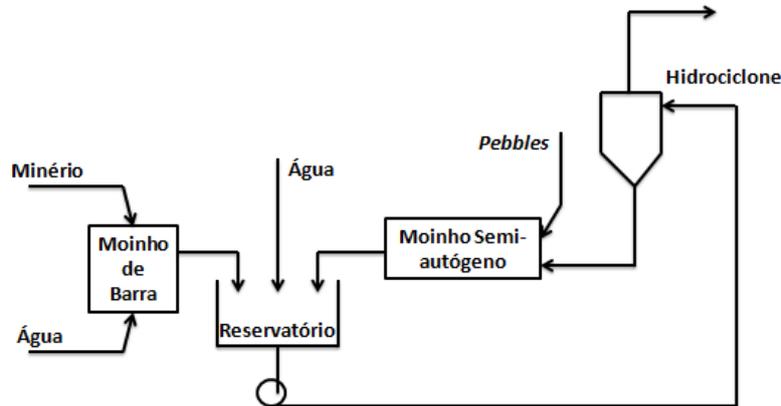


Figura 1 - Fluxograma de um sistema típico de moagem industrial.

O modelo de predição da planta em espaço de estados é:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (11)$$

em que,

$$A = \begin{bmatrix} 0,716 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,283 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,863 & 1,049 & 0 & 0 & 0 & 0,755 & 0 & 0 \\ 0 & -0,109 & 0,186 & 0 & 0 & 0 & -0,529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,670 & 0 & 0,176 & 0,865 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,135 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,181 & 0 \\ 0 & 0,181 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

3.2. Resultados e discussões

O modelo descrito pela Equação 12 foi particionado em dois subsistemas distintos utilizando a metodologia proposta neste artigo. Os subsistemas gerados podem ser descritos pelas Equações 13 e 14.

Modelo do subsistema 1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,716 & 0 & 0 & -0,283 & 0 \\ 0 & 0,863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,670 & 0,176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_1(k)$$

$$[y_1(k)] = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Modelo do subsistema 2:

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_9(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 & 1,049 & 0 & 0 & 0,755 & 0 \\ -0,109 & 0,186 & 0 & 0 & -0,529 & 0 \\ 0 & 0 & 0,670 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,165 & 0,865 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_9(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_2(k)$$

$$[y_2(k)] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_9(k) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Neste estudo estabeleceu-se que o sistema de controle deverá sempre obedecer a restrição de velocidade nas variáveis manipuladas, $|\Delta u_{max} = 1|$ e que o sistema está inicialmente em $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. As simulações utilizaram $H_p = 10$, $H_u = 5$ e as matrizes de ponderação Q e R otimizadas por Evolução Diferencial. As matrizes obtidas para controle centralizado foram: $Q = \text{diag}(9,30; 10)$ e $R = \text{diag}(1; 1)$. As matrizes Q_1 e R_1 (referentes ao subsistema 1) e as matrizes Q_2 e R_2 (referentes ao subsistema 2) para os controladores do DMPC são: $Q_1 = 10$, $R_1 = 1$, $Q_2 = 2,6$ e $R_2 = 6,0$.

O objetivo do controle para a variável y_1 é mantê-la em seu valor inicial até o instante $k = 10$, a partir deste ponto levá-la e mantê-la em 1 até o instante $k = 110$ e depois retorná-la para a condição inicial até $k = 160$, quando a simulação termina. Para a variável controlada y_2 , o objetivo é mantê-la em seu valor inicial até o instante $k = 60$, a partir deste ponto levá-la e mantê-la em 1 até o instante $k = 110$ e depois retorná-la para a condição inicial até $k = 160$, quando a simulação termina.

As Figuras 2 e 3 apresentam as dinâmicas das saídas controladas (y_1 e y_2) e as ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas (u_1 e u_2), respectivamente.

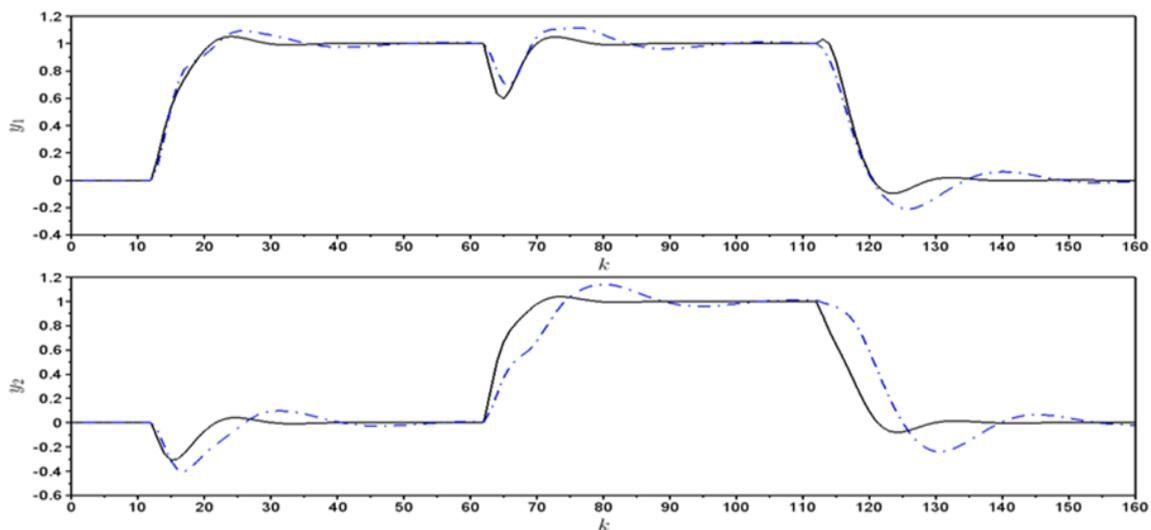


Figura 2 – Dinâmicas das saídas controladas (y_1 e y_2) obtidas pelo controle centralizado (linha preta contínua) e DMPC com a partição proposta (linha azul descontínua).

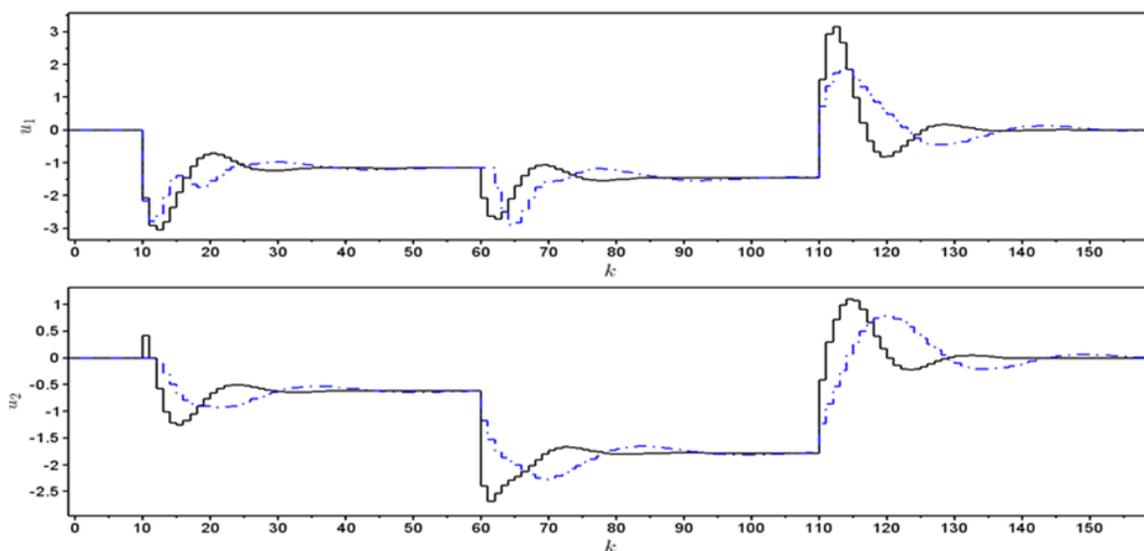


Figura 3 – Ações de controle implementadas pelas variáveis manipuladas (u_1 e u_2) obtidas pelo controle centralizado (linha preta contínua) e DMPC com a partição proposta (linha azul descontínua).

Analisando-se os resultados, nota-se que as respostas obtidas pelo controlador DMPC se aproximam das obtidas pelo controle centralizado, que é a referência de desempenho. Isto ocorre principalmente para a saída controlada y_1 . Quando se avalia as ações de controle implementadas, nota-se que a abordagem DMPC proporciona as menores variações sucessivas nas variáveis manipuladas. Isto é interessante, pois diminui o desgaste dos atuadores.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs uma estrutura de controle preditivo distribuído utilizando um procedimento simples e promissor de decomposição de modelos de processos lineares e invariantes no tempo. O método de decomposição é uma variação da proposta de Zhang e Wang (2012) e pode ser aplicado em sistemas lineares que apresentam pelo menos uma coluna da matriz \mathbf{B} cheia, ou seja, com todos os seus valores diferentes de zero, diferentemente da técnica de Zhang e Wang (2012). Se as condições de estabilidade forem garantidas para cada subsistema gerado, o controle de toda planta poderá ser implementado.

A partir das análises dos resultados obtidos, nota-se que a proposta de decomposição de sistemas lineares para DMPC proporciona respostas próximas às obtidas pelo controle centralizado e com menores variações sucessivas das variáveis manipuladas, o que comprova a eficiência deste sistema de controle.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UFU pelo apoio e à CAPES e à FAPEMIG (Processo PCE-00089-14) pelo apoio concedido.

REFERÊNCIAS

MACIEJOWSKI, J. *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, 2002.

ROCHA, R. R. Controle preditivo distribuído de processos lineares. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

SCATTOLINI, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control – a Review. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 5, p. 723-731, 2009.

YLIEN, R.; NIEMI, A. J.; IIVARINEN, T. A linear-quadratic-Gaussian control algorithm for sulphide ore grinding. *Automatica*, v. 23, n. 3, p. 287-294, 1987.

ZHANG, L.; WANG, J. Distributed model predictive control with a novel partition method. In: *31st Chinese Control Conference*. July 25-27, Hefei, China, 2012.