

## **DIFUSÃO DE UMIDADE EM GRÃOS DE SOJA COMO UM PROBLEMA DO TIPO STEFAN: MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL**

D. J. NICOLIN<sup>1\*</sup>, R. M. M. JORGE<sup>1</sup>, L. M. M. JORGE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Engenharia Química  
\*e-mail: douglas.nicolin@gmail.com

### **RESUMO**

O processo de transporte de calor ou massa num meio pode ocasionar o aumento ou diminuição em seu tamanho. Para que este fenômeno seja considerado na modelagem matemática da difusão, considera-se que o sistema possui contornos móveis, que refletem a variação no tamanho do sistema. Tais problemas são tradicionalmente conhecidos como problemas de Stefan. Grãos de soja sofrem, em média, um aumento de 30~40% em seu tamanho ao absorverem umidade. Para modelar matematicamente a difusão de umidade em grãos de soja foi utilizada a Segunda Lei de Fick da Difusão, sendo que os grãos foram considerados esféricos. O modelo foi resolvido numericamente após ter sido modificado pelo Método da Malha Espacial Variável (MMEV), que inseriu na equação da difusão o aumento de tamanho que os grãos sofrem ao absorverem umidade. Os valores de difusividade foram ajustados e apresentaram aumento em função da temperatura. Foram obtidos os perfis de umidade internos e também os perfis de umidade médios em função do tempo, que se ajustaram satisfatoriamente aos dados experimentais. O movimento do contorno do sistema (raio dos grãos) foi comparado com dados experimentais, obtidos por análise de imagem. Houve desvios entre a previsão do raio em função do tempo pelo modelo e valores experimentais devidos, principalmente, ao aumento irregular do tegumento dos grãos numa direção preferencial em dado momento da absorção de umidade. A abordagem deste trabalho pode ser usada em problemas de difusão de calor.

### **1 INTRODUÇÃO**

Originalmente os problemas do tipo Stefan surgiram do interesse de se investigar o movimento da interface presente no congelamento (ou derretimento) que ocorre num sistema gelo-água. O contorno móvel em tais sistemas é definido como a frente de condução de calor na qual ocorre a transição

entre de fase (CRANK, 1984; MITROVIC, 2012; VOLLER, 2010).

A difusão de umidade em grãos de soja é uma etapa importante no processo de extração das proteínas dos grãos, principalmente visando a produção de alimentos como o tofu, leite e molho de soja (shoyu) (CIABOTTI et al., 2009). Devido à natureza viscoelástica dos grãos, a absorção de umidade tende a ser acompanhada pelo

aumento dos próprios grãos. Este aumento pode chegar a 30~50% do tamanho inicial dos grãos (COUTINHO et al., 2005; URASA et al., 2000a, 2000b). A ordem de grandeza deste aumento motiva a consideração do raio dos grãos como sendo um contorno móvel para o sistema que sofre difusão. Assim, o problema da difusão de umidade em grãos de soja pode ser encarado como um problema do tipo Stefan (BARRY; CAUNCE, 2008).

Diversos autores já se dedicaram ao estudo e solução de problemas de Stefan, obtendo tanto soluções analíticas (ALEXANDROV; MALYGIN, 2010; BARRY; CAUNCE, 2008; NICOLIN; JORGE; JORGE, 2014; VOLLER; FALCINI, 2013; VOLLER, 2014), quanto soluções numéricas (AGUERRE; TOLABA; SUAREZ, 2008; CALDWELL; KWAN, 2004; KUTLUAY; BAHADIR; ÖZDEŞ, 1997; SADOON et al., 2012) para esta classe de problemas. Os trabalhos de Kutluay et al. (1997) e de Sadoun et al. (2012) se destacam pelo uso do Método da Malha Espacial Variável (MMEV) para incluir na equação da difusão o movimento da malha na solução numérica. Trabalhos também foram desenvolvidos considerando-se contornos móveis para a modelagem da hidratação de soja (NICOLIN; JORGE; JORGE, 2014, 2015; NICOLIN et al., 2012).

Neste contexto o objetivo deste trabalho foi modelar matematicamente a hidratação de grãos de soja utilizando-se a abordagem dos problemas de Stefan ao se considerar o raio dos grãos como um contorno móvel para o sistema estudado. Utilizou-se o um esquema numérico explícito juntamente com o MMEV para a solução numérica do modelo. Tanto os perfis internos quanto os perfis médios de umidade foram calculados e se mostraram satisfatórios. Além da validação dos perfis médios de umidade, dados experimentais de raio em função do tempo foram obtidos por análise de imagem. Assim, foi possível comparar os valores de raio em função do

tempo fornecidos pelo modelo, sendo que poucos desvios foram identificados nesta comparação. Estes desvios foram atribuídos, principalmente, ao crescimento desproporcional do tegumento dos grãos numa direção preferencial ao absorver umidade.

## 2 TEORIA

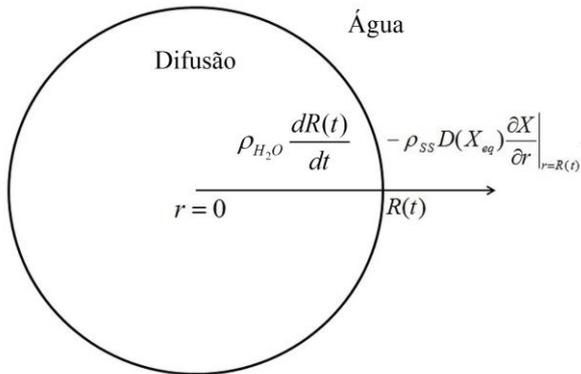
A Segunda Lei de Fick da Difusão em coordenadas esféricas foi utilizada para a modelagem matemática da absorção de umidade pelos grãos de soja e é apresentada pela Equação (1).

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right) \quad (1)$$

sendo  $X$  a umidade em base seca,  $r$  a coordenada radial,  $t$  a coordenada temporal e  $D$  a difusividade, que neste trabalho foi considerada constante, sendo esta hipótese largamente utilizada em literatura.

A Figura 1 apresenta o esquema ilustrativo da hidratação de um grão de soja esférico. Nesta figura é também possível visualizar os termos responsáveis pelo balanço de massa no grão que possibilitaram a descrição matemática do comportamento do raio dos grãos em função do tempo. Uma vez que a água na qual os grãos foram inseridos está a uma temperatura fixa, os grãos sofrem uma variação rápida ao entrarem em contato com a mesma. Devido à dimensão pequena dos mesmos, considerou-se que o equilíbrio térmico é atingido rapidamente. Assim, foi possível considerar que os grãos presentes na amostra se mantiveram, durante todo o processo, à mesma temperatura do banho termostático.

**Figura 1:** Esquema ilustrativo do grão de soja esférico.



O MMEV é inserido na Equação (1) por meio da derivada total, apresentada pela Equação (2). Esta mudança faz com que a derivada temporal não seja mais avaliada em relação a uma coordenada radial constante, mas sim em relação a uma coordenada radial para cada instante de tempo (MURRAY; LANDIS, 1959).

$$\frac{\partial X}{\partial t} \Big|_i = \frac{\partial X}{\partial r} \Big|_t \frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial X}{\partial t} \Big|_r \quad (2)$$

Na Equação (2) o movimento da coordenada radial é dado por:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{r_i}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (3)$$

sendo  $R(t)$  o raio dos grãos, que é uma função do tempo.

Substituindo-se a Equação (3) na (2) e inserindo a equação resultante na Equação (1) é possível obter o modelo da difusão com um contorno móvel como é apresentado a seguir.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{r_i}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \frac{\partial X}{\partial r} + D \left( \frac{2}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right) \quad (4)$$

$$X(r, 0) = X_0 \quad \forall r \quad (5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad t > 0 \quad (6)$$

$$X(R(t), t) = X_{eq} \quad t > 0 \quad (7)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\rho_{SS}}{\rho_{H_2O}} D \frac{\partial X}{\partial r} \Big|_{r=R(t)} \quad (8)$$

$$R(0) = R_0 \quad (9)$$

sendo  $\rho_{SS}$  a densidade do sólido seco,  $\rho_{H_2O}$  a densidade da água,  $X_0$  a umidade inicial,  $X_{eq}$  a umidade de equilíbrio e  $R_0$  o raio inicial dos grãos. A Equação (5) é a condição inicial do problema e estabelece que no início da hidratação os grãos possuem umidade conhecida ( $X_0$ ) e uniformemente distribuída. A Equação (6) é a condição de simetria do sistema estabelecida no centro dos grãos. A Equação (7) é a condição de contorno na superfície dos grãos, que estabelece que a umidade de equilíbrio é imediatamente atingida quando os grãos entram em contato com a água. A Equação (8) é a equação que descreve o movimento do raio dos grãos em função do tempo e foi obtida por um balanço de massa global nos grãos. Esta equação é necessária para completar o modelo, uma vez que o comportamento do raio dos grãos com o tempo não é conhecido até que se resolva o modelo. A Equação (9) representa a condição inicial necessária para resolver a Equação (8) e estabelece que, no início da hidratação, os grãos possuem raio constante igual a  $R_0$ . As Equações (4) - (9) representam a modelagem matemática da difusão de umidade em grãos de soja quando se considera este problema como sendo um problema de Stefan.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 Dados de umidade em função do tempo

Os valores de umidade foram obtidos para as temperaturas de 10, 20, 30, 40 e 50°C e foram utilizados grãos de soja do cultivar CD 202, fornecidos pela Cooperativa Agropecuária Mourãoense Ltda (COAMO). O volume de 1,5 L de solução de benzoato de sódio, 0,2% (m/m), foi preparada e o benzoato de sódio foi utilizado para evitar a proliferação de microrganismos durante a submersão dos grãos na solução. A solução foi posta em contato com um banho termostático até que atingisse a temperatura na qual seria realizado o teste. A partir deste momento, os grãos de soja foram adicionados à solução e o tempo começou a ser medido. Em tempos pré-determinados amostras eram retiradas da solução, tinham o excesso de umidade superficial retirados com papel toalha e tinham sua massa aferida. Então, as amostras foram inseridas em estufa a 105°C, durante 24h (LUTZ, 1985). Após este tempo a massa da amostra era medida novamente. Com estes dados foi possível obter a umidade dos grãos em cada instante de tempo.

### 3.2 Dados de raio em função do tempo

Amostras de 16 grãos também foram retiradas da solução em tempos pré-determinados e o excesso de umidade superficial foi retirado com papel toalha. As amostras foram depositadas sobre uma superfície não refletiva e, por meio de uma câmera fotográfica com resolução de 5 Mp, imagens das amostras foram registradas de uma distância fixa com intuito de registrar a ordem de grandeza do crescimento dos grãos ao longo da hidratação. As imagens foram analisadas pelo programa Image-Pro Plus 5.0, e o diâmetro médio dos grãos de soja presente nas imagens pôde ser aferido. Por conseguinte, o raio médio dos grãos foi calculado em função do tempo. Para que fosse possível comparar estas medidas com os valores calculados pelo modelo, ajustou-se uma equação empírica que relacionasse o raio

em função do tempo, como mostra a Equação (10). Os desvios entre os valores fornecidos pelo modelo e os dados experimentais foi calculado pela Equação (11).

$$R_{\text{exp}}(t) = R_0 + \frac{t}{A + Bt} \quad (10)$$

$$DV(\%) = \frac{|R(t) - R_{\text{exp}}(t)|}{R_{\text{exp}}(t)} \times 100 \quad (11)$$

sendo  $R_{\text{exp}}(t)$  os valores de raio experimental em função do tempo e  $DV$  o desvio percentual entre os valores calculados pelo modelo e os experimentais.

### 3.3 Solução numérica e ajuste dos parâmetros

O modelo proposto foi resolvido por um esquema numérico explícito desenvolvido no programa MATLAB<sup>®</sup>. Para obter o esquema numérico explícito as derivadas temporais foram aproximadas por diferenças finitas para frente. As derivadas primeiras radiais e a derivada segunda foram aproximadas por diferenças finitas centrais. A derivada primeira presente na Equação (8) foi aproximada por diferença finita de três pontos com intuito de aumentar a exatidão dos cálculos.

Para que fosse possível comparar os resultados do modelo com os dados experimentais de umidade em função do tempo, valores médios de umidade foram obtidos como uma média no volume dos grãos calculados pela Equação (12), sendo que a integral presente nesta equação foi avaliada pelo comando “trapz” do MATLAB<sup>®</sup>.

$$X_m(t) = \frac{3}{R(t)^3} \int_0^{R(t)} X(r(t), t) r(t)^2 dr \quad (12)$$

sendo  $X_m(t)$  os valores médios de umidade em base seca.

Os valores de difusividade foram obtidos pela minimização da função objetivo apresentada pela Equação (13). A minimização da função objetivo foi feita utilizando-se o comando “nlinfit” do MATLAB®, específico para a solução de problemas de regressão não linear. Este comando fornece informações que podem ser utilizadas pelo comando “nlparci”, também do MATLAB®, para o cálculo das inferências estatísticas em relação ao ajuste dos parâmetros.

$$\phi = \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} (X_{\text{calc}}^i - X_{\text{exp}}^i)^2 \quad (13)$$

sendo  $\phi$  a função objetivo,  $X_{\text{calc}}$  as umidades calculadas pelo modelo,  $X_{\text{exp}}$  as umidade experimentais e  $N_{\text{exp}}$  o número de dados experimentais.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

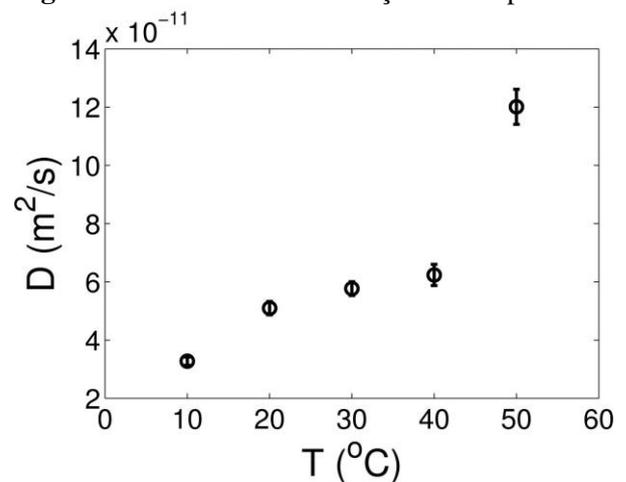
A Tabela 1 apresenta os valores de umidade, inicial e de equilíbrio, obtidos experimentalmente, juntamente com os valores da média dos erros quadráticos. A definição da média dos erros quadráticos nada mais é do que o valor final da função objetivo ( $\phi$ ) dividido pelo número de dados experimentais ( $N_{\text{exp}}$ ). Pela ordem de grandeza da média dos erros quadráticos é possível observar que o modelo se ajustou adequadamente aos dados experimentais em todas as temperaturas.

Os valores de difusividade são apresentados na Figura 2 e apresentaram aumento em função da temperatura. Este é um resultado esperado, uma vez que se esperam maiores taxas de transferência de massa para maiores temperaturas.

**Tabela 1:** Umidade inicial, de equilíbrio e média dos erros quadráticos.

T (°C)	$X_0$	$X_{\text{eq}}$	$(\phi / N_{\text{exp}}) \cdot 10^3$
10	0,126	1,651	2,037
20	0,128	1,651	2,229
30	0,122	1,727	2,065
40	0,121	1,897	4,670
50	0,103	1,791	2,819

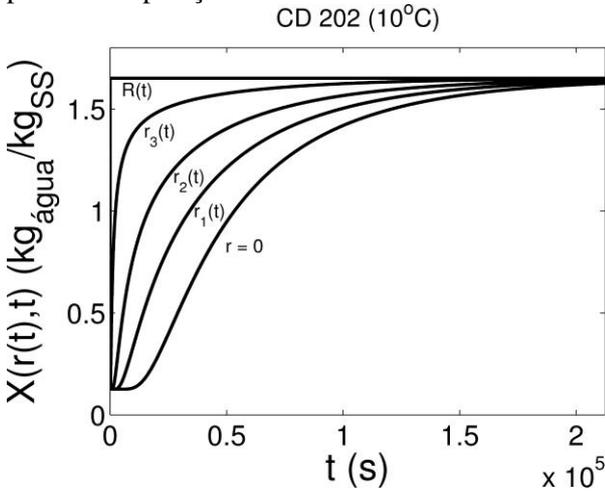
**Figura 2:** Difusividade em função da temperatura.



Os perfis de umidade apresentados a seguir se referem à hidratação dos grãos de soja na temperatura de 10°C. Para as demais temperaturas os perfis tendem a atingir mais rapidamente condições que tendem a um estado de equilíbrio devido ao aumento nas taxas de difusão de umidade devido ao aumento da temperatura.

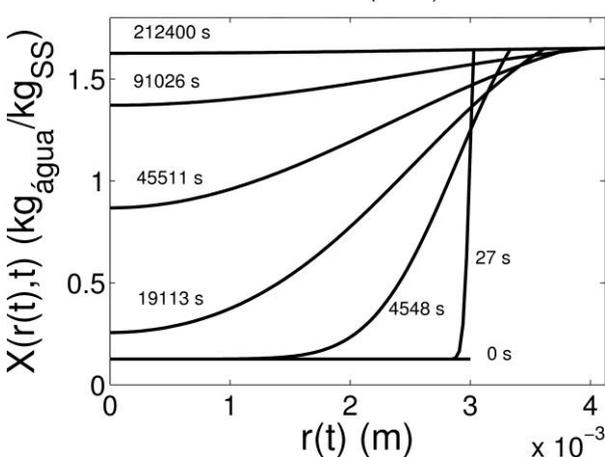
Os perfis de umidade em função do tempo para várias posições radiais são apresentados na Figura 3. Vale ressaltar a dependência da coordenada radial com o tempo, uma vez que o raio dos grãos foi considerado um contorno móvel do sistema. Nesta figura fica nítido como a umidade se distribui em função do tempo para diferentes posições radiais. É possível também observar a condição de contorno na superfície dos grãos ( $r = R(t)$ ), a qual estabelece que a umidade de equilíbrio é imediatamente atingida na superfície.

**Figura 3:** Perfis de umidade em função do tempo para várias posições radiais.



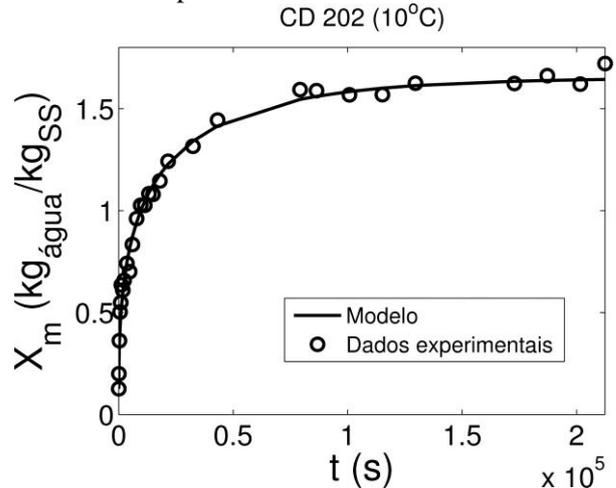
A Figura 4 apresenta os perfis de umidade em função da posição radial para vários valores de tempo. No início da absorção de umidade não há aumento do tamanho dos grãos e eles possuem umidade inicial igual a  $X_0$ . Conforme o processo de difusão avança no tempo, observa-se que o modelo prevê novas posições radiais que surgem devido ao aumento dos grãos ao absorver água. O modelo calcula também os perfis de umidade destas novas posições radiais. É por esta razão que os perfis se estendem além do tamanho inicial dos grãos ( $R_0 = 3 \text{ mm}$ ).

**Figura 4:** Perfis de umidade em função da posição radial para vários valores de tempo.



O modelo previu perfis de umidade médios satisfatórios e com alta concordância com os dados experimentais de umidade a partir da Equação (12) (Figura 5). As principais características da curva cinética de hidratação foram contempladas.

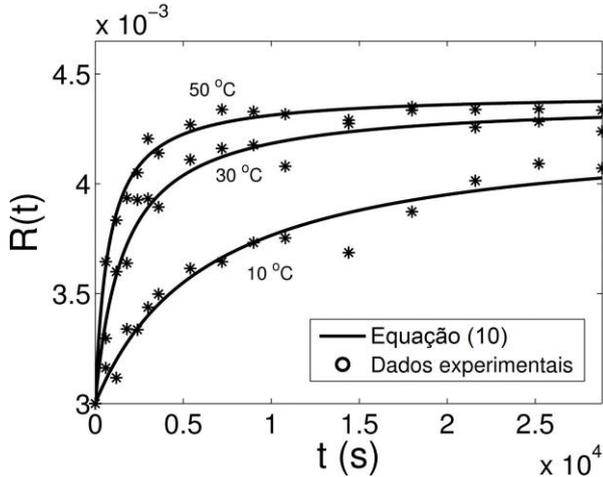
**Figura 5:** Perfil médio de umidade comparado com dados experimentais.



O método de análise de imagem dos grãos para obtenção do aumento do tamanho dos grãos em função do tempo se mostrou adequado e forneceu resultados satisfatórios (Figura 6). A ordem de grandeza do aumento dos grãos devido à absorção de umidade foi captada e está de acordo com a tendência esperada do comportamento do raio dos grãos em função do tempo. Esperava-se que no início do processo, o qual é caracterizado por taxas altas de difusão de umidade devido aos altos gradientes de umidade, os grãos aumentassem significativamente. Conforme o gradiente de umidade fosse diminuindo, esperava-se que o aumento dos grãos também diminuísse gradativamente até que um valor máximo do raio fosse atingido. Este comportamento pode ser claramente observado para três diferentes temperaturas na Figura 6. O uso da Equação (10) para representar estes dados auxiliou na comparação dos valores obtidos

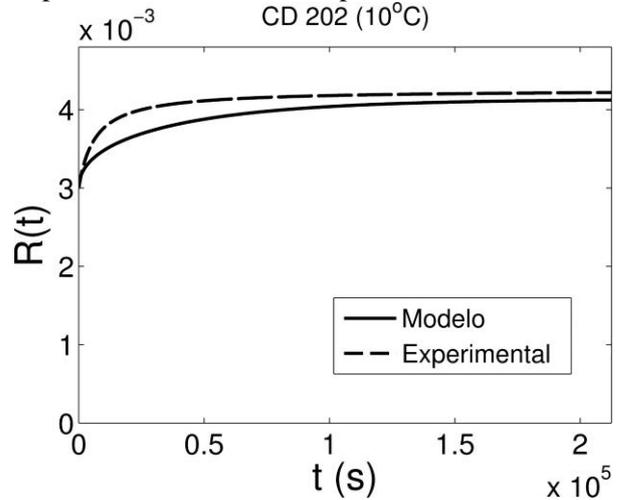
experimentalmente com os valores calculados pelo modelo.

**Figura 6:** Raio em função do tempo: valores experimentais e calculados pela Equação (10).



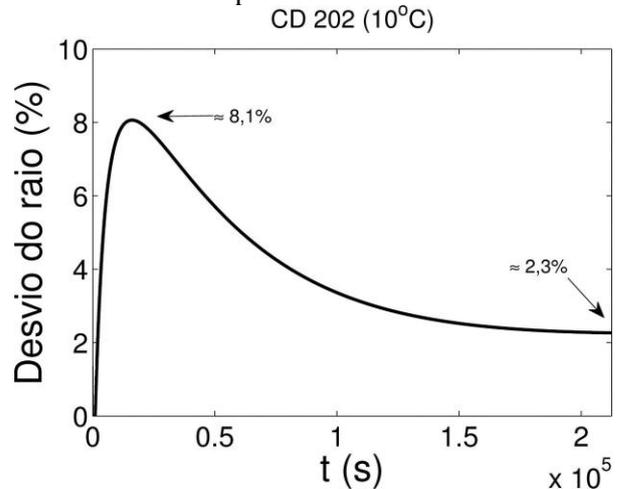
A Figura 7 apresenta a comparação entre os valores de raio calculados pelo modelo e os obtidos experimentalmente (representados pela Equação (10)). Os valores experimentais obtidos foram maiores do que os calculados pelo modelo. Desvios puderam ser observados, principalmente na região de transição entre a difusão altamente transiente e a condição estacionária. Conforme o tempo de hidratação avançava, foi possível observar que tanto o modelo, quanto a realidade experimental tenderam a um valor de raio máximo, que desviaram levemente na região estacionária. Os grãos partiram de um raio inicial de  $R_0 = 3$  mm e atingiram um valor máximo experimental igual a  $R_{\text{máx}} = 4,2$  mm, o que corresponde a um aumento de 40,6%. O modelo previu um raio máximo igual a  $R_{\text{máx}} = 4,1$  mm, que corresponde a um aumento de 37,4%.

**Figura 7:** Comparação dos valores de raio experimentais e calculados pelo modelo.



Os desvios entre os valores previstos pelo modelo e obtidos experimentalmente foram calculados pela Equação (11) e são apresentados na Figura 8. Ficam ainda mais claras as regiões do processo de difusão de umidade nas quais houve os maiores desvios entre os valores de raio previstos pelo modelo e os valores experimentais. A partir do momento em que os grãos atingem o raio máximo, o desvio entre os valores preditos pelo modelo e experimentais se torna constante.

**Figura 8:** Desvios dos valores calculados pelo modelo e dados experimentais.

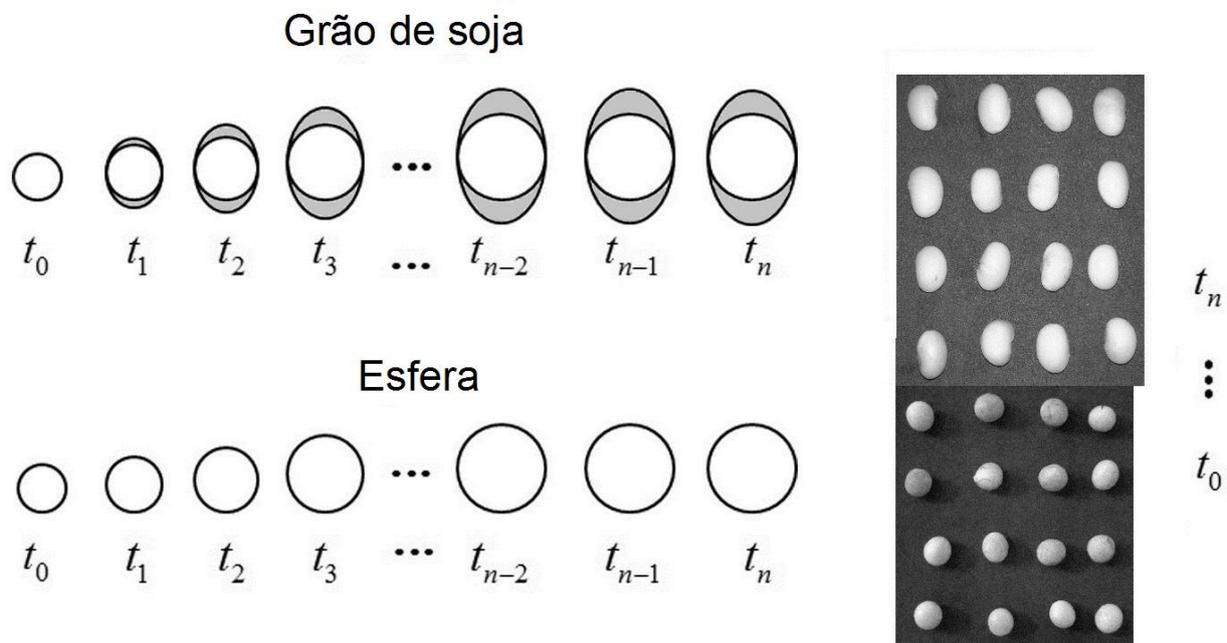


Devido à natureza viscoelástica e anisotrópica dos grãos de soja, o tegumento dos grãos apresenta um crescimento desproporcional numa direção preferencial a partir de certo momento do processo de hidratação. Esta anomalia faz com que a forma geométrica dos grãos deixe de ser próxima a uma esfera e se aproxime de um elipsoide (Figura 9).

A metodologia de obtenção de dados de raio dos grãos por análise de imagem foi

**Figura 9:** Crescimento desproporcional do grão de soja em comparação com o crescimento de uma esfera.

capaz de captar o acréscimo de tamanho que ocorre desproporcionalmente nos grãos. Este acréscimo é representado pelas regiões em cinza na Figura 8. Este acréscimo de tamanho foi, então, contabilizado na estimativa do diâmetro médio dos grãos, feita pelo programa Image-Pro Plus 5.0. Assim, foram obtidos diâmetros médios maiores para os grãos, causando o afastamento da previsão do modelo.



## 5 CONCLUSÃO

O modelo proposto neste trabalho apresentou concordância satisfatória com dados experimentais e foi capaz de modelar a difusão de umidade em grãos de soja como sendo um problema do tipo Stefan. O modelo também foi capaz de calcular as novas posições radiais que surgiam devido ao aumento dos grãos durante a hidratação bem como calculou os perfis de umidade para as novas posições radiais.

Houve desvios da predição do modelo do comportamento do raio dos grãos em função do tempo quando comparados com valores de raio experimentais, obtidos por análise de imagem. Embora o método de análise de imagem tenha fornecido bons resultados, os desvios de predição surgiram, principalmente, devido ao crescimento desproporcional do tegumento dos grãos de soja numa direção preferencial a partir de certo momento da hidratação.

A metodologia apresentada neste trabalho pode ser estendida a problemas de transferência de calor com um contorno

móvel, que seja semelhante ao problema abordado.

### NOMENCLATURA

<i>A</i>	Constante da equação do raio experimental ( $s^{-1}$ )
<i>B</i>	Constante da equação do raio experimental (s)
<i>D</i>	Difusividade ( $m^2/s$ )
<i>DV</i>	Desvio percentual (%)
<i>i</i>	Índice (adim.)
<i>N</i>	Número de dados experimentais (adim.)
<i>r</i>	Coordenada radial (m)
<i>R</i>	Raio dos grãos (m)
<i>t</i>	Coordenada temporal (s)
<i>T</i>	Temperatura ( $^{\circ}C$ )
<i>X</i>	Umidade em base seca ( $kg_{\text{água}}/kg_{SS}$ )

### Letras gregas

$\rho$	Densidade ( $kg/m^3$ )
$\phi$	Função objetivo ( $kg_{\text{água}}^2/kg_{SS}^2$ )

### Subscritos

0	Inicial
calc	Valor calculado
eq	Equilíbrio
exp	Experimental
<i>m</i>	Médio
SS	Sólido seco

### REFERÊNCIAS

AGUERRE, R. J.; TOLABA, M.; SUAREZ, C. Modeling Volume Changes in Food Drying and Hydration. **Latin American Applied Research**, v. 38, p. 345–349, 2008.

ALEXANDROV, D. V.; MALYGIN, A. P. The Stefan problem for unsteady-state evaporation of a volatile component in the solid-liquid-gas systems: Exact analytical

solution. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, n. 13-14, p. 2790–2794, 2010.

BARRY, S. I.; CAUNCE, J. Exact and numerical solutions to a Stefan problem with two moving boundaries. **Applied Mathematical Modelling**, v. 32, n. 1, p. 83–98, jan. 2008.

CALDWELL, J.; KWAN, Y. Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 7, p. 535–545, 23 abr. 2004.

CIABOTTI, S.; BARCELOS, M. F. P.; CIRILLO, M. A.; PINHEIRO, A. C. M. Propriedades tecnológicas e sensoriais de produto similar ao tofu obtido pela adição de soro de leite ao extrato de soja. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v. 29, n. 2, p. 346–353, 2009.

COUTINHO, M. R.; OMOTO, E. S.; ANDRADE, C. M. G.; JORGE, L. M. M. Modelagem e validação da hidratação de grãos de soja. **Ciência e Tecnologia de Alimentos**, v. 25, n. 3, p. 603–610, set. 2005.

CRANK, J. **Free and Moving Boundary Problems**. 1st. ed. Oxford: Clarendon Press, 1984.

KUTLUAY, S.; BAHADIR, A. R.; ÖZDEŞ, A. The numerical solution of one-phase classical Stefan problem. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 81, n. 1, p. 135–144, jun. 1997.

LUTZ, I. A. **Normas analíticas do Instituto Adolfo Lutz**. 3. ed. São Paulo: IMESP, 1985.

MITROVIC, J. Josef Stefan and his evaporation-diffusion tube-the Stefan

diffusion problem. **Chemical Engineering Science**, v. 75, p. 279–281, 2012.

MURRAY, W. D.; LANDIS, F. Numerical and machine solutions of transient heat-conduction problems involving melting or freezing. **J. Heat Transfer (C)**, v. 81, p. 106–112, 1959.

NICOLIN, D. J.; COUTINHO, M. R.; ANDRADE, C. M. G.; JORGE, L. M. M. Hsu model analysis considering grain volume variation during soybean hydration. **Journal of Food Engineering**, v. 111, n. 3, p. 496–504, ago. 2012.

NICOLIN, D. J.; JORGE, R. M. M.; JORGE, L. M. M. Stefan Problem Approach Applied to the Diffusion Process in Grain Hydration. **Transport in Porous Media**, 28 jan. 2014.

NICOLIN, D. J.; JORGE, R. M. M.; JORGE, L. M. M. Evaluation of distributed parameters mathematical models applied to grain hydration with volume change. **Heat and Mass Transfer**, v. 51, n. 1, p. 107–116, 8 jul. 2015.

SADOON, N. SI-AHMED, E-K.; COLINET, P.; LEGRAND, J. On the boundary immobilization and variable space grid methods for transient heat conduction problems with phase change: Discussion and refinement. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 340, n. 7, p. 501–511, jul. 2012.

URASA, L.; TANAKA, S.; TANAKA, F.; MORITA, K. Soybean moisture absorption properties and their related size changes by imaging (part 2) - 3D size changes. **Journal of the Society of Agricultural Structures**, v. 31, n. 3, p. 171 – 178, 2000a.

URASA, L.; TANAKA, S.; TANAKA, F.; MORITA, K. Soybean moisture absorption properties and their related size changes by

imaging (part 1) - 2D size changes. **Journal of the Society of Agricultural Structures**, v. 6, p. 23–30, 2000b.

VOLLER, V. R. An exact solution of a limit case Stefan problem governed by a fractional diffusion equation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, n. 23-24, p. 5622–5625, nov. 2010.

VOLLER, V. R. Fractional Stefan problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 74, p. 269–277, 2014.

VOLLER, V. R.; FALCINI, F. Two exact solutions of a Stefan problem with varying diffusivity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 58, n. 1-2, p. 80–85, mar. 2013.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – Brasil.