

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO PARTICULADO APLICADO AO PREENCHIMENTO DE CANAL FRATURADO

M. V. BARBOSA^{1*}, F. C. DE LAI¹, S. L. M. JUNQUEIRA^{1#}

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Centro de Estudos em Reologia e Fluidos Não Newtonianos (CERNN), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais (PPGEM)

e-mail: *marcoscp2@gmail.com ; #silvio@utfpr.edu.br

RESUMO

No presente trabalho, uma análise numérica do preenchimento de um canal vertical com fratura transversal é apresentada. A abordagem escolhida para o preenchimento consiste em adicionar material particulado ao escoamento para promover a deposição de partícula no interior da fratura, reduzindo a fuga de fluido nessa região. A análise é realizada através de uma abordagem euleriana para o fluido e lagrangiana para as partículas. Para efetuar o acoplamento entre as fases e realizar o cálculo das colisões entre as partículas os modelos DDPM (*Dense Discrete Phase Model*) e DEM (*Discrete Element Method*) são combinados. O resultado do processo de preenchimento, estudado através da variação da quantidade de partículas injetadas no canal, é analisado através das características geométricas do leito de partículas formado no interior da fratura, da vazão de fluido sendo perdido pela fratura e através do monitoramento da pressão na entrada do canal devido ao processo de injeção. Os resultados mostram que a influência da quantidade de partículas injetadas exerce maior influência sobre o tempo necessário para realizar o preenchimento. Assim, a concentração reduz o tempo de preenchimento, porém implica no aumento da pressão na região de entrada do canal.

1 INTRODUÇÃO

O escoamento bifásico do tipo líquido-sólido é encontrado em diversas aplicações como separadores ciclônicos, leitos fluidizados, transporte de sedimentos, entre outros (LOTH, 2010)

Estudar o escoamento particulado de forma experimental é uma tarefa muitas vezes complexa, principalmente do ponto de vista de desenvolvimento de sensores para a mensuração de propriedades relativas à fase sólida. Sendo assim, a simulação numérica de tal categoria de escoamento é utilizada frequentemente como alternativa. (YEOH E TU, 2009)

Em simulações computacionais do escoamento particulado, duas abordagens podem ser realizadas, com relação à fase sólida: a abordagem euleriana ou lagrangiana.

A abordagem euleriana considera a fase sólida como um meio contínuo com a habilidade de interpenetrar e interagir com o fluido ao seu redor. O rastreamento das partículas é feito através da fração volumétrica da fase sólida (GIDASPOW, 1994).

Na abordagem lagrangiana as partículas são tratadas de forma discreta e rastreadas individualmente ao longo de todo domínio numérico computacional (PATANKAR E JOSEPH, 2001)

Cada modelo possui seus pontos fortes e fracos: no modelo euleriano o tratamento de

um número elevado de partículas é possível, porém existe a necessidade de determinar relações de fechamento para garantir um balanço eficaz nas equações de conservação; no modelo lagrangiano as equações de fechamento não são necessárias, mas simular uma quantidade elevada de partículas pode se tornar um processo custoso, do ponto de vista computacional (GIDASPOW, 1994).

A escolha de cada modelo depende de um grande número de variáveis, sendo as principais aquelas que demandam informações específicas sobre o deslocamento de cada partícula durante o estudo do fenômeno escolhido.

Neste trabalho, o escoamento líquido-sólido é utilizado para preencher um canal fraturado. Tal problema possui diversas aplicações, em especial na indústria do petróleo, seja no fraturamento artificial de reservatórios ou na redução/eliminação do problema de perda de circulação (DE LAI, 2013; BARBOSA, 2015).

A descrição matemática da fase discreta é feita através de uma modelagem do tipo lagrangiana, já que se deseja observar o transporte de partículas do canal em direção à fratura.

O processo de preenchimento da fratura é analisado através da concentração de partículas, determinada a partir da quantidade de partículas injetadas por segundo ao fluido, $N_{p,inj}$.

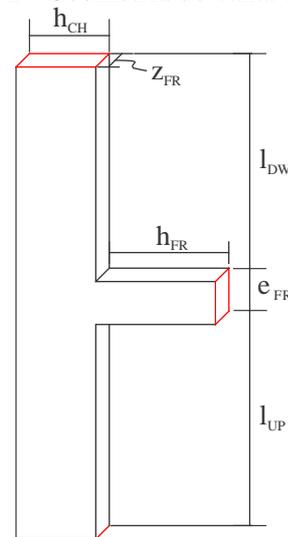
As variáveis de interesse do problema consistem na vazão de fuga devido à presença da fratura Q_{fuga} , na pressão de entrada no canal fraturado P_{ent} e nas características geométricas do leito de partículas formado no interior da fratura como: posição inicial $h_{pct,i}$, comprimento do leito h_{pct} e preenchimento vertical da fratura $e_{%,FR}$.

Além disso, o tempo necessário para que a fratura seja preenchida t_{est} também é monitorado.

2 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

O problema a ser estudado consiste no escoamento vertical em um canal com a presença de uma fratura, assim como mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Geometria do canal fraturado



Na Figura 1 a fratura no domínio computacional é definida através de seu comprimento (h_{FR}) e de sua espessura (e_{FR}). O comprimento do canal à montante e à jusante da fratura é dado por l_{UP} e l_{DW} , respectivamente. A abertura do canal é definida por h_{CH} e o sistema como um todo possui componente na direção z , z_{FR} .

O canal e a fratura são considerados impermeáveis. A parede final da fratura ($x = h_{FR}$) é considerada permeável apenas à passagem de fluido. Dessa forma, existe a perda de fluido associada à presença da fratura no canal.

Para selar a fratura, é empregada a injeção de material particulado no canal. As partículas serão transportadas durante toda a extensão do canal, até a entrada da fratura, onde as mesmas são depositadas por ação da gravidade.

A dificuldade na caracterização de tal problema reside na necessidade de determinar as corretas condições de contorno a serem aplicadas durante a fase de injeção de

partículas. Em vista disso, De Lai (2013) propôs utilizar a quantidade de fluido sendo perdido através da fratura como base para a determinação das pressões associadas em cada superfície de saída de fluido, i.e., saída do canal fraturado e saída da fratura.

Para tanto, o autor se valeu de uma condição de velocidade prescrita na entrada do canal fraturado, $U_{\beta,CH,i}$, determinado a partir do número de Reynolds desejado no canal, mostrado na Eq. (1), sendo ρ_{β} a massa específica e ε_{β} a viscosidade do fluido.

$$U_{\beta,CH,i} = \frac{Re \mu_{\beta}}{\rho_{\beta} h_{CH}} \quad (1)$$

A mesma metodologia desenvolvida por De Lai (2013) é aplicada neste trabalho.

3 MODELO NUMÉRICO

O modelo *Dense Discrete Phase Model*, proposto por Popoff e Braun (2007), é utilizado neste trabalho. A descrição da fase contínua (fluido) é feita através de uma abordagem euleriana, enquanto as partículas (fase discreta) são descritas através de uma abordagem lagrangiana.

A formulação matemática consiste em dois conjuntos de equações: um para o fluido e outro para as partículas. Nesse estudo, o fluido é considerado newtoniano em um escoamento incompressível e isotérmico. As equações para a fase contínua são dadas pela conservação da massa, Eq. (2) e pelo balanço de quantidade de movimento, Eq. (3).

$$\frac{\partial \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{u}_{\beta}) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{u}_{\beta})}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{u}_{\beta} \mathbf{u}_{\beta}) &= -\varepsilon_{\beta} \nabla p_{\beta} \\ + \nabla \cdot (\varepsilon_{\beta} \mu_{\beta} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\beta}) + \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{g} & \\ + \mathbf{F}_{DPM} + \mathbf{S}_{DPM} & \end{aligned} \quad (3)$$

em que t é o tempo, ε_{β} é a fração volumétrica da fase contínua, \mathbf{u}_{β} é o vetor velocidade, p_{β} é o gradiente de pressão, \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade. \mathbf{F}_{DPM} representa a força de acoplamento entre as fases e \mathbf{S}_{DPM} é o termo fonte devido ao descolamento do fluido em relação a entrada das partículas em um volume de controle.

Quanto à fase discreta, a posição de cada partícula é descrita em função da velocidade, como mostrado na Eq. (4). A segunda lei de Newton para o movimento, Eq (5), é aplicada para a determinação da velocidade da partícula.

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \quad (4)$$

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{gb} + \mathbf{F}_{pg} + \mathbf{F}_{vm} + \mathbf{F}_{ls} + \mathbf{F}_{DEM} \quad (5)$$

Nas equações (4) e (5) a posição e velocidade da partícula é dada por \mathbf{x}_p e \mathbf{u}_p , respectivamente. A massa da partícula é representada por m_p , \mathbf{F}_d é a força de arrasto, \mathbf{F}_{gb} representa o balanço entre força gravitacional e empuxo, \mathbf{F}_{pg} representa a força devido ao gradiente de pressão, \mathbf{F}_{vm} é a força devido à massa virtual, \mathbf{F}_{ls} é a força de sustentação de Saffman e $\mathbf{F}_{DEM} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t$ é a força de colisão.

Na Tabela 1 vê-se a representação de cada força em que Re_p é o número de Reynolds das partículas, dado por $Re_p = \rho_{\beta} |\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_p| d_p / \mu_{\beta}$ e ρ_p é a massa específica da partícula. C_{ls} é a constante de Saffman (Li e Ahmadi 1992) e C_{vm} é o coeficiente de massa virtual (Kendoush *et al.* 2007).

O coeficiente de arrasto, C_D é calculado através do modelo proposto por Morsi e Alexander (1972), desenvolvido para apenas uma partícula esférica. O modelo foi escolhido por ser o único disponível no software comercial utilizado para escoamentos líquido-sólido.

Tabela 1 - Expressões para a determinação das forças agindo sobre as partículas

Força	Equação	
Gravitacional e empuxo	$\mathbf{F}_{gb} = m_p \frac{\rho_p - \rho_\beta}{\rho_p} \mathbf{g}$	
Arrasto	$\mathbf{F}_d = \frac{3}{4} \frac{m_p \mu_\beta}{\rho_p d_p^2} C_D \text{Re}_p (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_p)$	
Sustentação de Saffman	$\mathbf{F}_{ls} = C_{ls} m_p \frac{\rho_\beta}{\rho_p} (\nabla \times \mathbf{u}_\beta) \times (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_p)$	
Massa virtual	$\mathbf{F}_{vm} = C_{vm} m_p \frac{\rho_\beta}{\rho_p} \frac{D}{Dt} (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_p)$	
Gradiente de pressão	$\mathbf{F}_{pg} = m_p \frac{\rho_\beta}{\rho_p} (\mathbf{u}_\beta \nabla \cdot \mathbf{u}_\beta)$	
Colisão	Normal	$\mathbf{F}_\lambda = [k\delta + \gamma(\mathbf{u}_{12} \cdot \mathbf{1}_2)] \mathbf{1}_2$
	Tangencial	$\mathbf{F}_t = \zeta - \mu_a \mathbf{F}_n \mathbf{1}_2$

A força de colisão \mathbf{F}_{DEM} é uma combinação da força normal (\mathbf{F}_n) e tangencial (\mathbf{F}_t) gerada pela colisão entre as partículas. Ambas as forças são calculadas através do método dos elementos discretos (*Discrete Element Method* – DEM), proposto por Cundall e Strack (1979).

A força normal é calculada através de um modelo do tipo mola-amortecedor (Lunding, 1998), em que k , δ , γ , \mathbf{u}_{12} e λ_{12} são, respectivamente, a constante de rigidez, a sobreposição das partículas no momento da colisão, o coeficiente de amortecimento, a velocidade relativa entre as partículas e a direção normal de colisão. O coeficiente de amortecimento é calculado através da Eq. (6), com base em um coeficiente de restituição η . Na Eq. (6), m_{12} representa a massa reduzida e t_{col} é o tempo de colisão.

$$\gamma = -2 \frac{m_{12}}{t_{col}} \ln \eta \quad (6)$$

A força de colisão tangencial é calculada através do modelo de Coulomb com base em um coeficiente de atrito μ_a e na direção tangencial de colisão ζ_{12} . Neste trabalho considera-se nula a força de colisão tangencial

4 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção o acoplamento DDPM-DEM é avaliado numericamente.

O primeiro conjunto de problemas consiste na velocidade terminal de uma partícula. Os parâmetros de cada simulação são aqueles descritos em Mordant e Pinton (2000) e são mostrados na Tabela 2.

Figura 2 - Velocidade terminal para o Caso 1 - partícula de vidro

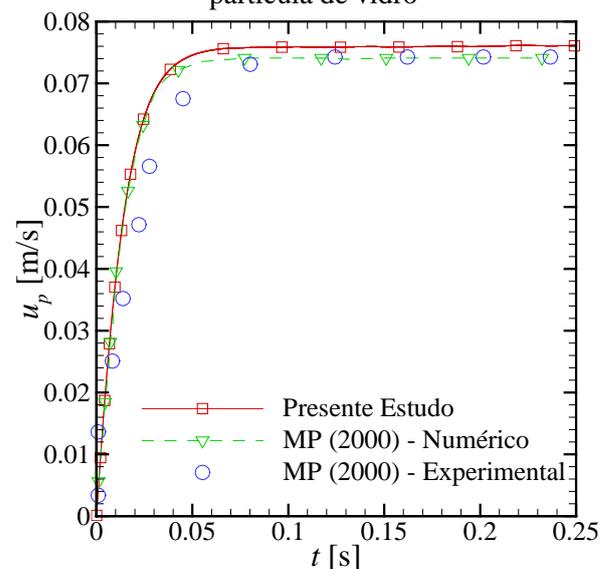


Tabela 2 - Parâmetros empregados para a simulação da velocidade terminal de uma partícula

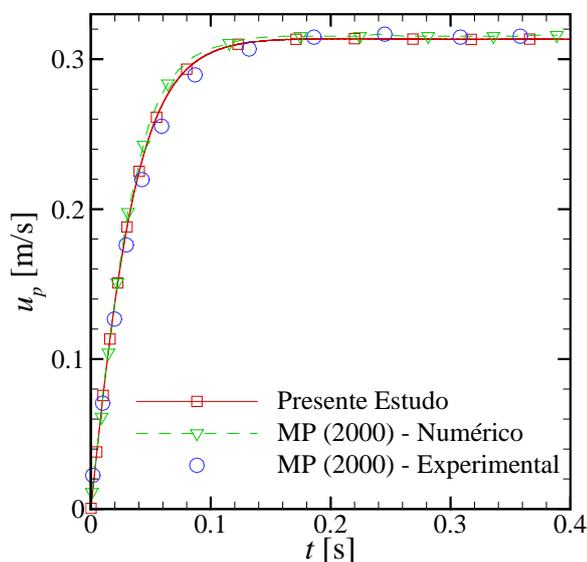
Parâmetro	Representação [Unidade]	Caso 1: esfera de vidro	Caso 2: esfera de aço
Massa específica da partícula	ρ_p [kg/m ³]	2560	7710
Diâmetro da partícula	D_p [mm]	0,5	0,8
Velocidade terminal - experimental	u_p [m/s]	0,0741	0,315
Massa específica do fluido	ρ_β [kg/m ³]	998,2	
Viscosidade dinâmica	μ_β [Pa.s]	1,003·10 ⁻³	

Na Figura 2 pode ser observado o resultado para a simulação da velocidade terminal para o Caso 1 e as respectivas comparações com dados numéricos e experimentais de Mordant e Pinton (2000).

É possível notar que existe uma boa concordância entre os resultados numéricos durante toda a região da rampa (onde existe a aceleração da partícula). Após essa região, existe uma pequena diferença entre a velocidade terminal obtida neste trabalho e os dados do modelo numérico e resultados experimentais, devido principalmente pela magnitude do valor da velocidade.

A Figura 3 mostra a comparação dos resultados para a velocidade da partícula ao longo do tempo para o Caso 2, onde considera-se uma partícula de aço.

Figura 3 - Velocidade terminal para o Caso 2 - partícula de aço

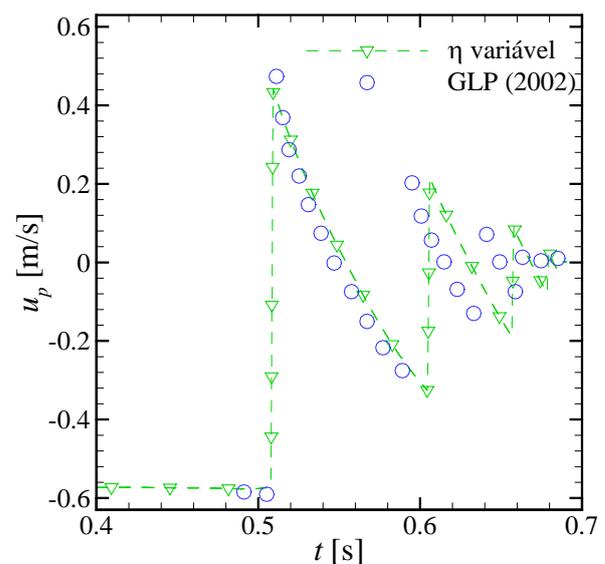


Para avaliar o modelo de colisões adotado, a colisão entre uma partícula e uma parede estática foi analisada segundo os dados experimentais de Gondret *et al.* (2002).

Os parâmetros empregados na simulação do problema de colisão consistem em $\rho_p = 7800$ kg/m³, $D_p = 3,0$ mm, $\rho_\beta = 1187,6$ kg/m³, $\mu_\beta = 0,01$ [Pa.s]. Para caracterizar o momento da colisão, foram empregados quatro coeficientes de restituição $\eta = 0,78; 0,66; 0,45$ e $0,25$.

Na Figura 4 é apresentada a comparação entre o resultado numérico obtido neste trabalho e a literatura disponível.

Figura 4 - Comparação entre os resultados obtidos e o experimento de Gondret *et al.* (2002)



5 RESULTADOS

Para a análise do processo de vedação considera-se um canal com as seguintes dimensões: $l_{UP} = 1,800$ m, $l_{DW} = 0,225$ m, $h_{CH} = 0,045$ m. A fratura possui comprimento $h_{FR} = 720$ m e espessura $e_{FR} = 0,010$ m. O fluido utilizado é uma mistura água-glicerina com $\rho_{\beta} = 1187,6$ kg/m³ e $\mu_{\beta} = 27,973 \cdot 10^{-3}$ Pa.s.

A vazão de fuga Q_{fuga} é tomada como a relação entre a quantidade de fluido sendo perdido pela fratura ao longo do processo de injeção q_{fuga} e a vazão de fuga inicial, antes do processo de injeção $q_{\beta,FR,o}$ - Equação (7).

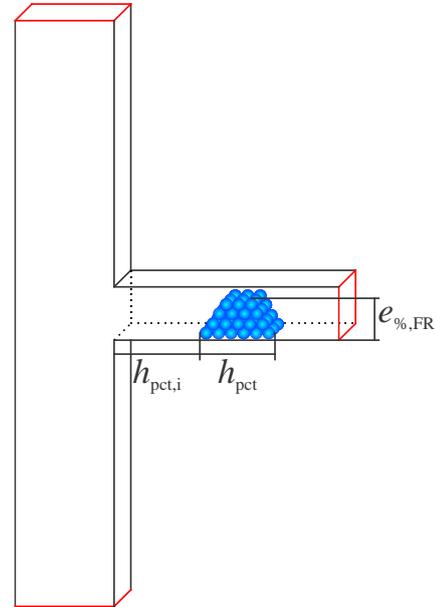
$$Q_{fuga} = \frac{q_{fuga}}{q_{\beta,FR,o}} \quad (7)$$

O monitoramento da pressão na entrada do canal, P_{ent} , é definido como a relação entre pressão durante o processo de injeção de partículas, $p_{m,CH,i}$, e a pressão devido à perda de fluido inicial, $p_{\beta,CH,i}$, assim como mostrado na Equação (8).

$$P_{ent} = \frac{p_{m,CH,i}}{p_{\beta,CH,i}} \quad (8)$$

Além da vazão de fuga e da pressão na entrada do canal, as características geométricas do leito de partículas também são monitoradas: o posicionamento $h_{pct,i}$ e o comprimento do leito h_{pct} bem como o preenchimento vertical da fratura $e_{\%,FR}$, indicados na Figura 5.

Figura 5 - Parâmetros geométricos de monitoramento para o leito de partículas



O preenchimento da fratura no canal é analisado através da variação da quantidade de partículas adicionadas ao fluido por segundo $N_{p,inj}$. Quatro configurações foram avaliadas: $N_{p,inj} = 1000, 1500, 2000$ e 2500 .

O resultado do processo de preenchimento da fratura, apresentado na Figura 6, mostra que não existe variação significativa na forma geométrica do leito de partículas. Para evidenciar esse comportamento, a Tabela 3 mostra as características geométricas de cada leito.

Figura 6 - Forma do leito de partículas em relação à quantidade de partículas injetadas por passo de tempo do fluido

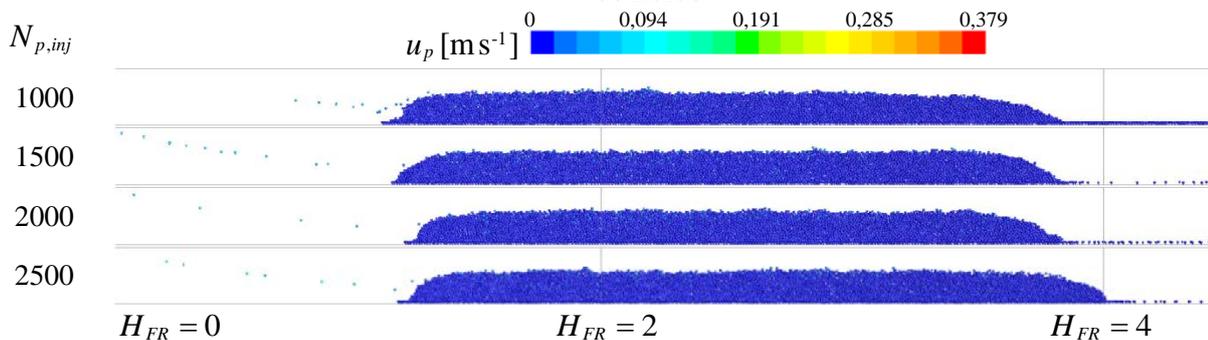


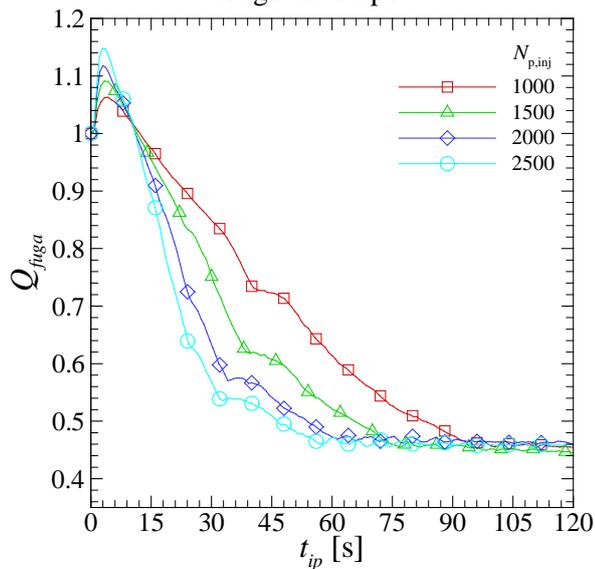
Tabela 3 - Características geométricas referentes ao leito de partículas em função de $N_{p,inj}$

$N_{p,inj}$	$h_{pct,i}$ [mm]	h_{pct} [mm]	$e\%,FR$ [%]	t_{est} [s]
1000	54	117	57	95
1500	54	122	57	77
2000	57	115	57	62
2500	56	124	57	57

A influência da concentração de partículas é verificada no tempo necessário para promover o preenchimento da fratura, t_{est} : utilizar uma concentração de partículas elevada colabora com a velocidade de preenchimento da fratura. Para as variações realizadas, observou-se uma melhora de, aproximadamente, 40 s entre as injeções de 1000 e 2500 partículas por segundo.

A partir do monitoramento da vazão de fuga Q_{fuga} , mostrado na Figura 7, é possível notar que existe um aumento inicial de Q_{fuga} , aqui chamado de *overshoot*. Esse fenômeno acontece devido à passagem de partículas pela entrada da fratura, mas não colaboram efetivamente com o preenchimento.

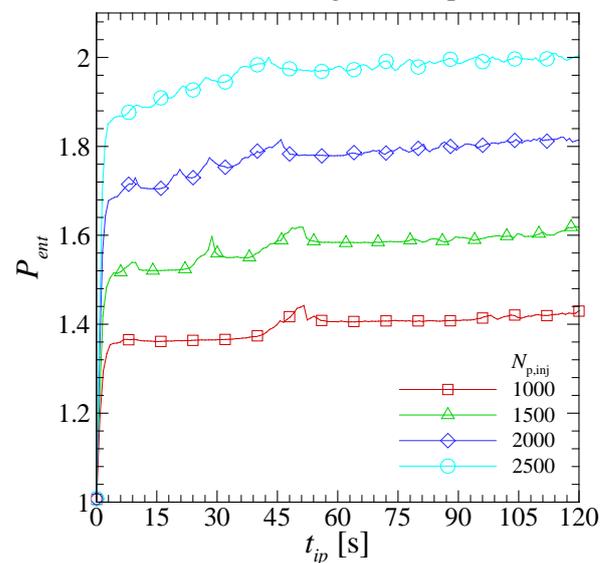
Figura 7 - Monitoramento da vazão de fuga ao longo do tempo



Uma vez que o leito de partículas começa a ser formado no interior da fratura, verifica-se uma subsequente redução da vazão de fuga. O processo continua, até que a vazão se estabilize, indicando o fim do processo de preenchimento.

A injeção de partículas no escoamento causa um aumento associado de pressão na entrada do canal, mostrado na Figura 8.

Figura 8 - Monitoramento da pressão na entrada do canal ao longo do tempo



Como esperado, quando a concentração de partículas é maior, o aumento de pressão observado na entrada do canal também é maior, devido à pressão associada à massa de partículas.

Tal aumento de pressão pode ser usado, ainda, para explicar a diferença observada no *overshoot* da Figura 7: o aumento de pressão causado pela injeção de partículas age no sentido de “expulsar” o fluido pela fratura. Dessa forma, aumentar a concentração de partículas no escoamento implica em aumentar o *overshoot* observado na Figura 7.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho a abordagem euleriana-lagrangiana para o estudo do escoamento

particulado aplicado para ao preenchimento de fratura em um canal fraturado foi aplicada.

O preenchimento da fratura foi analisado através da quantidade de partículas sendo injetadas no canal. Foram monitoradas a vazão de fuga devido à presença da fratura, a pressão na entrada do canal fraturado e as características geométricas do leito de partículas.

Verificou-se que a quantidade de partículas adicionadas ao escoamento não influencia nem a vazão de fuga no final do processo de preenchimento nem as características geométricas do leito de partículas formado no interior da fratura.

Por outro lado, aumentar a concentração de partículas no canal acelera o preenchimento da fratura, mas possui a desvantagem de elevar a pressão na entrada do canal.

\mathbf{p}	Vetor pressão	[Pa]
\mathbf{g}	Vetor aceleração da gravidade	[$m \cdot s^{-2}$]
\mathbf{F}	Vetor força	[N]
\mathbf{S}_{DPM}	Termo fonte	[N]
\mathbf{x}	Vetor posição	[m]
m	massa	[kg]
C	Coefficiente	[-]
k	Constante de rigidez	[$N \cdot m^{-1}$]
δ	Sobreposição	[m]
γ	Coefficiente de amortecimento	[-]
λ	Direção normal	[-]
η	Coefficiente de restituição	[-]
q	Vazão percentual	[%]
p	Pressão	[%]
ζ_{12}	Direção tangencial	[-]
μ_a	Coefficiente de atrito	[-]

NOMENCLATURA

$N_{p,inj}$	Quantidade de partículas por segundo	[s^{-1}]
Q_{fuga}	Vazão de fuga	[-]
P_{ent}	Pressão na entrada do canal	[-]
$h_{pct,i}$	Posição do início do leito	[m]
h	Comprimento	[m]
$e_{\%,FR}$	Preenchimento vertical	[%]
e_{FR}	Espessura da fratura	[m]
l	Comprimento	[m]
z_{FR}	Comprimento na direção z	[m]
U	Velocidade de entrada de fluido	[$m \cdot s^{-1}$]
Re	Número de Reynolds	[-]
μ	Viscosidade	[Pa · s]
ρ	Massa específica	[$kg \cdot m^{-3}$]
t	Tempo	[s]
ε	Fração volumétrica	[-]
\mathbf{u}	Vetor velocidade	[$m \cdot s^{-1}$]

Subscritos

pct	Leito de partículas
FR	Fratura
UP	Montante
DW	Jusante
CH	Canal
z_{FR}	
β	Fluido
i	Superfície de entrada
DPM	Acoplamento líquido-sólido
p	partícula
d	arrasto
gb	Gravidade e empuxo
pg	Gradiente de pressão
vm	Massa virtual
ls	Sustentação de Saffman
DEM	Colisão
n	normal
t	tangencial
12	Referente à partícula 1 e 2
col	colisão
$fuga$	Fuga
o	Saída

m mistura
est preenchimento

REFERÊNCIAS

BARBOSA, M. V. **Análise Paramétrica de Escoamento Particulado Aplicado ao Preenchimento de Fraturas**. 2015, 136p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**, v. 29, n. 1, p.47-65, 1979.

DE LAI, F. C. **Simulação numérica do escoamento particulado para o preenchimento de canal fraturado**. 2013, 201p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

GONDRET, P., LANCE, M., PETIT, L.. Bouncing motion of spherical particles in fluids. **Physics of Fluids**, v. 14, p. 643-652, 2002.

KENDOUSH, A. A., SULAYMON, A. H., MOHAMMEND, S. A. M. Experimental evaluation of the virtual mass of two solid spheres accelerating in fluids. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 31, p. 813-823, 2007.

LI, A.; AHMADI, G. Dispersion and Deposition of Spherical Particles from Point Sources in a Turbulent Channel Flow. **Aerosol Science and Technology**, v. 16, p. 209–226, 1992.

LOTH, E. **Particles, Drops and Bubbles**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

LUNDING, S. “Collisions & Contacts between two particles”. In: **Physics of dry granular media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

MORDANT, N., PINTON, J. F. Velocity measurement of a settling sphere. **The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems**, v. 18, n.2, p. 343-352, 2000.

MORSI, S.A.; ALEXANDER, A.J. An Investigation of Particle Trajectories in Two-Phase Flow Systems. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 55, n. 2, p. 193–208, 1972.

PATANKAR, N.A.; JOSEPH D.D. Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian–Lagrangian approach. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 27, n. 10, p. 1659-1684, 2001.

POPOFF, B., BRAUN, M. A Lagrangian Approach to Dense Particulate Flows. In: 6th International Conference on Multiphase Flow – ICMF 2007, Leipzig, Germany. **Proceedings...** Leipzig, Germany, 2007.

YEOH, G. H.; TU, J. **Computational Techniques for Multiphase Flows**. New York: Butterworth-Heinemann, 2010.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio do IRF/CENPES/PETROBRAS, ao programa PRH-ANP/MCT (PRH10-UTFPR) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).