



## COMPENSAÇÃO DE ATRASOS COM CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO UTILIZANDO OS TEMPOS MORTOS EFETIVOS POR SAÍDA

C. C. A, Soares<sup>1</sup>; M. A. F, Martins<sup>1</sup>; R. M, Fontes<sup>1</sup>; T. L. M, Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Química, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia; Salvador/Bahia; [ccas\\_araujo@hotmail.com](mailto:ccas_araujo@hotmail.com)

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia Elétrica, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia; Salvador/Bahia

**Resumo:** Este artigo apresenta a aplicação de uma técnica de compensação de atrasos, visando melhorar o condicionamento numérico de uma estratégia de controle preditivo (MPC), com garantia de factibilidade e estabilidade robusta. Em particular, a técnica usada neste trabalho exibe a compensação por efetividade dos atrasos, através do uso da matriz de tempos mortos efetivos na saída, o que permite a redução adequada do número de estados gerados pela presença dos atrasos. A aplicação da técnica é ilustrada através de simulações em um CSTR onde ocorre a reação de polimerização de estireno. Os resultados obtidos apontam para o êxito da técnica e incluem: a avaliação de desempenho das variáveis controladas, o esforço de controle e a análise do esforço computacional durante a resolução do problema de otimização.

**Palavras-Chave:** Tempos mortos, Controle Preditivo, Compensação de atrasos de transporte, Polimerização

## ON COMPENSATION OF MULTIPLE OUTPUT TIME-DELAYS FOR STABILIZING MODEL PREDICTIVE ROBUST CONTROL STRATEGIES

**Abstract:** This paper presents the application of a time-delay compensation technique, aiming at the improving of the numerical conditioning for a model predictive control (MPC) strategy, with guarantee of robust stability and feasibility. In particular, the technique used here focuses on the multiple output time-delay compensation by the effective dead time for output approach, which allows reducing properly the number of states of the state-space formulation. Simulations illustrate the effectiveness of the technique in a CSTR system where a styrene polymerization reaction takes place. The obtained results demonstrate favorably the utility of the technique, including the following analysis: behavior of controlled outputs through performance indexes; and computational effort involved to solve the control optimization problems.

**Keywords:** Time-delays, closed-loop stability, model predictive control, polymerization.



## 1. INTRODUÇÃO

Estratégias de controle MPC são capazes de compensar os tempos mortos envolvidos entre as variáveis de processos naturalmente, uma vez que as ações de controle são avaliadas a partir de um problema de otimização de janela móvel, no qual utiliza previsões provenientes de um modelo do processo [1]. Outro aspecto a ser destacado é que, para controladores MPC baseados em modelos do tipo espaço de estados, a incorporação dos atrasos interferem no aumento do esforço computacional, uma vez que o número de estados cresce linearmente com a dimensão dos tempos mortos, podendo assim ocasionar problemas de condicionamento numérico [2].

Neste cenário, a técnica de compensação de atrasos efetivos por saída mostrada em [2], fornece uma melhoria no condicionamento numérico, sendo vantajosas para controladores baseados em lei de controle ótima, tal qual MPC. No entanto, até onde o conhecimento dos autores é verificado, sabe-se que esta técnica de compensação de atrasos teve sua utilização dirigida à síntese de controladores MPC robustamente estáveis baseada na abordagem por conjuntos invariantes terminais [2]. Esta formulação de controladores preditivos apresenta dificuldades quanto à factibilidade para encontrar os parâmetros do conjunto invariante, principalmente em casos que os sistemas possuem dimensões medianas a elevadas, como nos processos químicos industriais e na presença de tempos mortos elevados.

Em virtude dos fatos mencionados, este trabalho foca em uma estratégia de controle preditivo na qual a estabilidade é garantida através da abordagem de restrições terminais, cuja factibilidade associada é atingida através da inclusão apropriada de variáveis de folga, ampliando o domínio de atração do controlador. Frente ao exposto, este trabalho busca realizar a compensação de tempos mortos pela técnica de efetividade nas saídas apresentada em [2], inserida em uma estratégia de controle preditivo (RIH MPC) com garantia de factibilidade e estabilidade robusta em malha fechada, possibilitando adequadamente a redução do número de estados, gerados pela presença dos atrasos, e proporcionando melhor condicionamento numérico para implementação de seu problema de otimização associado.

## 2. METODOLOGIA

Para este trabalho o modelo fenomenológico não linear considerado para o reator de estireno é o mesmo mostrado em [3], representado pelo sistema de equações diferenciais descrito pela Equação (1). Os detalhes acerca dos parâmetros e condições operacionais do processo podem também ser consultados em [3].

Para este sistema, a estratégia de controle preditivo com estabilidade garantida, na qual será inserida a técnica de compensação de atrasos, é apresentada para o caso robusto, tomando como base a abordagem multiplanta [4]. A fim de caracterizar esta abordagem, um conjunto  $\Omega = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L$  de possíveis modelos lineares, com as mesmas dimensões, foi definido por linearização em torno dos diferentes pontos operacionais em estado estacionário do modelo do reator de estireno indicados na Tabela 1, resultando nas funções de transferência apresentadas pelas Equações (2), (3) e (4).



$$\begin{cases} \frac{d[I]}{dt} = \frac{(Q_i[I_f]) - (Q_t[I_F])}{V} - k_d[I] \\ \frac{d[M]}{dt} = \frac{(Q_m[M_f]) - (Q_t[I_M])}{V} - k_p[M][P] \\ \frac{dT}{dt} = \frac{Q_t(T_f - T)}{V} + \frac{(-\Delta H_r)}{\rho C_p} k_p[M][P] - \frac{hA}{\rho C_p V} (T - T_c) \\ \frac{dT_c}{dt} = \frac{Q_c(T_{cf} - T_c)}{V_c} + \frac{hA}{\rho C_{pc} V_c} (T - T_c) \end{cases} \quad (1)$$

em que,  $[P] = \left[ \frac{2f_i k_d [I]}{k_t} \right]^{0,5}$ ,  $Q_t = Q_i + Q_s + Q_m$  e  $k_j = A_j \exp\left(\frac{-E_j}{T}\right)$ , para  $j = d, p, t$

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-66.69e^{-28s}}{(5.3474s + 1)(2.5274s + 1)} & \frac{5.9425e^{-6s}}{(7.6525s + 1)(3.091s + 1)(2.7063s + 1)} \\ \frac{144.7925e^{-7s}}{(6.7599s + 1)(1.5797s + 1)} & \frac{-47.5589e^{-31s}}{(7.6173s + 1)(2.3968s + 1)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-61.505e^{-26s}}{(5.9946s + 1)(2.3723s + 1)} & \frac{6.9783e^{-7s}}{(8.4587s + 1)(2.9801s + 1)(2.9801s + 1)} \\ \frac{166.6494e^{-8s}}{(7.542s + 1)(1.501s + 1)} & \frac{-59.0134e^{-28s}}{(8.4433s + 1)(2.5133s + 1)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$G_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{-90.853e^{-38s}}{(6.6137s + 1)(3.3297s + 1)} & \frac{4.2497e^{-6s}}{(7.6525s + 1)(3.091s + 1)(2.7063s + 1)} \\ \frac{116.4704e^{-7s}}{(5.6145s + 1)(1.5327s + 1)} & \frac{-29.325e^{-41s}}{(6.1047s + 1)(2.152s + 1)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que, cada modelo  $\theta_n$  com  $n = 1, 2, 3$ , corresponde a uma planta particular, com representação equivalente em espaço de estados conforme o proposto em [5]. Neste trabalho, o modelo mais provável para a planta real foi denotado por  $G_1(s)$ .

As variáveis controladas para este sistema são: a viscosidade,  $y_1 = \eta$  (L.g<sup>-1</sup>) e a temperatura do reator,  $y_2 = T$  (K); e as manipuladas são: vazão de iniciador  $u_1 = Q_i$  (L.h<sup>-1</sup>) e a vazão de fluido refrigerante para a camisa  $u_2 = Q_c$  (L.h<sup>-1</sup>). Os parâmetros envolvidos e as condições operacionais no estado estacionário para o reator de polimerização de estireno são:  $Q_i = 108,00$  (L.h<sup>-1</sup>);  $Q_c = 471,60$  (L.h<sup>-1</sup>);  $V = 3000,00$  (L);  $V_c = 3312,40$  (L);  $T = 323,60$  (K) e  $\eta = 3,89$  (L.g<sup>-1</sup>).

Os tempos mortos ( $d_{i,j}$ ) exibidos entre as entradas e saídas foram calculados e adicionados no modelo do reator de estireno de acordo com a seguinte relação  $d_{i,j} = v/F$  mostrados em [6], em que  $v$  pode indicar tanto o volume do reator ( $V$ ) quando o referencial é o reator, quanto o volume da camisa ( $V_c$ ) quando o referencial é modificado para a camisa do reator. Da mesma forma  $F$  indica a vazão de iniciador ( $Q_i$ ) quando o referencial é o reator ou pode também representar a vazão de fluido refrigerante para a camisa do reator ( $Q_c$ ), analogamente ao realizado para o caso do volume.

O atraso efetivo por saída, gênese da técnica de compensação de tempos mortos proposta neste trabalho, é dado pela relação entre o menor tempo morto



existente entre a ação de controle e cada uma das saídas individualmente e é obtido pela expressão:  $d_i = \min_j [d_{i,j}] = \min_j d_{ii}, \forall i, j$ . Após a compensação dos tempos mortos, as novas funções de transferência  $G'_1(s)$ ,  $G'_2(s)$  e  $G'_3(s)$  são representadas pelas expressões seguintes (5) à (7).

$$G'_1(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-66.69e^{-22s}}{(5.3474s+1)(2.5274s+1)} \\ \frac{144.7925}{(6.7599s+1)(1.5797s+1)} \end{array} \quad \frac{\frac{5.9425}{(7.6525s+1)(3.091s+1)(2.7063s+1)}}{\frac{-47.5589e^{-24s}}{(7.6173s+1)(2.3968s+1)}} \right], \quad (5)$$

$$G'_2(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-61.505e^{-19s}}{(5.9946s+1)(2.3723s+1)} \\ \frac{166.6494}{(7.542s+1)(1.501s+1)} \end{array} \quad \frac{\frac{6.9783}{(8.4587s+1)(2.9801s+1)(2.9801s+1)}}{\frac{-59.0134e^{-20s}}{(8.4433s+1)(2.5133s+1)}} \right], \quad (6)$$

$$G'_3(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{-90.853e^{-32s}}{(6.6137s+1)(3.3297s+1)} \\ \frac{116.4704}{(5.6145s+1)(1.5327s+1)} \end{array} \quad \frac{\frac{4.2497}{(7.6525s+1)(3.091s+1)(2.7063s+1)}}{\frac{-29.325e^{-34s}}{(6.1047s+1)(2.152s+1)}} \right]. \quad (7)$$

Esta nova representação de  $G'_1(s)$ ,  $G'_2(s)$  e  $G'_3(s)$  possibilita uma redução no número de estados, que também tem uma representação equivalente em espaço de estados, as quais serão implementadas no controlador.

Por fim, a função custo associada a cada modelo  $\theta_n$  é convenientemente representada por:

$$V_{1,k}[\Delta u_k, \delta_k(\theta), \theta] = [\Delta u_k^T \ \delta_k^T(\theta)] H(\theta) \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta) \end{bmatrix} + 2cf^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta) \end{bmatrix} + c(\theta), \quad (8)$$

e a lei de controle implementada no RIHMPC pode ser estabelecida através da resolução do problema de otimização P1 de maneira análoga ao mostrado em [5].

### Problema P1

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u_k, \delta_{y,k}(\theta_n)} V_{1,k}(\theta_n) \\ = \sum_{j=0}^{m+p} \|y_n(k+j|k) - y_{sp}(\theta_n) - \delta_{y,k}\|_{Q_y}^2 \\ + \|\Psi_n^{st} F_n^{st} x_n^{st}(k+m+p|k)\|_{\bar{Q}}^2(\theta_n) \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta u(k+j|k)\|_R^2 + \|\delta_{y,k}(\theta_n)\|_{S_y}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

sujeito a:

$$x^s(k+m+p|k) - y_{sp} - \delta_{y,k}(\theta_n) = 0, \quad n = 1, 2, 3$$

$$\Delta u(k+j|k) \in \mathbb{U}, j = 0, \dots, m-1$$



$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max} \\ \Delta u(k+j|k) = 0, \forall j \geq m \\ u_{\min} \leq u(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta u(k+i|k) \leq u_{\max} \end{array} \right\}$$

$$V_{1,k}(\theta_n) \leq \widetilde{V}_{1,k}(\theta_n), \quad n = 1, 2, 3.$$

Tabela 1. Estados estacionários dos modelos.

Variáveis	Estado estacionário de $G_1(s)$	Estado estacionário de $G_2(s)$	Estado estacionário de $G_3(s)$
$y_1/(L/g)$	3,89	3,66	4,61
$y_2/(K)$	323,60	324,33	321,99
$u_1/(L/h)$	108,00	118,80	81,00
$u_2/(L/h)$	471,60	448,02	541,82

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações foram executadas em um processador de 7ª geração Intel Core i7-7500U, com memória RAM de 8GB e com sistema operacional Windows 10, usando o MATLAB®2016b. Os cenários de simulação exibidos incluíram a desassociação entre a planta e o modelo utilizado pelo controlador, e a comparação do sistema com a aplicação da técnica de compensação do atraso e sem a aplicação desta.

As restrições para as variáveis manipuladas são:  $u_{\max} = [216,0 \quad 943,2]$ ;  $u_{\min} = [0 \quad 0]$ ;  $\Delta u_{\max} = [54,0 \quad 235,8]$ ; A simulação é iniciada em  $t = 0h$  nas condições iniciais:  $y_0 = [3,89 \quad 326,60]$  em  $t = 10h$ , o  $y_{sp}$  é modificado para  $y_{sp} = [3,66 \quad 324,33]$ , em  $t = 200h$ , o  $y_{sp}$  é alterado novamente para  $y_{sp} = [4,61 \quad 321,99]$  e finalmente em  $t = 450h$  o set-point é reconfigurado para as condições iniciais. Os parâmetros de sintonia considerados são:  $m = 5$ ;  $Q_y = \text{diag}(10 \quad 1)$ ;  $R = \text{diag}(50 \quad 5)$ ;  $S_y = \text{diag}(10^4 \quad 10^4)$ . O filtro de Kalman foi utilizado durante as simulações para corrigir os estados da planta antes de realimentá-los ao RIHMPC.

A Figura 1 ilustra os cenários simulados e nesta pode-se notar que o comportamento do sistema exibe uma leve melhora no desempenho das variáveis  $y_1$  e  $y_2$  quando a técnica de compensação é aplicada. Além disso, a redução do número de estados após a compensação do atraso, que está indicada na

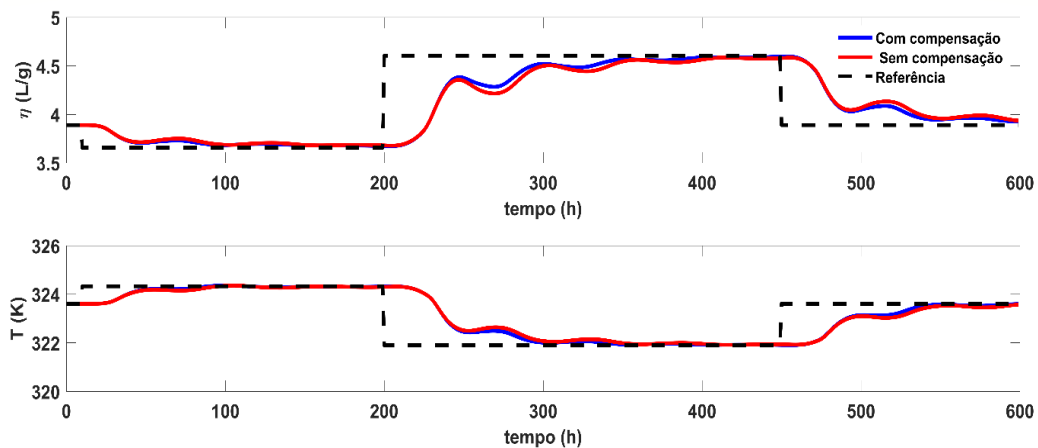
Tabela 2, mostra que o sistema com compensação mesmo sem uma expressiva melhora de desempenho consegue manter as características de estabilidade neste cenário que planta e modelo estão desassociados. Da mesma forma, os indicadores de desempenho do RIHMPC, o ISE e o IDMV (índice de desempenho das variáveis manipuladas), indicam favoravelmente a utilização da





técnica, fato que é evidenciado pelas respectivas variações percentuais nos valores dos índices que podem ser observados na Tabela 3.

Figura 1 Comportamento das variáveis de processo



Na Figura 2 observa-se que o sinal de controle tem comportamento similar em ambos cenários de simulação, o que também é evidenciado pela tênue elevação do IDMV quando a técnica de compensação é implementada.

Figura 2. Comportamento das variáveis manipuladas

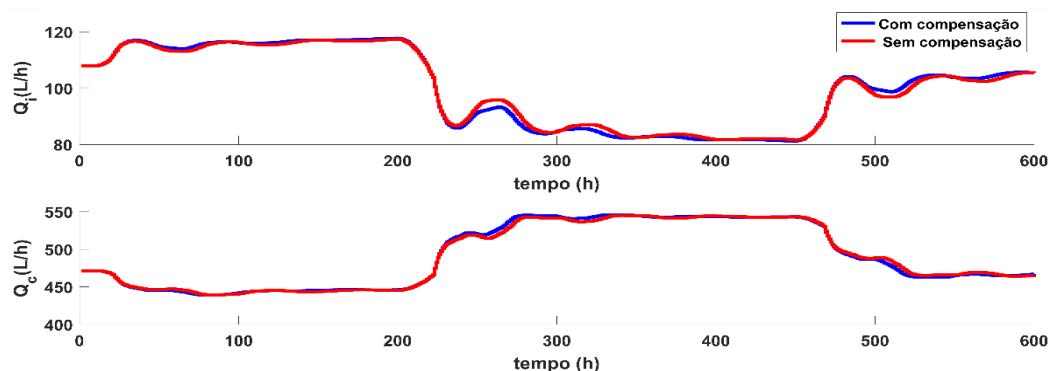


Tabela 2. Redução do número de estados.

Modelo	$d_p$	Nº de estados com compensação	Nº de estados sem compensação	Compensação (%)
$G_1(s)$	31	48	62	22,58
$G_2(s)$	28	40	56	28.57
$G_3(s)$	41	68	82	17,07

O condicionamento numérico do Problema P1 para os dois algoritmos de busca utilizados pelo otimizador, o método de conjuntos ativos ( $A_1$ ) e o de ponto interior ( $A_2$ ), em ambos cenários de simulação, é exibido pela



Tabela 4. Nesta mesma tabela também são apresentadas as faixas para a média de iterações ( $\bar{n}_{iter}$ ), a média de avaliações da função objetivo ( $\bar{n}_{fobj}$ ), a média do tempo computacional para calcular as ações de controle ( $\bar{n}_t$ ), o máximo valor de iterações ( $máx_{iter}$ ), o máximo valor de avaliações da função objetivo ( $máx_{fobj}$ ) e o máximo tempo de cálculo para as ações de controle ( $máx_t$ ). De acordo com os dados exibidos nesta tabela observa-se em uma primeira análise que com o algoritmo A<sub>1</sub>, nos cenários com compensação e sem compensação, a implementação da técnica de compensação é favorecida, pois as faixas reservadas à  $\bar{n}_{iter}$  e a  $\bar{n}_{fobj}$  são menores do que as indicadas para o cenário sem compensação. Já em uma segunda análise, para o algoritmo A<sub>2</sub>, esta última afirmação parece entrar em confronto, pois ocorre o inverso do que foi dito para o A<sub>1</sub> nas faixas de  $\bar{n}_{iter}$  e a  $\bar{n}_{fobj}$  para o cenário com compensação.

Contudo, ao analisar o  $\bar{n}_t$ , nos mesmos cenários e com ambos algoritmos, verifica-se que este teve seu valor diminuído quando a técnica de compensação foi implementada. Isto indica maior agilidade na solução do problema P1 e a consequente redução do esforço computacional, em especial, o A<sub>1</sub> soluciona o problema P1 cerca de 48,25% mais rápido que o A<sub>2</sub>, este aspecto pode influenciar diretamente sistemas com dimensões elevadas, já que estes ao empregar esta técnica de compensação poderão ser resolvidos com maior rapidez. Em uma última análise cabe ressaltar que apesar do A<sub>2</sub> apresentar um valor maior para o  $máx_t$  no cenário com compensação, a implementação da técnica de compensação ainda é considerada efetiva. Pois, o que este valor traduz para o sistema avaliado é que em algum instante durante a simulação com o A<sub>2</sub> houve a necessidade de mais iterações e mais avaliações da função objetivo do que com o A<sub>1</sub>, fato refletido pelos valores indicados pelo  $máx_{iter}$  e pelo  $máx_{fobj}$  encontrados pelo A<sub>2</sub>.

Tabela 3. Desempenho do RIHMPC nos cenários simulados.

Indicadores		A <sub>1</sub>		A <sub>2</sub>	
de desempenho		$y_1$ (L/g)	$y_2$ (K)	$y_1$ (L/g)	$y_2$ (K)
ISE	Com compensação	24,52	165,46	43,78	307,27
	Sem compensação	27,69	177,45	46,71	319,58
	Redução obtida (%)	11,45	6,76	6,27	3,85
IDMV	Com compensação	178,38	1110	95,51	559,51
	Sem compensação	171,57	1090	92,00	549,49
	Aumento obtido (%)	3,82	1,80	3,68	1,79

Tabela 4 Compensação do atraso *versus* condicionamento numérico.

Algoritmo numérico		$\bar{n}_{iter}$	$máx_{iter}$	$\bar{n}_{fobj}$	$máx_{fobj}$	$\bar{n}_t$ (s)	$máx_t$ (s)
A <sub>1</sub>	Com compensação	[20, 21]	47	[387, 388]	868	0,55	2,20
	Sem compensação	[22, 23]	47	[419, 420]	846	0,87	2,72
A <sub>2</sub>	Com compensação	[39, 40]	54	[791, 792]	1016	1,14	7,22
	Sem compensação	[38, 39]	54	[782, 783]	1016	1,48	3,70

#### 4. CONCLUSÃO

A aplicação da técnica de compensação de atrasos acoplada a um RIHMPC, em um CSTR onde ocorre a reação de polimerização de estireno, mostrou-se eficiente na redução do número de estados gerados pela presença do atraso. Além disso, para os cenários em que a compensação do atraso foi realizada a técnica apontou mais rapidez na resolução do problema de otimização e indicou redução do esforço computacional do que em cenários em que não houve compensação. Finalmente, quando a técnica de compensação de atraso foi associada ao algoritmo de conjuntos ativos para o sistema estudado houve, uma melhoria significativa do condicionamento numérico com redução do custo numérico e do esforço computacional na solução do problema de otimização.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESB (Termo de Outorga de Bolsa Nº: BOL0094/2017) e à CAPES pelo apoio financeiro necessário à realização deste trabalho.

#### 5. REFERÊNCIAS

- <sup>1</sup> E. F. Camacho and C. Bordons, **Model Predictive control**. London: Springer London, 2007.
- <sup>2</sup> T. L. M. Santos, “**Contribuições para o controle preditivo com compensação de atraso robusta**,” Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, 2011, 2011.
- <sup>3</sup> A. L. T. Alvarez and D. Odloak, “**Optimization and control of a continuous polymerization reactor**,” *Brazilian J. Chem. Eng.*, vol. 29, no. 4, pp. 807–820, 2012.
- <sup>4</sup> T. A. Badgwell, “**Robust model predictive control of stable linear systems**,” *Int. J. Control*, vol. 68, no. 4, pp. 797–818, 1997.
- <sup>5</sup> M. A. F. Martins and D. Odloak, “**A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes**,” *Automatica*, vol. 67, pp. 132–143, 2016.
- <sup>6</sup> J. E. Normey-Rico, **Control of Dead-Time Processes** (J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho; 2007), vol. 28, no. 5. 2008.