

## MORFOLOGIA ESTRUTURAL CAE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS "FEM": UM ESTUDO DE CASO FOCADO NA ANALISE DE IMPACTO

Evandro Secchi de Oliveira<sup>1</sup> e Roderley Camargo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UNISAL Centro Universitário Salesiano de São Paulo

<sup>1</sup>Bosal do Brasil Ltda

<sup>2</sup>Robert Bosch Ltda

E-mails: [evandro.oliveira@bosal.com.br](mailto:evandro.oliveira@bosal.com.br), [roderley.camargo@br.bosch.com](mailto:roderley.camargo@br.bosch.com)

### RESUMO

O Sistema de exaustão automotivo, está constantemente sofrendo solicitações, oriundas da vibração, ocasionada pelo motor e pelo chassi do veículo. Por este motivo, é imprescindível desenvolver um método matemático, que simule as condições físicas deste produto, para que seja possível prever na fase de projeto, todos as reações presentes no escapamento. Neste sentido, apresenta-se neste trabalho, um estudo de análise modal, contemplando as frequências naturais, para cada suporte de fixação do escapamento. O modelo matemático CAD (*Computer Aided Design*) foi desenvolvido em ambiente CREO enquanto a análise CAE (*Computer Aided Engineering*) foi feita no ambiente ABAQUS, e utilizando o método dos elementos finitos. A análise CAE foi desenvolvida e otimizada por intermédio dos aplicativos *Hypermesh* e *Hyperview* respectivamente. O uso deste método, possibilitou verificar a ocorrência da frequência crítica de excitação, menor que 200 Hz. Caso ocorra, há que se retrabalhar o componente, para que o mesmo esteja fora da faixa determinada como critério de falha. Finaliza este trabalho apresentando algumas perspectivas futuras, fazendo referência ao método de correlação “*hammer impact*”.

### INTRODUÇÃO

O Sistema de exaustão utilizado nos veículos ciclo OTTO, tem por finalidade atenuar os ruídos oriundos do motor, diminuir os gases nocivos a saúde por meio de um catalisador, e arrefecer os gases antes da liberação para a atmosfera. Este conjunto é localizado na parte inferior do veículo e interligado ao motor, com isto, todo o conjunto está sujeito as vibrações ocasionados pelo movimento do motor, e pelo chassi do veículo, quando o mesmo está em movimento.

Assim, a partir da simulação das condições de contorno, definidas como representativas da vida operacional do conjunto do escapamento, e de posse do modelo matemático tridimensional CAD, utilizou-se a técnica dos elementos finitos como forma de prever o comportamento elástico deste produto. Realizou-se estudos empíricos nos veículos por parte das montadoras, em que foi determinado e documentado em normas, a frequência natural mínima aceitável para que os componentes do veículo, não entrem em um estado de ressonância ou próximo a ressonância onde ocorrerá a falha. Para este estudo, foi utilizado um sistema de exaustão de um carro compacto, cuja motorização foi de 4 cilindros 1.0 litro e o

critério de falha utilizado foi a máxima frequência de 200 Hz, no primeiro modo de vibração. Os componentes analisados foram os *hangers* (ganchos), que são responsáveis pela fixação do escapamento no chassi veicular. Neste método, a prerrogativa é obter o primeiro modo de vibração maior que 200 Hz. Nos dados de entrada do software, foi levado em consideração a especificação do material do *hanger*, dos tubos onde os mesmos são soldados e as especificações das soldas.

Com o software *Hypermesh*, foram criadas as malhas e as condições de contorno, posteriormente, foram inseridas todas as informações dos materiais como: espessura, módulo de elasticidade, densidade e coeficiente de Poisson. Para rodar a simulação e obter os desejados modos de vibração, foram utilizados os algoritmos internos do solver *Abaqus*. No final, utilizou-se o software *Hyperview* para analisar os dados de saída do *Abaqus* e gerar os relatórios correlatos.

Estes relatórios serão de extrema importância, para a estratégia de projeto, por parte do engenheiro do produto, pois visto isto, o mesmo poderá verificar o projeto ainda na fase de pré-desenvolvimento do produto, conseguindo poupar tempo no que diz respeito a construção de protótipos, e testes físicos, evitando ou minimizando futuros retrabalhos de projeto [1]. Também poderá ser levado em conta a manufatura enxuta, conseguindo construir um produto com um mínimo de material, sendo reforçado apenas nas áreas que necessitam de robustez estrutural.

## 1. INFORMAÇÕES GERAIS

Para se desenvolver produtos inovadores e bem-sucedidos no atual cenário global e competitivo, há que se ter recursos de informática científica e fazer uso de simulação. Neste senso, para que a empresa sobreviva neste ambiente de competição, a simulação deve fazer parte do projeto, já na fase inicial do processo de desenvolvimento do produto [2] e [3]. A capacidade de se analisar as características multi-corpos do desempenho físico de um projeto, antes de criar um primeiro protótipo, pode aumentar de forma significativa a produtividade. As empresas precisam de ferramentas de simulações robustas, o suficiente para superar com eficácia, as demandas de prazo, custo e qualidade final do produto [4].

A análise integrada aos programas de CAD, estão transformando o método dos elementos finitos em uma ferramenta onipresente, e seu uso será cada vez mais similar ao de um motor de um automóvel: todos poderão usá-lo apenas com um entendimento básico de seu funcionamento [5]. Poucos dos usuários realmente precisarão entender o método, para extrair dele um melhor desempenho e confiabilidade.

A tecnologia de simulação permite a utilização de modelagem matemática, baseada em computador, para aproximar e simular os fenômenos complexos do universo físico, tendo como dados de entrada, o modelo CAD 3D [6]. De posse do modelo matemático CAD, enviado pela montadora, inicia-se o processo de construção da malha de elementos finitos, em que é possível indicar para cada parte da geometria CAD, o tipo de elemento e tamanho adequado para cada região desta geometria. Este processo é o início da formulação CAE via método dos elementos finitos. Depois de inseridas todas estas informações, é analisado a resposta gerada pelo solver, validando ou reprovando o *design* atual.

As conclusões e desdobramentos deste trabalho, estão destacados em detalhes no tópico estudo de caso.

### 1.1. METODOLOGIA

A metodologia utilizada foi a aplicação da técnica FEA (*Finite Element Analyze*) e verificando os modos de vibração de cada componente, antes da construção do protótipo. O espectro da análise e síntese do modelo matemático 3D, foi obtido utilizando softwares próprios para geração de malhas, relatórios e cálculos. O *Hypermesh* foi utilizado para a geração da malha, que utiliza como base, a geometria gerada em formato neutro de dados “.stp”. Desta forma, permite inserir toda a informação de material e condição de contorno, no padrão em que o software ABAQUS utiliza para o cálculo. Então, três etapas complementam este método: Input, Solver e Output [7].

Na fase de Input, são considerados os seguintes requisitos: Geometria, Material, Restrições, Propriedades físicas e Elementos.

Na fase de Solver, o software utiliza um algoritmo interno para a convergência dos cálculos, conforme a quantidade de iterações mínima e máxima atribuídas.

Na fase de Output, será considerado como resultado, o deslocamento e os modos de vibrações. Neste momento, a intenção é convalidar estes resultados conforme o requisito da montadora, especificamente mantendo o primeiro modo de vibração do componente, acima da faixa de 200 Hz.

A Figura 1 ilustra as macros etapas da análise FEA: Input, Solver e Output.

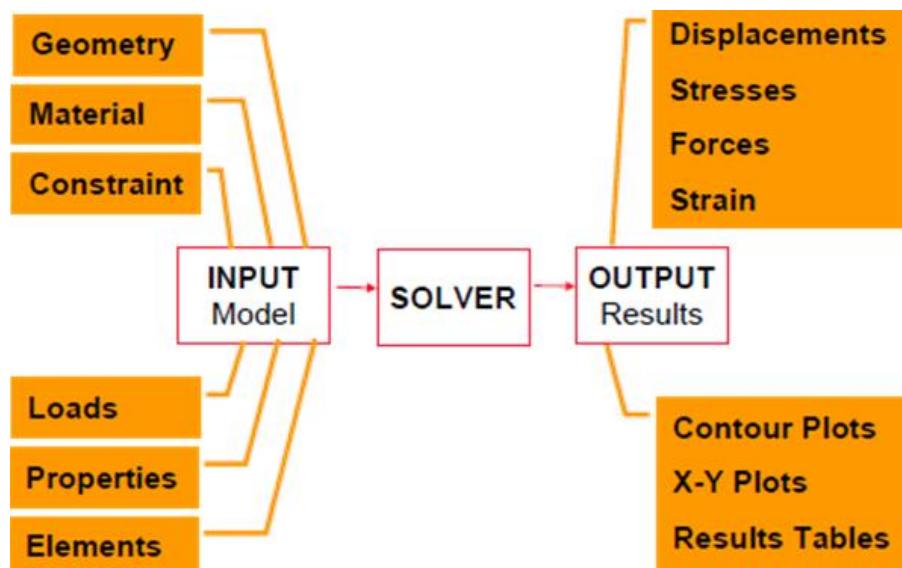


Figura 1 – Macro etapas da análise FEA [7]

Quanto ao delineamento, a metodologia assume uma abordagem orientada ao estudo de caso, em que será demonstrado via projeto de simulação virtual, e refazendo o projeto conforme o output da simulação virtual.

## 1.2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A vibração é um fenômeno estudado pelas civilizações a mais de 3000a.c. anos. No passado, a humanidade se preocupava com este fenômeno apenas para a construção de instrumentos musicais. Porém, com o passar do tempo, estudos foram mostrando que o fenômeno de vibração, sempre esteve presente na vida dos seres humanos.

Cita-se como exemplo, a capacidade que temos de poder sentir as ondas sonoras, e ao mesmo tempo, ouvir estas mesmas ondas vibrando no tímpano. A respiração está associada com a vibração dos pulmões e o andar envolve o movimento oscilatório das pernas e das mãos. Porém, o fenômeno de vibrações na engenharia, está sempre associado com o desconforto gerado por ruídos, ou perda de eficiência de uma máquina, ocasionada por desbalanceamento ou desgastes de componentes [8]. Também vale a pena ressaltar, o problema de engenharia causado por ressonância, onde uma vibração externa pode entrar na mesma frequência que a máquina ou estrutura, ocasionando o colapso da mesma.

Os primeiros esforços dos cientistas para resolverem os problemas de vibrações, foram o de criar um modelo matemático, que descrevesse as vibrações físicas e a determinação das frequências naturais. Um dos métodos mais comuns utilizados para a determinação das frequências naturais é o método de Jacobi, que é um método iterativo e produz todos os autovalores e auto vetores simultaneamente [8].

Este método é baseado em um teorema da álgebra linear, que afirma que uma matriz simétrica real [D], tem somente autovalores reais, e que existe uma matriz ortogonal real [R] tal que  $[R]^T [D] [R]$  seja diagonal. Os elementos da diagonal são os autovalores, e as colunas da matriz [R] são os auto vetores. De acordo com o método de Jacobi, a matriz [R] é gerada como um produto de várias matrizes de rotação, da forma onde todos os elementos, exceto os que aparecem nas colunas e linhas i e j, são idênticos aos da matriz identidade [I]. Se as entradas de seno e co-seno aparecerem nas posições (i,i), (i,j), (j,i), e (j,j), então, os elementos correspondentes de  $[R_1]^T [D] [R_1]$  podem ser calculados da seguinte maneira:

$$d_{ij} = d_{ii} \operatorname{sen}^2 \theta - d_{ij} \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta + d_{jj} \operatorname{cos}^2 \theta \quad (1)$$

Se escolhemos “ $\theta$ ” como:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \left( \frac{2d_{ij}}{d_{ii} - d_{jj}} \right) d_{ij} \quad (2)$$

Então, resultará que:

$$d_{ij} = d_{ji} = 0 \quad (3)$$

Assim, cada etapa do elemento de Jacobi, reduz um par de elementos fora da diagonal, a zero.

O método dos elementos finitos consiste em discretizar a geometria que se deseja estudar, criando elementos cujas dimensões e formatos são conhecidos por todo o volume ocupado por

esta geometria [9]. Estes elementos estarão interligados entre si, por meio de nós e referenciados por um sistema de coordenada global. Cada nó é identificado e é inserido em uma matriz, por meio da sua coordenada. Por isto, quanto menor for o elemento, serão necessários mais elementos para preencher todo o volume da geometria em estudo, e por consequência, serão criados mais nós aumentando também o tamanho da matriz.

Com isto, é possível aumentar a precisão do resultado obtido, até chegar a um determinado número de elementos, que não influenciará no resultado. Este procedimento tem o inconveniente de ocupar muito tempo de cálculo do computador. Então, é preciso levar em conta o tamanho do elemento ideal, para obter um resultado coerente, assim como, obter o menor tempo de cálculo possível, em função do número de nós.

O software irá interpretar cada um destes nós e criar uma outra matriz de rigidez, com as informações do material, para inserir a rigidez em cada nó, criando assim, a matriz de propriedades da geometria. Com estas informações, o *solver* começa a criar uma “perturbação inicial” na geometria em estudo, até que a mesma comece a deslocar os nós a uma determinada frequência, criando o primeiro modo de vibração. O software continua a perturbar os nós da geometria, aumentando a frequência até que os nós comecem a se movimentar de uma outra forma, indicando o segundo modo de vibração. O software vai aumentando a frequência até atingir todos os modos de vibração indicados previamente para a análise modal [10].

## 2. ARQUITETURA BÁSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A confiabilidade dos resultados, obtidos a partir do uso da metodologia FEA, se comparada aos diversos outros métodos empregados nos dias de hoje, se resume na facilidade de interface com o software de análise. O programa de elementos finitos busca na simplificação de operação, uma maneira de adequar os recursos de equações matemáticas e orientá-las ao objeto de análise [11].

Assim, três etapas contemplam uma programação via FEA, como forma de orientação a lógica computacional, quais sejam [11]:

**INPUT → PREPROCESSING → SOLVER**

A fase de *Input* contempla os dados do material e os requisitos do projeto, quais sejam: Geometria, Material, Forças, Restrições e Tipos de elementos. Nesta fase, é de suma importância a representação gráfica da geometria do modelo CAD, com os principais detalhes construtivos, envolvendo a fabricação, montagem e o projeto de fato. Também é importante a entrada dos dados do material a ser utilizado na análise. Faz parte deste tópico: Módulo de elasticidade, Coeficiente de Poisson e Densidade do material. Além disso, a leitura das condições de contorno, podem ser feitas nesta fase, assim como as condições de carregamento também são introduzidas nesta etapa.

A fase do *PREPROCESSING* diz respeito a preparação da malha e dos elementos, necessários para discretizar o modelo matemático e iniciar os cálculos. Nesta fase, também é organizado toda as propriedades dos componentes, indicando se este foi construído originalmente em forma de chapa, sólido maciço ou sólido de geometria variada. Também é indicado os

parâmetros em que o *solver* irá trabalhar, como por exemplo, a quantidade de modos de vibração máxima a serem encontradas, quantidade de incrementos, acuracidade de cálculo e tolerância interna de banda.

Na fase de *solver*, é utilizado o algoritmo interno do ABAQUS para a solução do sistema, e tem-se então, o resultado da análise estrutural em diversos formatos de saída, de acordo com o critério de falha, determinado no escopo da análise. São exemplos de saída de resultados: Tensões, Deformações, Deslocamentos, Gráficos, Diagramas, Temperaturas, Pressões entre outros.

A Figura 2 ilustra o fluxograma da arquitetura do método FEA para este caso de estudo.

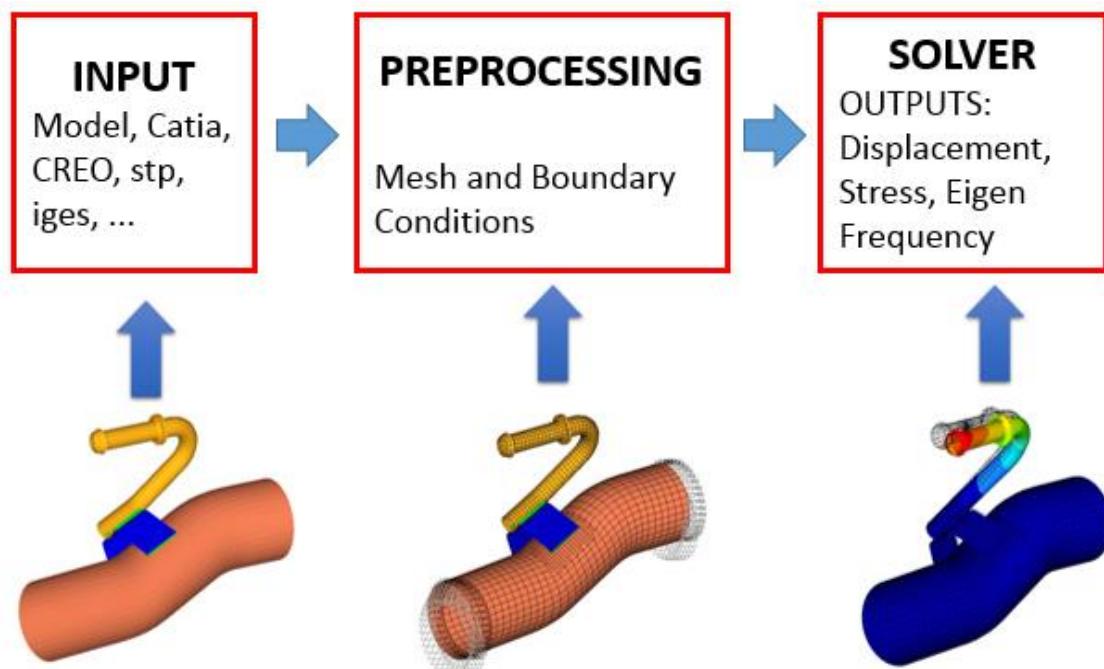


Figura 2 – Arquitetura computacional do método FEA [11]

A saída gráfica dos resultados, incluindo os aspectos de simulação, dão ao engenheiro analista, a noção exata do que está ocorrendo em termos de realidade aumentada, e convergindo para uma solução computacional robusta, no que se refere as condições de entrada [12].

## 2.1. DEFINIÇÃO DA TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS

É uma técnica matemática que consiste em discretizar uma estrutura, - modelo matemático tridimensional - em elementos paramétricos ou isoparamétricos conhecidos e conectados por “nós”. As propriedades dos Materiais e Elementos são especificadas a fim de representarem as propriedades físicas do modelo.

A Figura 6 ilustra a concepção da técnica FEA, evidenciando os Nós, os Elementos e a Estrutura, que será encapsulada ao método [6].

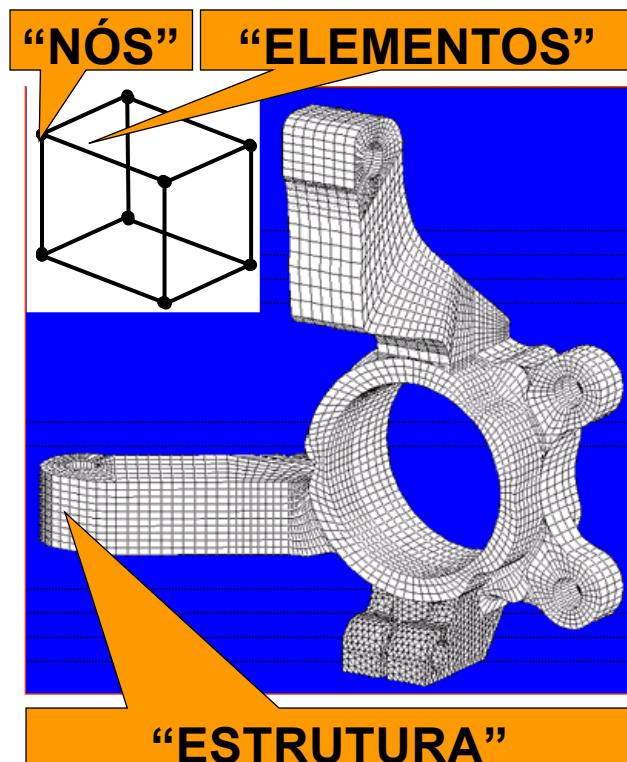


Figura 3 – Definição de estrutura, elementos e “nós” [5]

Também há que se envolver todo o modelo matemático, inserindo as mesmas condições de contorno, consideradas no protótipo, e refinando a malha nos locais em que haja relevância, para que o resultado desta análise, venha a convergir com o resultado do teste.

Ao inserir as condições de contorno, os nós gerados inicialmente sofrerão uma excitação, ou seja, um deslocamento entre os próprios nós. O *solver* irá interpretar estes deslocamentos, tratando cada nó como um vetor, e a partir daí, cria-se uma matriz que por sua vez, indica o sentido de deslocamento em cada nó e a frequência em que o mesmo começou a se deslocar.

## 2.2. PASSOS PARA A ANÁLISE FEA

A análise FEA pressupõe algumas etapas para a correta aplicação das condições de contorno de acordo com Figura 3, quais sejam: Modelamento geométrico, Preparação das malhas, Definição da simulação, *Solver*, Avaliação dos resultados e Otimização [6].

O modelamento geométrico compreende a vetorização em ambiente CAD da peça que se deseja submeter a análise, sendo comumente denominada de modelo 3D.

A fase de preparação da malha e condições de contorno, equivale a discretização da estrutura em elementos paramétricos ou isoparamétricos, e conhecidos as suas características matemáticas. Também é nesta fase em que se determina, os diversos tipos de carregamentos que a estrutura irá submeter, assim como as suas restrições, dando origem aos graus de liberdade.

Para a definição da simulação, é preciso especificar que tipo de trabalho computacional será realizado, podendo ser: Estática, Dinâmica, Modal, Térmica, CFD, RSA, entre outras.

O próximo passo é o *solver*, que é a etapa de trabalho computacional, envolvendo todo o algoritmo matemático das diversas especialidades da engenharia, com a intenção de validar os limites por exemplo da lei de Hooke, Young, Poisson, entre outros cientistas.

Segue com a avaliação dos resultados, em que o sistema após ter realizado os cálculos internos, devolve as informações com os resultados de vibração, deslocamento, tensão, temperatura, pressão, deformação, etc.

Finaliza esta etapa com uma argumentação: Validar ou Otimizar o projeto? Em que o engenheiro calculista define o que será feito, com base no resultado da simulação computacional e análise numérica dos dados.

A Figura 4 denota a topologia computacional da metodologia FEA, utilizada neste trabalho.

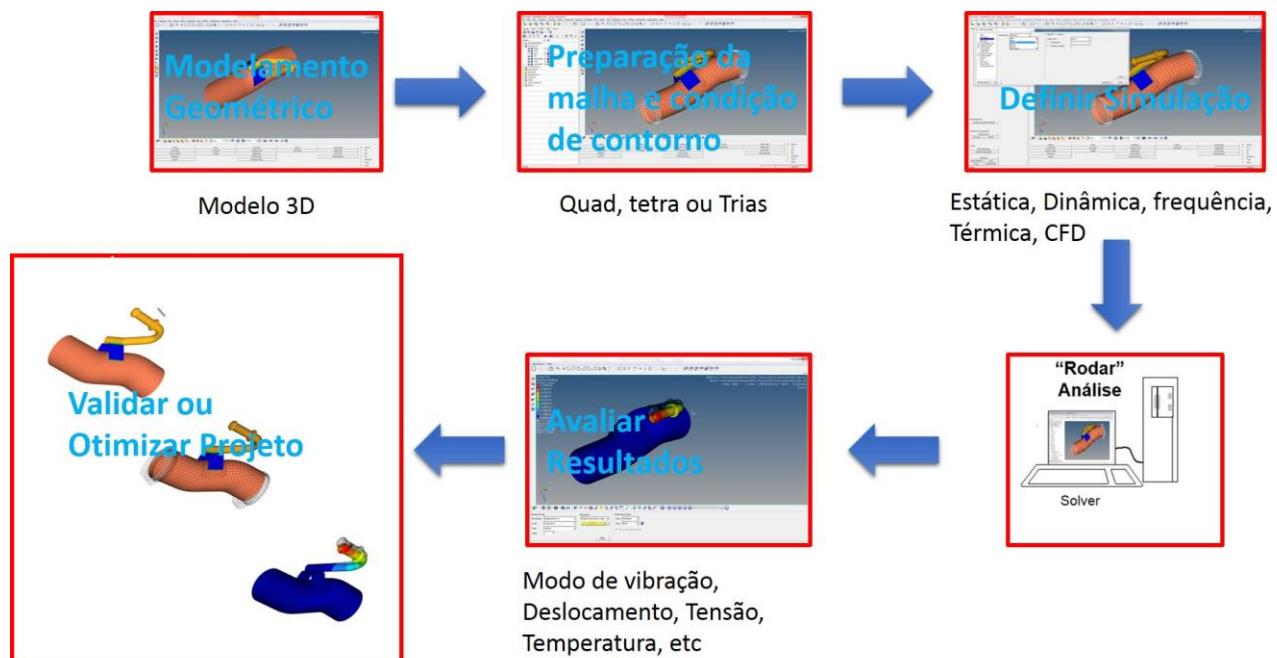


Figura 4 – Topologia computacional da análise FEA

### 3. ESTUDO DE CASO: ANÁLISE MODAL DOS HANGERS

A formulação das malhas foram geradas a partir do modelo CAD 3D do conjunto, em que descartou-se as regiões de não interesse, deixando apenas as malhas de cada *Hanger* em arquivos “.inp” ou seja, arquivos de *inputs* para o ABAQUS, os quais contem os elementos de malha, condições de contorno e informações de materiais.

No total, foram gerados 4 arquivos para cada um dos 4 *Hangers* que compõem o sistema. Trabalhou-se com um elemento do tipo “QUAD” com tamanho médio de 5x5, deixando como parâmetro aceitável, apenas 5% de elementos “triangulares”. Estes elementos triangulares foram evitados, pelo fato de que pela configuração da sua geometria, favorece a concentração de grandes tensões.

Para as propriedades dos materiais de chapas, utilizou-se a propriedade de “SHELL” com a espessura de cada material.

Para as soldas, foram utilizadas as propriedades de “SOLIDS”, pelo fato de serem usados elementos do tipo “QUAD 3D”, cuja finalidade principal é a interligação dos componentes.

A Figura 5 ilustra as quatro malhas geradas para o componente *hanger*.

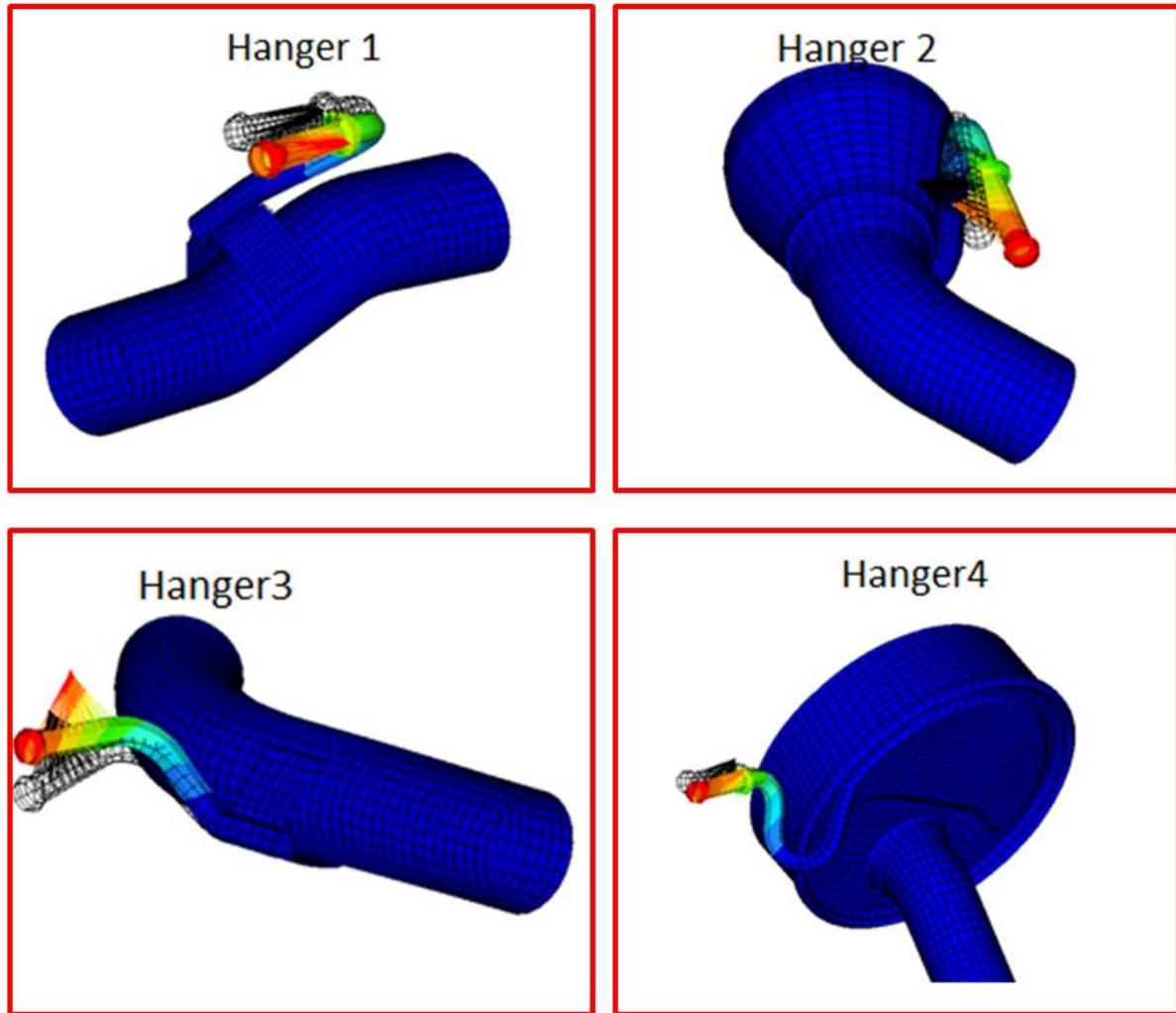


Figura 5 – Arquivo com as Malhas geradas

Foram considerados também para a simulação, as especificações dos “*rubbers*” ou seja, os coxins que interligam os ganchos com o chassi, e que também atuam como um amortecedor para o sistema de exaustão. Devido ao fato que esta se considerando para este caso, os modos de vibração dos *hangers*, com o intuito de se analisar qual a mínima frequência, para que estes componentes comecem a vibrar, foi inserido apenas a massa do coxim em um elemento “1D”, interligado por elementos “1D Rígidos”, em todos os nós do local onde o coxim está instalado.

Neste caso, a massa inserida foi de  $4 \times 10^{-6}$  toneladas, conforme o sistema de unidades trabalhadas para este conjunto. Lembrando que o software trabalha de forma adimensional, ou seja, o usuário é responsável por indicar as unidades e escalas adequadas, que se deseja trabalhar.

A Figura 6 denota a representação gráfica do elemento do tipo “1D”, distribuindo a massa do coxim entre os nós adjacentes que formam o conjunto do *hanger*.

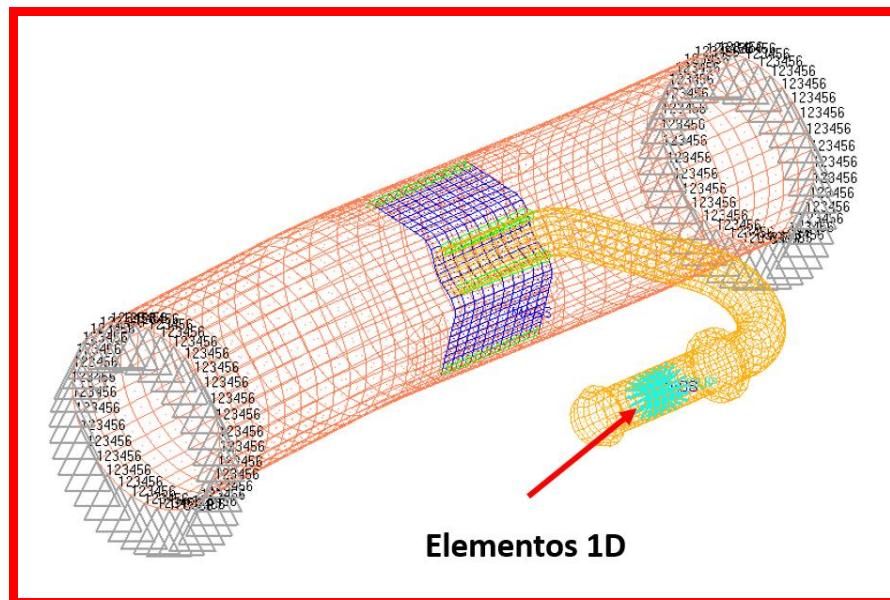


Figura 6 – Elementos 1D, distribuindo a massa do coxim entre os nós

Definida a condição de contorno mais representativa para o modelo matemático, o próximo passo foi configurar o *solver* para a condição de *Frequency*, com no mínimo 5 modos de vibração.

Com o *solver* devidamente configurado, iniciou-se a análise computacional, em que o *solver* compilou os cálculos da análise modal no ambiente ABAQUS. Após a finalização dos cálculos, o *solver* retornou e apresentou os resultados graficamente, indicando no modelo matemático CAD, os deslocamentos ( $\Delta l$ ) em cada modo de vibração, assim como a frequência natural (Hz) correlata.

A Figura 7 ilustra o deslocamento do *hanger* ampliado em uma escala de 2 vezes.

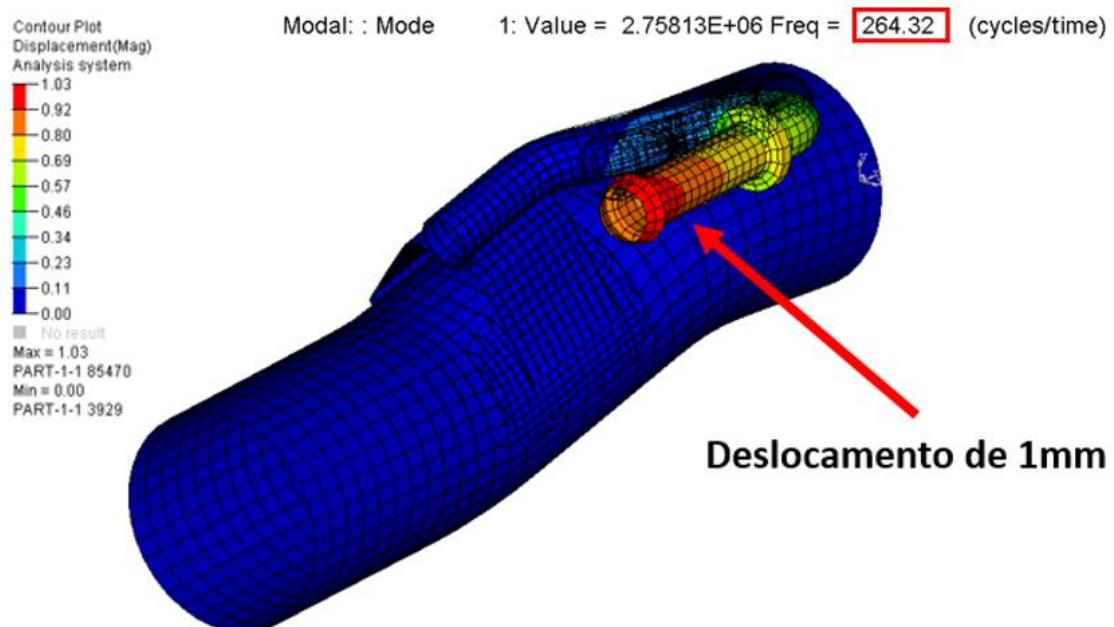


Figura 7 – Deslocamentos ( $\Delta l$ ) e modos de vibrações (Hz)

A Figura 8 ilustra os modos de vibrações encontrados em cada *hanger*, evidenciando a localização geométrica e o valor da frequência encontrada em Hertz.

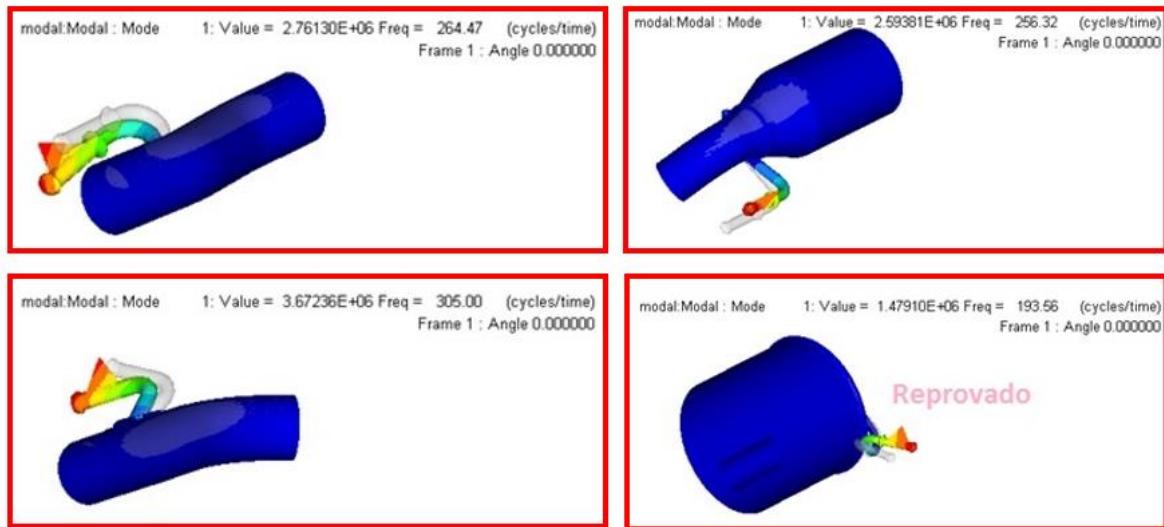


Figura 8 – Modos de vibrações em cada *hanger*

No final da análise, foi possível verificar que o *hanger* 4 estava com uma frequência natural abaixo de 200 Hz, o que compromete seriamente o conjunto do escapamento. Assim, é necessário criar um retrabalho, ou melhor dizendo, uma otimização geométrica do componente, para adequar este *hanger* a uma faixa de frequência ideal.

Visto isto, foi inserido mais um cordão de solda na parte oposta do atual cordão, e que prende este *hanger* no *baffle* do silenciador traseiro. Este cordão de solda irá aumentar a massa do sistema, fazendo com que o mesmo aumente sua frequência natural de vibração.

A Figura 9 denota a comparação entre a modificação do componente e o componente atual.

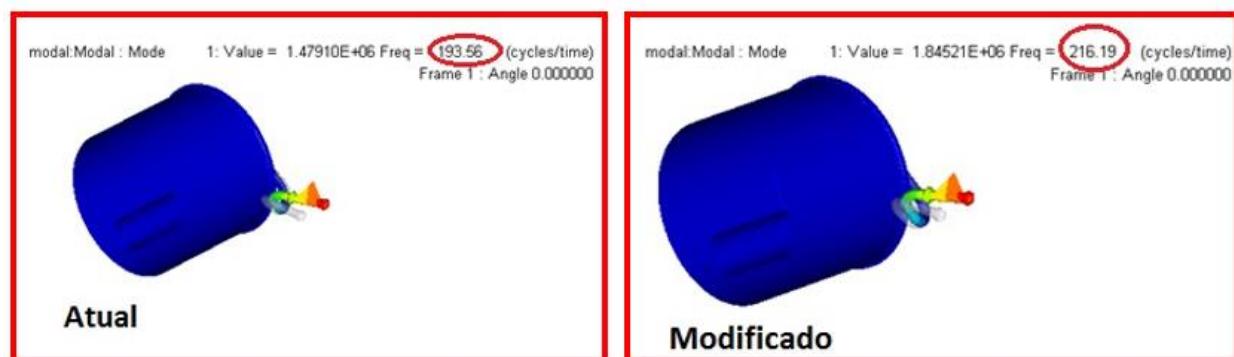


Figura 9 – Protótipo confeccionado para o teste

Com a finalização das análises, foi possível verificar se os componentes atendem a especificação do cliente, ainda em plena fase de Pré-Desenvolvimento. Nesta fase, as cotações para a definição do custo final do produto ainda não foram congeladas, e desta forma, com as modificações feitas de forma virtual, o projeto poderá ser conduzido com uma maior garantia

de confiabilidade de função. Também espera-se uma decisão sem a dúvida de que será necessário acrescentar material ou adicionar mais algum componente, onerando o preço do produto. Por outro lado, o protótipo será criado, sem que seja necessário retrabalhos, contribuindo desta maneira, para a redução do custo do projeto.

### 3.1. BULK DATA

Para esta analise, utilizou-se um processador Intel Xeon W3565, 3.2 GHz, 64 bits, 10 GB RAM e disco rígido de 3,5 TB e 4 GB de *swap\_space*, além de:

- Tempo de processamento total	= 13min
- No. de Elementos	= 2946
- No. de Nós	= 2910
- No. de Variáveis	= 17460

## CONCLUSÃO

O resultado da simulação, indicou qual componente seria necessário uma melhoria para adequar o produto as especificações do cliente, resultando em uma maior clareza para a cotação do valor final do mesmo, e diminuindo o tempo de reprojeto e validações, com construções de protótipos. Com este método, foi possível comprovar para a montadora, que o produto foi concebido a partir de métodos robustos, e atende as especificações, diminuindo a incerteza de problemas futuros, durante as fases do processo de desenvolvimento do produto.

Futuramente, poderá ser utilizado um método de correlação denominado “*Hammer Impact*”, que constitui um “martelo de impacto”, instrumentado com um sistema de medição LMS, em que, após uma pequena perturbação no componente, é possível verificar a frequência natural do mesmo, e correlacionar com a solução encontrada na simulação computacional.

## REFERÊNCIAS

- [1] Back, N., Ogliari, A., Dias, A., Da Silva, J.C.: **Projeto Integrado de Produtos: Planejamento, Concepção e Modelagem**, ISBN: 9788520422083, Editora Manole, 2008
- [2] Rozenfeld, H., Forcellini, F.A., Amaral, D.C., Toledo, J.C., Silva, S.L., Alliprandini, D.H., Scalice, R.K.: **Gestão de Desenvolvimento de Produtos: Uma referência para a Melhoria do Processo**, Saraiva, São Paulo, 2006
- [3] Pahl, G., Beitz, W., Feldhusen, J., Grote, K.-H.: **Projeto na Engenharia**, 1<sup>a</sup> ed., Edgard Blücher, São Paulo, 2005
- [4] Ehrlenspiel, K., Kiewert, A., Lindemann, U.: **Cost-Efficient Design**, ASME Press, ISBN 0-7918-0250-7, New York, 2007
- [5] MacNeal, R.: **MSC/NASTRAN for Window: Finite Element Modeling**, MacNeal Schwendler Corporation, San Diego/Califórnia, 1997
- [6] Camargo, R.: **Topologia de Projeto Robusto aplicando o método dos Elementos Finitos**, Revista Ciência e Tecnologia, v. VII, p. 13-29, 2004

[7] Alves Filho, A.: **Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE**, Editora Erica, 1º Edição, São Paulo, 2000

[8] Rao, S.: **Vibrações Mecânicas**, Quarta Edição, Pearson, 2009

[9] Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.: **Finite Element Method- Basic Formulation and Linear Problems**, Vol.1, McGraw-Hill Co., New York, 1989

[10] Thomson, W. T.: **Teoria da Vibração com Aplicação**, Rio de Janeiro, Interciencia, 1978

[11] Hughes, T. J. R.: **Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987

[12] Fonseca, J.S.O, Selk, C.A.C., Pereira, L.T.V., Marczak, R.J., Alves, D.B., Luersen, M.A.: **Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos**, UFRGS, 2002