

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE GRÁFICOS SIMULTÂNEOS UNIVARIADOS DE \bar{X} E T^2 DE HOTELLING EM PROCESSOS BIVARIADOS COM AUTOCORRELAÇÃO

Roberto Campos Leoni

Departamento de Produção, UNESP - Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: rcleoni@yahoo.com.br

Antonio Fernando Branco Costa

Departamento de Produção, UNESP - Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: fbranco@feg.unesp.br

Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Departamento de Produção, UNESP - Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: marcela@feg.unesp.br

Resumo:

Nesse artigo consideramos o uso dos gráficos simultâneos univariados de \bar{X} (SU \bar{X}) e T^2 em processos bivariados com amostras de tamanho n cujas observações são correlacionadas e autocorrelacionadas. A matriz de covariância cruzada do vetor de médias amostrais foi deduzida a partir de dados descritos por um modelo autoregressivo de primeira ordem – VAR(1). A autocorrelação proporciona grande impacto nos gráficos; dependendo do nível de autocorrelação, os gráficos SU \bar{X} para amostras unitárias sinaliza mais rápido que amostras de tamanho dois ou até quatro. O efeito combinado da correlação e da autocorrelação no desempenho dos gráficos SU \bar{X} e T^2 também foi investigado. Estudos anteriores mostraram que mudanças em apenas uma variável são detectadas mais rapidamente quando as variáveis são correlacionadas. Esse resultado se estende para o caso em que ambas as variáveis são autocorrelacionadas.

Palavras-chaves: autocorrelação; gráficos simultâneos univariados de \bar{X} ; processos bivariados

Abstract:

In this article, we consider the simultaneous univariate \bar{X} (SU \bar{X} charts) and T^2 charts for bivariate samples of size n with observations that are not only cross-correlated but also autocorrelated. The cross covariance matrix of the sample mean vectors was derived with the assumption that the observations are described by a first order vector autoregressive model – VAR(1). The autocorrelation has a strong impact on the charts; depending on the level of the autocorrelation, the SU \bar{X} charts for individual observations signals faster than the SU \bar{X} charts for samples of size two, or even four. The combined effect of the correlation and autocorrelation on the performance of the SU \bar{X} and T^2 charts was also investigated. Earlier studies proved that changes in only one variable are detected faster when the variables are correlated. This result extends to the case that one or both variables are also autocorrelated.

Keywords: autocorrelation; simultaneous univariate \bar{X} charts; bivariate process.

1. Introdução

A ideia de monitorar múltiplas características de qualidade com apenas um gráfico de controle foi introduzida por Hotelling (1947). É sempre mais fácil lidar com apenas um gráfico de controle, no entanto, o gráfico apenas sinaliza mudança no processo e não é capaz de identificar as variáveis afetadas por alguma causa especial. Uma abordagem para resolver esse problema é o uso simultâneo de vários gráficos de \bar{X} (SU \bar{X}); veja Runger e Montgomery (1997) e Serel et al. (2000).

Machado e Costa (2008) comparou o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling com os gráficos SU \bar{X} em processos bivariados. Quando ambas as variáveis são positivamente correlacionadas o gráfico SU \bar{X} apresenta, em geral, melhor desempenho. Contudo, Machado e Costa (2008) não investigaram a influência da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle.

Em muitos processos modernos as amostras coletadas de acordo com o princípio dos subgrupos racionais são, além de correlacionados, autocorrelacionadas, veja Pan e Jarret (2011). O modelo autoregressivo de primeira ordem – $VAR(1)$ tem sido usado para descrever esses tipos de processos com observações multivariadas (KALGONDA e KULKARNI, 2004; PAN e JARRET, 2007; HWARNG e WANG, 2010; HUANG et al., 2013a; HUANG et al., 2013b).

Nesse artigo, estudou-se o desempenho dos gráficos SU \bar{X} aplicados em processos bivariados que apresentam autocorrelação e correlação. A investigação baseou-se na dedução da matriz de covariância cruzada do vetor de médias amostrais (veja Apêndice). Também comparamos o desempenho dos gráficos SU \bar{X} com o gráfico T^2 de Hotelling utilizando amostras de tamanho n e diversos níveis de correlação combinados com diversos níveis de autocorrelação. O desempenho dos gráficos SU \bar{X} e T^2 de Hotelling foi medido através do número médio de amostras até o sinal dado pelo gráfico (ARL).

Este artigo está assim estruturado: na seção 2 descrevemos o modelo $VAR(1)$ e no Apêndice obtemos a matriz de covariância cruzada do vetor de médias amostrais. Na seção 3 desenvolvemos as expressões para calcular os erros tipo I e II dos gráficos de controle SU \bar{X} e T^2 de Hotelling. Na seção 4 investigamos o efeito da autocorrelação e correlação no desempenho dos gráficos de controle SU \bar{X} e T^2 de Hotelling. As conclusões e sugestões são apresentadas na seção 5.

2. O modelo autoregressivo e a matriz de covariância cruzada

A autocorrelação se refere a dependência entre observações de uma mesma característica de qualidade. A correlação se refere a dependência entre as observações das características de qualidade. O modelo vetor autoregressivo tem sido utilizado em estudos recentes para modelar observações multivariadas com autocorrelação e correlação. O modelo $VAR(1)$ é representado por:

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (1)$$

sendo $\mathbf{X}_t \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Gamma)$ o vetor de observações de dimensão $(p \times 1)$ no instante t (p é o número de variáveis), $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de médias, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um vetor aleatório com observações independentes e distribuição normal multivariada com média zero e matriz de covariância Σ e Φ é uma matriz com parâmetros de autocorrelação de ordem $(p \times p)$.

De acordo com Kalgonda e Kulkarni (2004), a matriz de correlação cruzada de \mathbf{X}_t possui a seguinte propriedade: $\Gamma = \Phi \Gamma \Phi' + \Sigma$. Após alguma manipulação algébrica, é possível obter a relação:

$$Vec \Gamma = (I_{p^2} - \Phi \otimes \Phi)^{-1} Vec \Sigma \quad (2)$$

onde \otimes é o operador produto de Kronecker e Vec é o operador que transforma a matriz em um vetor empilhando suas colunas.

Para estudar o efeito da autocorrelação e correlação em dois gráficos simultâneos de \bar{X} , consideramos um processo bivariado ($p=2$):

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A partir de (2) e (3), segue-se que:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 = (1-a^2)^{-1} & \sigma_{XY} = \rho(1-ab)^{-1} \\ \sigma_{XY} = \rho(1-ab)^{-1} & \sigma_Y^2 = (1-b^2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

A matriz de covariância cruzada do vetor de médias amostrais formadas por subgrupos racionais de tamanho n é desenvolvida no Apêndice A:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] & \zeta_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \end{pmatrix} \quad (5)$$

sendo: $\sigma_X^2 = \frac{1}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{1}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\rho}{1-ab}$. Quando os elementos de Φ fora da diagonal principal são iguais a zero, vale a relação:

$$\zeta_{XY} / \zeta_X \zeta_Y = \rho \quad (6)$$

3. Erros tipo I e II

3.1 Gráfico SU \bar{X}

Considere duas características de qualidade X e Y representadas por distribuições normais. Os gráficos de controle simultâneos univariados baseados das variáveis originais (SU \bar{X}) será adotado para monitorar processos com autocorrelação e correlação.

Primeiro, suponha que ambas as variáveis X e Y sejam independentes. Os limites de controle de amplitude 3-sigma podem ser dimensionados se ambas são monitoradas isoladamente com o gráfico de \bar{X} . Com o processo em controle estatístico, cada gráfico de \bar{X} tem a probabilidade $\alpha = 0,0027$ (erro tipo I) de a observação exceder os limites de controle.

A probabilidade de que ambas as variáveis estejam dentro dos limites de controle quando o processo está sob controle é $(1-0,0027)(1-0,0027)=0,994607$. O erro tipo I global nesse caso será $\alpha' = 1-0,994607=0,0054$. Em geral, quando monitoramos p características de qualidade independentes com gráficos de controle, o erro tipo I global será:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p \quad (7)$$

Portanto, a equação (7) pode ser usada para calcular o erro tipo I em cada gráfico de controle se desejamos monitorar p características de qualidade independentes (veja Montgomery (2004)).

Se as variáveis são correlacionadas, o que é o mais comum em processos multivariados, procedimentos mais complexos devem ser empregados para obter limites de controle, dado um valor específico de α' .

Os limites de controle para dois gráficos simultâneos de \bar{X} são $\mu_{0,X} \pm k \sigma_X / \sqrt{n}$ para X e $\mu_{0,Y} \pm k \sigma_Y / \sqrt{n}$ para Y . Sendo n o tamanho da amostra, $\mu'_0 = (\mu_{0,X}, \mu_{0,Y})$ o vetor de médias de

um processo bivariado e $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ a matriz de covariância. Supõe-se que o processo esteja em controle estatístico e que X e Y sigam um modelo normal bivariado. O coeficiente de abertura dos limites de controle k , para um dado valor de α' é obtido pela relação:

$$\alpha' = 1 - \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{0,X}}{\sigma_X / \sqrt{n}} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{0,Y}}{\sigma_Y / \sqrt{n}} < k \mid \mu = \mu_0 \right) \quad (8)$$

$$= 1 - \Pr(-k < Z_1 < k \cap -k < Z_2 < k) \quad (9)$$

$$= 1 - \int_{-k-k}^k \int_{-k-k}^k f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (10)$$

sendo $f(z_1, z_2)$ a função de densidade conjunta de uma distribuição normal padrão com correlação ρ .

Por exemplo, da equação (8), se X e Y são não correlacionadas ($\rho = 0$, $n=4$, $\alpha' = 0,0027$), $k=6,4099$. Por outro lado, se X e Y são correlacionadas ($\rho = 0,7$, $n=4$, $\alpha' = 0,0027$), $k=6,3656$. Note que o cálculo do erro tipo I é mais complexo quando há correlação e o uso da expressão (7) nesse caso promove distorções que se tornam mais graves quando p aumenta.

Se as duas características são também autocorrelacionadas, a probabilidade do erro tipo I deve ser calculada usando os elementos de $\Gamma_{\bar{X}}$ (veja equação 5):

$$\alpha' = 1 - \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{0,1}}{\sqrt{\zeta_{11}}} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{0,2}}{\sqrt{\zeta_{22}}} < k \mid \mu = \mu'_0 \right) \quad (11)$$

Por exemplo, usando a equação (11), se X e Y são correlacionadas e autocorrelacionadas $\left(\Phi = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix} \right)$, $k = 3,8635$.

Os riscos α e β são, respectivamente, os erros tipo I e tipo II. Na presença de autocorrelação, o erro tipo II será dado por:

$$\beta = \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{1,X}}{\sqrt{\zeta_X}} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{1,Y}}{\sqrt{\zeta_Y}} < k \mid \mu = \mu'_1 \right) \quad (12)$$

sendo $\mu'_1 = (\mu_{1,X}, \mu_{1,Y})$

$$\beta = \Pr \left(-k - \frac{\delta_X}{\sqrt{\zeta_X}} < Z_1 < k - \frac{\delta_X}{\sqrt{\zeta_X}} \cap -k - \frac{\delta_Y}{\sqrt{\zeta_Y}} < Z_2 < k - \frac{\delta_Y}{\sqrt{\zeta_Y}} \right) \quad (13)$$

3.2 Gráfico T^2 de Hotelling

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é o mais conhecido esquema de controle utilizado para detectar desvios na média de processos multivariados (HOTELLING, 1947). Quando o vetor de médias $\mu'_0 = (\mu_{0,X}, \mu_{0,Y})$ e a matriz $\Gamma_{\bar{X}}$ são conhecidos, a estatística de monitoramento T^2 de Hotelling é dada por:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \Gamma_{\bar{X}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) \quad (14)$$

Com o processo em controle, $T^2 \sim \chi_p^2$. Se ocorrer uma causa especial que provoque a mudança no vetor de médias para $\mu'_1 = (\mu_{1,X}, \mu_{1,Y})$, $T^2 \sim \chi_{(p,\lambda)}^2$ com parâmetro de não centralidade $\lambda^2 = \delta' \Gamma_{\bar{X}}^{-1} \delta$, sendo $\delta = (\delta_X = \mu_{1,X} - \mu_{0,X}, \delta_Y = \mu_{1,Y} - \mu_{0,Y})$. Sem perda de generalidade

consideramos na avaliação do desempenho do gráfico $\mu_{0,X} = \mu_{0,Y} = 0$. Os erros tipo I e II do gráfico T^2 são calculados por:

$$\alpha = 1 - \Pr[\chi_{p=2}^2 < CL] \quad (15)$$

$$\beta = \left[\Pr(\chi_{(p=2,\lambda)}^2) < CL \right] \quad (16)$$

sendo CL o limite de controle do gráfico.

4. O efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho dos gráficos SU \bar{X} e T^2 de Hotelling

Para estudar o efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho dos gráficos SU \bar{X} e de T^2 , assumiu-se um processo bivariado e amostras de tamanho $n=4$ foram coletadas seguindo o princípio dos subgrupos racionais. O desempenho dos gráficos foi medido pelo número médio de amostras até o sinal (ARL). Quando o processo está em controle, o ARL mede o número médio de amostras até a ocorrência de um alarme falso (ARL_0). Quando o processo está fora de controle, o gráfico com menor ARL detecta com maior rapidez mudança no processo. Na prática, amostras preliminares são coletadas para estimar a matriz Γ e os parâmetros a , b e ρ ; veja equação (4).

O ARL é dado por:

$$ARL = \{1 - \beta\}^{-1} \quad (17)$$

O desempenho dos gráficos SU \bar{X} e T^2 foi avaliado e os resultados são apresentados nas Tabelas B1, B2 e B3 (ver apêndice B). Consideraram-se variáveis não correlacionadas, $\rho = 0$, e variáveis com baixo e alto grau de correlação, $\rho = 0,3$ ou $0,7$. Escolheram-se para as análises observações independentes e autocorrelacionadas, sendo, $a, b \in (0; 0,2; 0,5; 0,7)$ e amostras de tamanho $n=4$. Diversas combinações de deslocamentos na média foram usadas, δ_x e $\delta_y \in (0,0; 0,5; 1,0; 1,5)$ e $ARL_0=370,4$.

Investigou-se também o efeito da autocorrelação e da correlação no desempenho do gráfico SU \bar{X} . Amostras de tamanhos $n=1, 2$ e 4 foram utilizadas e os resultados apresentados nas Tabelas B4, B5 e B6 (ver apêndice B).

Na Figura 1, observa-se que ambas as variáveis X e Y apresentam o mesmo nível de autocorrelação e o deslocamento da média ocorre em ambas as variáveis com igual intensidade. O gráfico T^2 é afetado pela correlação, que diminui o poder do gráfico, reduzindo a capacidade de detecção de uma causa especial que altera o vetor de médias. Os gráficos SU \bar{X} mantêm praticamente estáveis os $ARLs$. Por exemplo: No gráfico T^2 o ARL aumenta de 93,65 ($\rho=0,0$) para 145,92 ($\rho=0,7$) quando $\delta_x = \delta_y = 0,5$. No gráfico SU \bar{X} o ARL aumenta de 106,52 ($\rho=0,0$) para 112,24 ($\rho=0,7$).

Na Figura 2, observa-se que apenas a variável Y apresenta autocorrelação e o deslocamento da média ocorre apenas na variável independente (X). A correlação aumenta o poder do gráfico T^2 , consequentemente, aumenta também a capacidade de detecção de uma causa especial que altera a média de X . Os gráficos SU \bar{X} mantêm praticamente estáveis os $ARLs$. Por exemplo: No gráfico T^2 o ARL diminui de 67,32 ($\rho=0,0$) para 34,34 ($\rho=0,7$) quando $\delta_x = 0,5$. Nos gráficos SU \bar{X} o ARL diminui de 66,34 ($\rho=0,0$) para 65,04 ($\rho=0,7$).

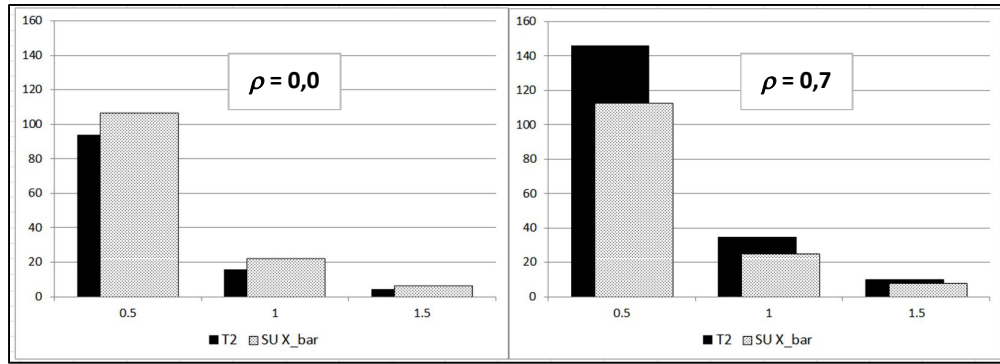


Figura 1. ARL dos gráficos T^2 e SU \bar{X} quando a variável afetada por uma causa especial é autocorrelacionada; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.

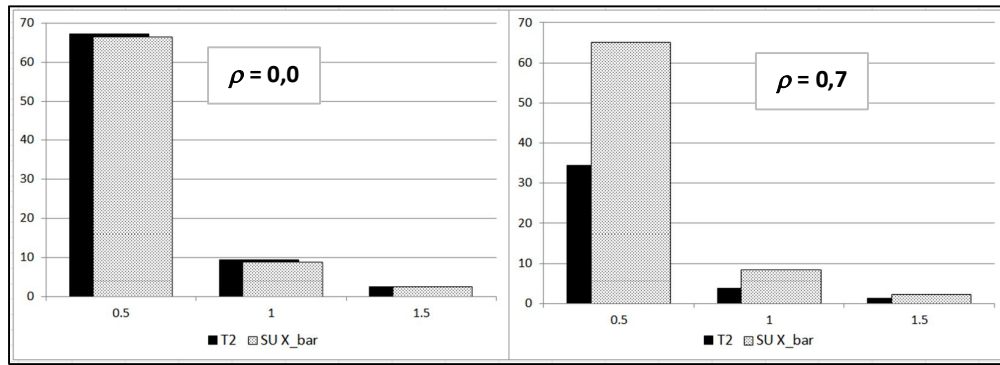


Figura 2. ARL dos gráficos T^2 e SU \bar{X} quando a variável afetada por uma causa especial não é autocorrelacionada; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$; $\delta_Y=0$.

A Figura 3 apresenta as variáveis X e Y com o mesmo nível de autocorrelação e o deslocamento da média ocorre em apenas Y . O gráfico T^2 é afetado pela correlação, que aumenta o poder do gráfico. Os gráficos SU \bar{X} mantêm praticamente estáveis os ARLs. Por exemplo: no gráfico T^2 o ARL diminui de 163,04 ($\rho=0,0$) para 95,44 ($\rho=0,7$) quando $\delta_Y=0,5$. Nos gráficos SU \bar{X} o ARL diminui 165,30 ($\rho=0,0$) para 162,47 ($\rho=0,7$).

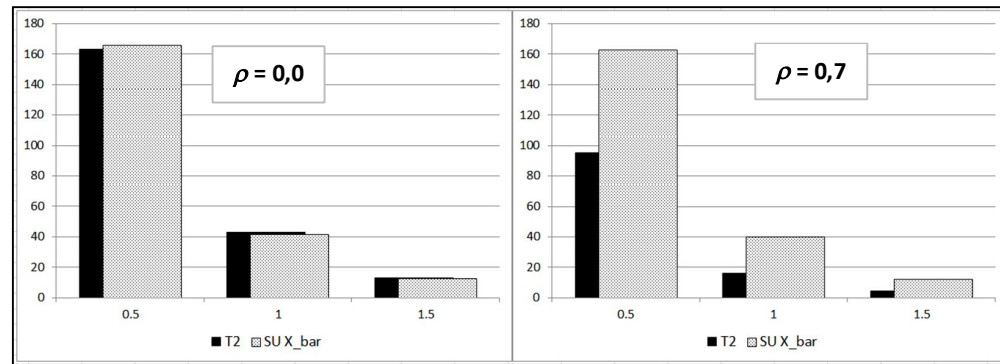


Figura 3. ARL dos gráficos T^2 e SU \bar{X} quando a variável afetada por uma causa especial é autocorrelacionada; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.

Quando o deslocamento da média ocorre em ambas as variáveis, os gráficos SU \bar{X} possuem melhor desempenho na medida em que as variáveis apresentem altos níveis de autocorrelação associados a altos níveis de correlação. Caso o deslocamento da média ocorra em apenas uma variável, o gráfico de T^2 ganha em desempenho (ver Tabelas 1, 2 e 3).

Nas Figuras 4 e 5 avaliou-se o desempenho dos gráficos $SU \bar{X}$ variando o tamanho da amostra ($n=1$, $n=2$ e $n=4$). Independente do tipo de deslocamento, autocorrelação ou correlação, o poder do gráfico sempre aumenta com o aumento do tamanho da amostra. Contudo, há casos em que trabalhar com amostras unitárias é mais vantajoso. Observa-se na Tabela B4 e Figura 5 que o ARL sempre é menor para $n=1$, em relação a $n=2$ e $n=4$, quando ambas as variáveis X e Y são autocorrelacionadas.

Em todos os cenários da Tabela B5, em que o deslocamento da média ocorre somente na variável autocorrelacionada, $n=1$ supera os demais tamanhos de amostra em relação ao desempenho, ou seja, apresenta menor ARL . Da Tabela B6, podemos ampliar esse resultado, verificando que amostras unitárias chegam a ser melhores que $n=2$ mesmo que o deslocamento ocorra em ambas as variáveis.

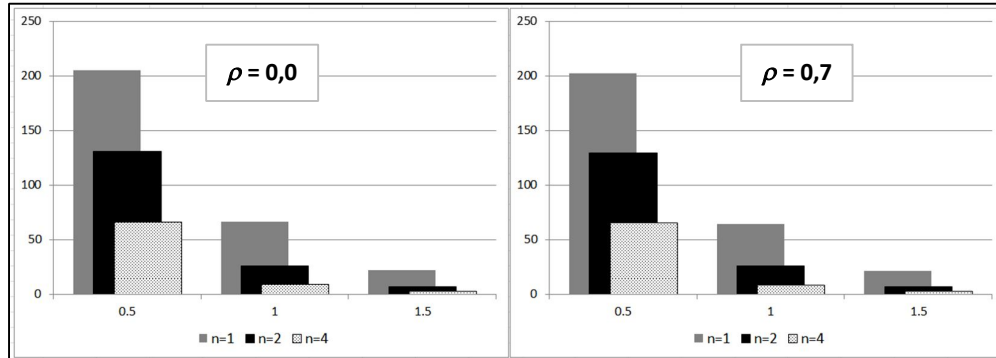


Figura 4. ARL do gráfico $SU \bar{X}$ quando a variável afetada por uma causa especial não é autocorrelacionada; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$; $\delta_Y=0$.

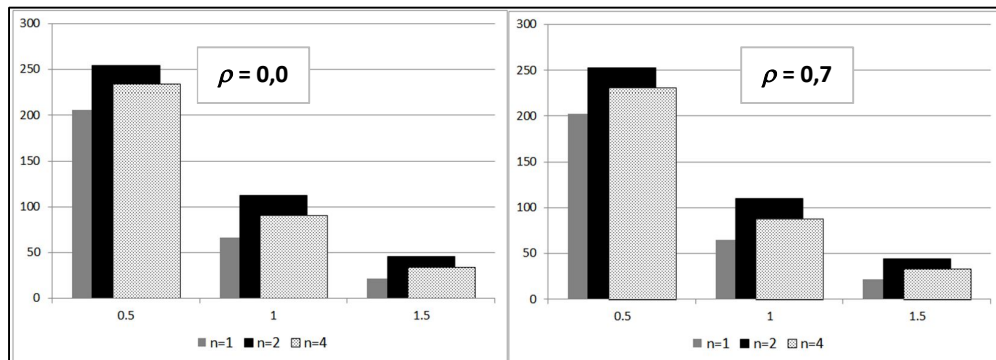


Figura 5. ARL do gráfico $SU \bar{X}$ quando a variável afetada por uma causa especial é autocorrelacionada; $a=0,7$; $b=0,7$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.

5. Conclusão

Nesse artigo apresentamos o forte impacto que a autocorrelação exerce no desempenho de gráficos de controle bivariados; o desempenho dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$ foram avaliados e, em geral, quando há deslocamento no vetor de médias, os gráficos $SU \bar{X}$ possuem melhor desempenho na medida em que as variáveis apresentem altos níveis de autocorrelação associados a altos níveis de correlação. Caso o deslocamento da média ocorra em apenas uma variável, o gráfico de T^2 ganha em desempenho.

Avaliou-se, também, o efeito do tamanho da amostra no poder dos gráficos $SU \bar{X}$. Quando há níveis altos de autocorrelação e o deslocamento da média ocorre na variável autocorrelacionada, o poder dos gráficos $SU \bar{X}$ é maior quando utilizamos amostras unitárias.

Referências

- Hotelling, H., 1947. Multivariate quality control – illustrated by the air testing of samples bombs sights, in techniques of Statistical Analysis, C. Eisenhard, M.W. Hastay and W.A. Wallis, eds., Mc Graw Hill, New York, 113-184.
- Huang, X., Bisgaard, S., Xu, N., 2013. Model-based Multivariate Monitoring Charts for Autocorrelated Processes. *Quality and Reliability Engineering International*. DOI: 10.1002/qre.1506
- Huang, X., Xu, N., Bisgaard, S., 2013. A Class of Markov Chain Models for Average Run Length Computations for Autocorrelated Processes. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 42:7, 1495-1513.
- Hwang, H. B., Wang, Y., 2010. Shift detection and source identification in multivariate autocorrelated process. *International Journal of Production Research*, 48, 835-859.
- Kalgonda, A. A., Kulkarni, S. R., 2004. Multivariate quality control chart for autocorrelated processes. *Journal of Applied Statistics*, 31, 317-327.
- Machado, M. A. G.; Costa, A. F. B., 2008. The use of principal components and univariate charts to Control multivariate processes. *Pesquisa Operacional*, 28:1, 173-196.
- Montgomery, D. C., 2004. *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, Inc., New York, New York.
- Pan, X., Jarrett, J., 2007. Using vector autoregressive residuals to monitor multivariate processes in the presence of serial correlation. *International Journal of Production Economics*, 106, 204-216.
- Pan, X., Jarrett, J., 2011. Why and how to use vector autoregressive models for quality control: the guideline and procedures. *Quality and Quantity*, 46:3, 935-948.
- Runger, G. C., Montgomery, D. C., 1997. Multivariate and univariate process control: geometry and shift directions. *Quality and Reliability Engineering International*, 13, 153-158.
- Serel, D. A., Moskowitz, H., Tang, J., 2000. Univariate control charts for individual characteristics in a multinormal model. *IIE Transactions*, 32, 1115-1125.

APÊNDICE A – Matriz de covariância cruzada de um vetor de médias amostrais.

Considere que n elementos de uma amostra são coletados em curto espaço de tempo e o intervalo de amostragem t é suficientemente grande para eliminar qualquer dependência entre amostras; o vetor de observações da j -ésima unidade é descrita por um modelo autoregressivo de primeira ordem:

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^j \Phi^{j-i} \varepsilon_i ; j=1,2,\dots,n. \quad (\text{A1})$$

sendo $\varepsilon_i \sim N_2(\mu; \Sigma)$ com $\Sigma = (a_{ij})_{2 \times 2}$; $a_{ij} = 1$ se $i = j$; $a_{ij} = \rho$ se $i \neq j$ e $\Phi = \text{diag}(a; b)$.

De acordo com o modelo autoregressivo,

$$\text{Var}(\mathbf{X}_j) = (\Phi^{j-1})\Gamma(\Phi^{j-1})' + (\Phi^{j-2})\Sigma(\Phi^{j-2})' + \dots + \Sigma \quad (\text{A2})$$

Se $\Gamma = \Phi\Gamma\Phi' + \Sigma$ (KALGONDA e KULKARNI, 2004), a matriz de covariância cruzada do vetor de médias amostrais $(\Gamma_{\bar{X}})$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \text{Var}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \quad (\text{A3})$$

A partir de A1, A2 e A3, segue-se que,

$$\Gamma_{\bar{X}} = \frac{1}{n^2} \left[(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-1})\Gamma(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-1})' + \right. \\ \left. + (I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-2})\Sigma(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-2})' + \dots + (I + \Phi)\Sigma(I + \Phi)' + \Sigma \right] \quad (\text{A4})$$

Após manipulação algébrica,

$$\Gamma_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] & \zeta_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \end{pmatrix} \quad (\text{A5})$$

sendo: $\sigma_X^2 = \frac{1}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{1}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\rho}{1-ab}$

APÊNDICE B – ARL dos gráficos $SU \bar{X}$ e T^2 .

Tabela B1. ARL dos gráficos $SU \bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 = \delta_2$.

$(a; b)$		(0; 0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	,50	27,73	36,64	34,43	43,89	46,56	54,40	55,16	60,13
1,00	1,00	3,06	4,65	3,89	5,83	5,63	7,44	7,07	8,15
1,50	1,50	1,21	1,51	1,36	1,77	1,71	2,15	2,03	2,30
$\rho=0,3$									
,50	,50	39,83	37,50	48,07	44,76	59,46	55,05	64,48	60,51
1,00	1,00	4,62	4,95	5,87	6,15	7,86	7,65	8,83	8,25
1,50	1,50	1,51	1,62	1,77	1,90	2,21	2,22	2,43	2,33
$\rho=0,7$									
,50	,50	55,82	40,24	64,12	47,55	67,08	56,86	65,51	61,40
1,00	1,00	7,19	5,59	8,76	6,81	9,36	7,98	9,04	8,36
1,50	1,50	2,06	1,81	2,42	2,09	2,56	2,30	2,48	2,35
$(a; b)$		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	,50	27,73	36,64	43,87	54,79	93,65	106,52	159,45	170,95
1,00	1,00	3,06	4,65	5,22	7,96	15,74	22,17	41,01	51,65
1,50	1,50	1,21	1,51	1,63	2,27	4,19	6,40	12,35	17,82
$\rho=0,3$									
,50	,50	39,83	37,50	60,48	55,79	118,51	107,70	187,11	172,13
1,00	1,00	4,62	4,95	8,05	8,38	23,53	22,87	56,91	52,63
1,50	1,50	1,51	1,62	2,25	2,45	6,43	6,78	18,70	18,45
$\rho=0,7$									
,50	,50	55,82	40,24	81,12	59,21	145,92	112,24	214,55	176,93
1,00	1,00	7,19	5,59	12,50	9,36	34,52	24,88	76,85	55,95
1,50	1,50	2,06	1,81	3,33	2,78	10,02	7,60	27,90	20,19

Tabela B2. ARL dos gráficos $SU \bar{X}$ e T^2 ; δ_1 ou $\delta_2=0$.

$(a; b)$		(0; 0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,00	,50	67,32	66,34	95,27	95,18	163,04	165,30	230,33	233,87
,00	1,00	9,41	8,67	16,19	15,11	42,87	41,43	90,63	90,37
,00	1,50	2,57	2,38	4,31	3,96	13,05	12,10	35,03	33,58
$\rho=0,3$									
,00	,50	60,48	66,33	87,08	95,18	154,61	165,35	224,59	233,92
,00	1,00	8,05	8,66	13,99	15,09	38,60	41,42	85,39	90,38
,00	1,50	2,25	2,38	3,72	3,95	11,47	12,09	32,25	33,57
$\rho=0,7$									
,00	,50	28,53	64,36	46,04	92,86	107,78	163,55	192,22	233,30
,00	1,00	3,15	8,39	5,55	14,60	19,93	40,50	60,27	89,64
,00	1,50	1,23	2,34	1,70	3,86	5,36	11,81	20,16	33,17
$(a; b)$		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,00	,50	67,32	66,34	95,27	95,18	163,04	165,30	230,33	233,87
,00	1,00	9,41	8,67	16,19	15,11	42,87	41,43	90,63	90,37
,00	1,50	2,57	2,38	4,31	3,96	13,05	12,10	35,03	33,58
$\rho=0,3$									
,00	,50	60,48	66,33	86,92	95,19	153,08	165,36	221,26	233,96
,00	1,00	8,05	8,66	13,94	15,09	37,86	41,42	82,48	90,38
,00	1,50	2,25	2,38	3,71	3,95	11,20	12,09	30,74	33,56
$\rho=0,7$									
,00	,50	28,53	64,36	45,00	92,73	95,44	162,47	161,55	231,44
,00	1,00	3,15	8,39	5,39	14,58	16,24	40,05	42,09	87,99
,00	1,50	1,23	2,34	1,66	3,85	4,32	11,69	12,75	32,43

Tabela B3. ARL dos gráficos $SU \bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a;b)		(0;0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	1,00	6,50	7,92	9,99	12,86	20,48	27,59	33,41	42,85
,50	1,50	2,22	2,34	3,43	3,82	8,44	10,64	17,76	23,91
1,00	1,50	1,61	2,06	2,10	2,97	3,54	5,37	5,25	7,18
$\rho=0,3$									
,50	1,00	8,76	8,08	14,02	13,17	29,07	28,23	44,37	43,49
,50	1,50	2,56	2,36	4,24	3,87	11,48	10,86	24,25	24,38
1,00	1,50	2,12	2,16	2,98	3,15	5,23	5,66	7,18	7,37
$\rho=0,7$									
,50	1,00	8,30	8,23	15,70	13,70	39,85	30,04	58,22	45,38
,50	1,50	1,88	2,34	3,35	3,85	1,75	11,21	32,26	25,58
1,00	1,50	2,56	2,28	4,19	3,46	7,87	6,27	9,24	7,73
(a;b)		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$	T^2	$SU \bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	1,00	6,50	7,92	11,33	13,60	31,74	36,48	72,02	79,18
,50	1,50	2,22	2,34	3,64	3,87	11,00	11,67	30,26	31,94
1,00	1,50	1,61	2,06	2,46	3,33	7,14	9,77	20,60	26,37
$\rho=0,3$									
,50	1,00	8,76	8,08	15,13	13,85	40,53	36,95	86,86	79,91
,50	1,50	2,56	2,36	4,30	3,90	13,02	11,77	34,97	32,18
1,00	1,50	2,12	2,16	3,46	3,49	10,43	10,10	28,90	26,95
$\rho=0,7$									
,50	1,00	8,30	8,23	14,37	14,13	38,82	37,79	84,07	81,62
,50	1,50	1,88	2,34	2,99	3,86	8,90	11,66	25,15	32,07
1,00	1,50	2,56	2,28	4,29	3,69	13,00	10,70	34,93	28,36

Tabela B4. ARL do gráfico $SU \bar{X}$; $\delta_1 = \delta_2$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	,50	142,24	79,70	36,64	87,94	43,89	102,12	54,40	112,87	60,13
1,00	1,00	36,64	13,89	4,65	16,15	5,83	20,04	7,44	22,74	8,15
1,50	1,50	11,59	3,86	1,51	4,52	1,77	5,64	2,15	6,37	2,30
$\rho=0,3$										
,50	,50	143,44	80,82	37,50	89,03	44,76	102,98	55,05	113,43	60,51
1,00	1,00	37,50	14,45	4,95	16,73	6,15	20,49	7,65	23,01	8,25
1,50	1,50	12,10	4,13	1,62	4,80	1,90	5,86	2,22	6,49	2,33
$\rho=0,0$										
,50	,50	148,26	84,90	40,24	93,05	47,55	105,92	56,86	115,10	61,40
1,00	1,00	40,24	15,92	5,59	18,24	6,81	21,58	7,98	23,59	8,36
1,50	1,50	13,39	4,67	1,81	5,37	2,09	6,25	2,30	6,68	2,35
(a;b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	,50	142,24	79,70	36,64	98,09	54,79	142,24	106,52	193,84	170,95
1,00	1,00	36,64	13,89	4,65	19,34	7,96	36,64	22,17	66,24	51,65
1,50	1,50	11,59	3,86	1,51	5,50	2,27	11,59	6,40	24,61	17,82
$\rho=0,3$										
,50	,50	143,44	80,82	37,50	99,26	55,79	143,44	107,70	194,97	172,13
1,00	1,00	37,50	14,45	4,95	20,00	8,38	37,50	22,87	67,31	52,63
1,50	1,50	12,10	4,13	1,62	5,84	2,45	12,10	6,78	25,34	18,45
$\rho=0,7$										
,50	,50	148,26	84,90	40,24	103,68	59,21	148,26	112,24	199,62	176,93
1,00	1,00	40,24	15,92	5,59	21,84	9,36	40,24	24,88	71,07	55,95
1,50	1,50	13,39	4,67	1,81	6,57	2,78	13,39	7,60	27,49	20,19

Tabela B5. ARL do gráfico SU \bar{X} ; δ_1 ou $\delta_2=0$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,00	,50	205,44	130,96	66,34	154,93	95,18	205,44	165,30	254,45	233,87
,00	1,00	66,34	26,34	8,67	36,35	15,11	66,34	41,43	112,14	90,37
,00	1,50	22,03	7,12	2,38	10,34	3,96	22,03	12,10	45,76	33,58
$\rho=0,3$										
,00	,50	205,53	131,00	66,33	154,98	95,18	205,52	165,35	254,52	233,92
,00	1,00	66,33	26,32	8,66	36,34	15,09	66,34	41,42	112,18	90,38
,00	1,50	22,01	7,11	2,38	10,33	3,95	22,02	12,09	45,76	33,57
$\rho=0,7$										
,00	,50	202,77	128,20	64,36	152,35	92,86	204,23	163,55	254,19	233,30
,00	1,00	64,36	25,41	8,39	35,21	14,60	65,30	40,50	111,66	89,64
,00	1,50	21,25	6,90	2,34	10,01	3,86	21,59	11,81	45,42	33,17
(a;b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,00	,50	205,44	130,96	66,34	154,93	95,18	205,44	165,30	254,45	233,87
,00	1,00	66,34	26,34	8,67	36,35	15,11	66,34	41,43	112,14	90,37
,00	1,50	22,03	7,12	2,38	10,34	3,96	22,03	12,10	45,76	33,58
$\rho=0,3$										
,00	,50	205,53	131,00	66,33	154,99	95,19	205,53	165,36	254,54	233,96
,00	1,00	66,33	26,32	8,66	36,34	15,09	66,33	41,42	112,17	90,38
,00	1,50	22,01	7,11	2,38	10,33	3,95	22,01	12,09	45,74	33,56
$\rho=0,7$										
,00	,50	202,77	128,20	64,36	152,10	92,73	202,77	162,47	252,26	231,44
,00	1,00	64,36	25,41	8,39	35,12	14,58	64,36	40,05	109,52	87,99
,00	1,50	21,25	6,90	2,34	9,99	3,85	21,25	11,69	44,26	32,43

Tabela B6. ARL do gráfico SU \bar{X} ; $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	1,00	58,09	23,40	7,92	30,94	12,86	50,13	27,59	72,35	42,85
,50	1,50	21,07	6,91	2,34	9,88	3,82	19,95	10,64	37,46	23,91
1,00	1,50	17,47	5,85	2,06	7,77	2,97	12,63	5,37	17,72	7,18
$\rho=0,3$										
,50	1,00	58,71	23,76	8,08	31,43	13,17	50,82	28,23	73,03	43,49
,50	1,50	21,24	6,97	2,36	9,99	3,87	20,20	10,86	37,87	24,38
1,00	1,50	17,93	6,09	2,16	8,10	3,15	13,08	5,66	18,10	7,37
$\rho=0,7$										
,50	1,00	60,02	24,28	8,23	32,45	13,70	52,85	30,04	75,12	45,38
,50	1,50	21,10	6,89	2,34	9,96	3,85	20,59	11,21	38,88	25,58
1,00	1,50	18,94	6,46	2,28	8,75	3,46	14,18	6,27	19,02	7,73
(a;b)		(0; 0)			(0,2;0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	1,00	58,09	23,40	7,92	32,08	13,60	58,09	36,48	98,62	79,18
,50	1,50	21,07	6,91	2,34	9,99	3,87	21,07	11,67	43,37	31,94
1,00	1,50	17,47	5,85	2,06	8,39	3,33	17,47	9,77	35,78	26,37
$\rho=0,3$										
,50	1,00	58,71	23,76	8,08	32,52	13,85	58,71	36,95	99,42	79,91
,50	1,50	21,24	6,97	2,36	10,07	3,90	21,24	11,77	43,67	32,18
1,00	1,50	17,93	6,09	2,16	8,68	3,49	17,93	10,10	36,45	26,95
$\rho=0,7$										
,50	1,00	60,02	24,28	8,23	33,25	14,13	60,02	37,79	101,44	81,62
,50	1,50	21,10	6,89	2,34	9,97	3,86	21,10	11,66	43,62	32,07
1,00	1,50	18,94	6,46	2,28	9,21	3,69	18,94	10,70	38,23	28,36