UM MODELO MATEMÁTICO PARA OTIMIZAR O RETORNO SOBRE OS INVESTIMENTOS REALIZADOS NO MERCADO DE OPÇÕES: PETROBRAS E VALE

Anibal Alberto Vilcapoma Ignacio
Universidade Federal Fluminense - UFF
anibalvilcapoma@gmail.com

Erenildo Motta Da Silva Júnior
Universidade Federal Fluminense - UFF
erenildo_motta@hotmail.com

Léa Maria Dantas Sampaio
COPPE/UFRJ
leasampaio@gmail.com

Resumo

Os investimentos nos mercados de ações ou opções são cada vez maiores, mas a incerteza nas decisões de investimento faz desse complexo cenário um campo propício para a aplicação de técnicas da pesquisa operacional. Este artigo tem por objetivo desenvolver um modelo de programação linear genérico, baseado nos trabalhos de Papahristodoulou (2004) e Ignacio et al. (2012). O modelo é capaz de selecionar o melhor portfólio de opções sobre ações, maximizando sua rentabilidade com menor risco possível. O modelo foi testado numericamente em opções de compra e de venda sobre ações da Petrobras e da Vale do Rio Doce.
Palavras-Chaves: Finanças, Opções de investimento, programação matemática.

Abstract

Investments in shares or options markets are increasing, but the uncertainty in investment decisions makes this complex scenario a favorable field for the application of techniques of operations research. This article aims to develop a generic linear programming model, based on the works of Papahristodoulou (2004) and Ignacio et al. (2012). The model is able to select the best portfolio of stock options, maximizing their profitability with minimum risk. The model was tested numerically in buying and selling of options on shares of Petrobras and Vale do Rio Doce.
Keywords: Finance, investment options, mathematical programming.

1. INTRODUÇÃO

O intenso intercâmbio entre os países, fruto do processo de globalização, mostra que o mercado acionário vem crescendo em importância, no cenário financeiro internacional. Acompanhando a tendência mundial, os países emergentes buscam a abertura econômica para receberem investimentos externos, capazes de desenvolver suas economias e tornar seus mercados de capitais mais ativos.

Em processo de expansão, as empresas abrem seu capital para atraírem novos sócios, que são os acionistas, e assim conseguirem os recursos necessários para investirem em novos equipamentos ou em desenvolvimento de pesquisas. Já o investidor que está no mercado de ações ou opções busca obter o máximo de retorno de seu investimento com o menor risco possível. Com o avanço da informática, do acesso às informações e o aumento da eficiência dos sistemas financeiros, o investidor precisa executar poucos comandos para realizar operações em qualquer lugar do mundo, em tempo real.

Apesar de toda evolução, o risco continua existindo e a rentabilidade de um investimento é diretamente relacionada a ele. Então, para um investidor alcançar um maior retorno, ele precisa aceitar um nível maior de risco.

A incerteza nas decisões de investimento faz deste complexo cenário, onde os riscos e os potenciais ganhos e perdas podem ser enormes, um campo propício para a utilização de técnicas da pesquisa operacional (PO). Sendo assim, este trabalho tem o objetivo de apresentar um modelo de programação linear genérico, baseado no trabalho de [1] e [2], que seja capaz de determinar o melhor portfólio de opções sobre ações, buscando o máximo de retorno possível ao investidor com o menor risco possível.

O modelo desenvolvido leva em consideração o modelo de precificação de opções de *Black-Scholes.* Resultados computacionais são apresentados para diversos cenários, utilizando-se as opções da Petrobras (PETR4) e Vale do Rio Doce (VALE5). O modelo é implementado no *software* AIMMS.

A escolha do mercado de opções sobre ações no Brasil justifica-se porque é um mercado que possui um amplo volume de negócios diários.

O artigo, portanto se estrutura do seguinte modo: a seção 2 mostra uma breve descrição do mercado de opções, na seção 3 é apresentado o modelo de precificação de Black-Scholes, na qual são apresentados os conceitos de volatilidade, letras gregas e posições neutras; na seção 4, descreve-se a aplicação do modelo de programação linear e seus resultados numéricos. O artigo finaliza-se com suas considerações finais e referências bibliográficas.

2. O MERCADO DE OPÇÕES

Segundo [3], uma ação é definida como a menor parte do capital da empresa emissora. O investidor é dono de parte do capital da sociedade anônima, proporcional à quantidade de ações que o mesmo possui. Sendo assim, o retorno do seu investimento fica atrelado ao futuro da empresa.

As ações são negociadas nas bolsas de valores e em mercados de balcão organizado. Elas podem ser adquiridas no mercado primário ou secundário. O primário é quando as empresas lançam as ações no mercado para a captação de recursos, gerando riqueza para as mesmas. Após a negociação das ações no mercado primário, todas as outras operações são no mercado secundário, através do qual ocorre a troca de ações entre investidores, não gerando riqueza para as empresas.

Todas as ações negociadas no Brasil são nominativas ou escriturais. As nominativas são cautelas ou certificados com o nome do acionista, e a transferência é feita com a entrega da cautela e a averbação de termo no livro da empresa contendo o nome do novo acionista. As escriturais não necessitam de movimentação física de documentos e os lançamentos são feitos em um sistema onde os valores são lançados a débito ou a crédito dos acionistas.

As ações são classificadas como ordinárias ou preferenciais. As ordinárias são ações que garantem ao investidor o direito de voto, em assembleias gerais da empresa. Já as preferenciais garantem ao investidor prioridade no recebimento de dividendos, em relação às ordinárias e também no recebimento do reembolso do capital, em caso de dissolução da empresa.

A rentabilidade de investimento em ações é variável. O retorno pode vir de: dividendos, eventuais vendas das ações, dentre outros. Os dividendos são a forma mais importante de remuneração dos acionistas. Uma parcela do lucro da empresa é distribuída entre os acionistas, sob a forma de dividendos, em dinheiro.

O mercado de opções sobre ações é aquele onde são negociados direitos de compra e venda de lotes de ações, com preços determinados (preço de exercício), durante um prazo estabelecido (vencimento).

O Mercado de Opções é um dos mais novos mercados derivativos existentes. De acordo com [3], ele foi criado nos Estados Unidos, em 1973, com o objetivo de proteger os investidores contra possíveis perdas de mercado e variações adversas de taxas, moedas ou preços. Com as opções também é possível alavancar a posição dos investidores, tendo em vista que o investimento em opções exige menos capital do que a compra à vista do ativo. Dessa forma, o potencial retorno do investimento pode ser muito maior. As opções são derivativas, porque seus valores dependem ou derivam do valor de um ativo.

Por ser um mercado complexo, segundo [4], existem alguns termos utilizados no mercado de opções que precisam ser conhecidos:

- *Opção*: direito de comprar ou vender quantidade específica de um bem ou ativo, por preço determinado exercido em data futura prefixada;
- *Ativo*: bem, mercadoria ou ativo que está sendo negociado, como por exemplo, ações;
- *Titular*: investidor que compra a opção, adquirindo os direitos de comprar ou vender a opção;
- *Lançador*: investidor que vende a opção, cedendo os direitos ao titular e assumindo a obrigação de vender ou comprar o objeto da opção;
- *Prêmio*: preço da opção, negociado entre o titular e o lançador no momento da operação, ou seja, é o valor que o titular paga ao lançador da opção;
- *Preço de exercício*: valor estabelecido no contrato da opção pelo qual o titular pode exercer o seu direito de pagar ou receber pelo ativo;
- *Data de exercício*: também conhecida como vencimento da opção, é o último dia que o titular pode exercer seu direito de comprar ou vender as ações.

Existem dois tipos de opções: as de compra e as de venda. Além disso, as opções podem ser classificadas de acordo com seu tipo de exercício, sendo as mais comuns as europeias e as americanas, e também são classificadas de acordo com o preço da ação que ela corresponde.

2.1 OPÇÃO DE COMPRA

Uma opção de compra (*call*), garante ao titular o direito de comprar do lançador um lote de ações, pelo preço de exercício na data de vencimento da opção. O lançador tem a obrigação de vender as ações caso o titular exerça seu direito, recebendo por isso o valor do prêmio.

Segundo [2], o investidor que comprou a opção de adquirir um lote de ações em um determinado dia no futuro, deve ficar atento ao preço de mercado da ação na data de vencimento. Caso a ação esteja mais barata que o valor negociado, o investidor não deve exercer a opção de compra, pois será mais vantajoso perder o valor pago como prêmio e comprar as ações, à vista, no mercado. Se o preço de mercado for superior ao valor acordado, ele pode exercer seu direito de compra pelo menor preço.

2.2 OPÇÃO DE VENDA

A opção de venda (*put*), garante ao titular o direito de vender ao lançador um lote de ações, pelo preço de exercício na data de vencimento da opção. O lançador é obrigado a comprar as ações caso o titular exerça seu direito.

De acordo com [2], as opções de venda seguem o mesmo princípio das de compra. Caso a ação esteja mais barata que o valor negociado, o investidor pode exercer seu direito e vender as ações pelo maior preço. O lançador é obrigado a comprá-las. Em caso contrário, se o preço estiver mais alto, não vale a pena exercer a opção, pois é mais vantajoso vender as ações pelo preço de mercado. O investidor perde o valor pago como prêmio e o lançador deixa de ter a obrigação da compra, além de receber o prêmio.

2.3 OPÇÕES EUROPEIAS

Nas opções europeias, o titular só pode exercer seu direito na data de vencimento da opção. Nas opções americanas, o titular pode exercer seu direito a qualquer momento até a data de vencimento acordada com o lançador.

No Brasil, as opções de compra são do tipo americano e as opções de venda são do tipo europeu. No entanto, dificilmente uma opção é exercida antes da data de exercício, fazendo com que tenham um comportamento do tipo europeu. O vencimento das opções na BM&FBOVESPA acontece todas as terceiras segundas-feiras de cada mês.

De acordo com [5] o preço de uma opção pode consistir em dois valores: o valor intrínseco, que é a porção do preço da opção que está dentro do dinheiro, ou seja, abaixo do preço da ação para uma *call* e acima para uma *put*, e o valor extrínseco, que é a porção do preço além do valor intrínseco. Também pode ocorrer uma combinação dos dois valores.

2.4 CODIFICAÇÃO DAS OPÇÕES

O código das opções negociadas na BM&FBOVESPA é composto por cinco letras e dois números. As quatro primeiras letras indicam qual é o ativo, sendo as mesmas letras utilizadas no código desse ativo no mercado à vista. A última indica o mês de vencimento e se a opção é de compra ou venda. Os dois números do código indicam o preço de exercício da opção. Por exemplo, a opção PETRJ18 é uma opção de compra sobre a ação da Petrobrás, com vencimento em Outubro e preço de exercício de R$ 18,00. Para representar os meses de janeiro a dezembro as opções de call usa as letras do alfabeto de A a L e para PUT usa as letras do M até X.

Segundo [5], são cinco os fatores que afetam o preço das opções: o preço da ação no mercado à vista, o preço de exercício da opção, o tempo que resta até o vencimento, as taxas de juros praticadas no mercado e a volatilidade da ação.

A variação no preço da ação no mercado à vista produz variações imediatas no preço das opções. Para uma *call*, o aumento do preço da ação no mercado à vista aumenta a probabilidade de que a opção seja exercida, fazendo com que seu preço aumente. Para uma *put* acontece o inverso, e o preço da opção diminui com o aumento do preço da ação.

Quanto maior o preço de exercício de uma *call*, menor é a probabilidade de que ela seja exercida e também o seu valor. Já uma *put* com preço de exercício maior tem mais chances de ser exercida, logo o prêmio também será maior. As opções perdem valor com a passagem do tempo, independentemente do preço da ação. Isso acontece porque a passagem do tempo reduz a probabilidade de que aconteçam variações favoráveis no preço do ativo, fazendo com que esse fator seja o principal a ser observado. Quando as taxas de juros da economia aumentam, o preço de uma *call* tende a subir e o preço de uma *put* diminui.

A volatilidade da ação se relaciona diretamente com o preço das opções. Quanto maior a volatilidade, maior será o preço das opções, tanto para *call*s quanto para *puts*. Maior volatilidade significa uma maior oscilação no preço da ação, justificando o aumento do preço das opções.

3. MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE *BLACK-SCHOLES*

O modelo de precificação de opções é modelo matemático, através do qual se estima o preço teórico ou justo de uma opção, ou seja, é o valor que se for exercido não traz vantagem para compradores nem para vendedores. Porém, sabe-se que o mercado é regulado pela lei da oferta e da demanda, e o valor praticado por ele nem sempre é o mesmo que o preço justo calculado. O modelo de *Black-Scholes* é um dos mais utilizados para precificar opções no mercado brasileiro graças a sua simplicidade e menor quantidade de cálculos e dados. De acordo com [6], o modelo é criticado por alguns investidores devido a algumas suposições iniciais que são necessárias para a aplicação do modelo.

Segundo [7], o preço de uma opção europeia, de compra ou venda, é dado em função do preço do ativo, do preço de exercício, do tempo até o exercício, da taxa de juros livre de risco e da volatilidade do ativo.

A fórmula para o cálculo do preço justo para uma *call* é:

$$C = S.N(d_1) - Xe^{-rT}.N(d_2)$$

E a fórmula de cálculo para o preço teórico de uma *put* é:

$$P = Xe^{-rT}.N(-d_2) - S.N(-d_1)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{ln(S/_X)+\left(r+\sigma^2/_2\right).T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Sendo:

C: Preço justo da *call*;
T: Tempo até o vencimento;
P: Preço justo da *put*;
X: Preço de exercício;
S: Preço atual do ativo;
r: Taxa de juros livre de risco;
σ: Volatilidade do ativo no período
$N(d_1)$: Probabilidade do preço do ativo chegar ao vencimento acima do preço de exercício;
$N(d_2)$: Probabilidade do preço do ativo chegar ao vencimento abaixo do preço de exercício.

3.1. VOLATILIDADE

Segundo [8], a volatilidade é o fator mais crítico para o cálculo do preço das opções. Ele diz que existem no mercado vários tipos de volatilidade, destacando a volatilidade histórica, volatilidade futura e volatilidade implícita.

A volatilidade histórica mede a variação do preço de um ativo durante um determinado período de tempo e é calculada através do desvio padrão dos retornos históricos do ativo, sendo normalmente retornos logarítmicos. É importante saber que a volatilidade histórica faz parte do passado e não reflete, necessariamente, os acontecimentos do futuro.

A volatilidade futura é a que todos os investidores gostariam de conhecer, pois ela é a que melhor descreve a distribuição futura dos preços dos ativos. Conhecendo a volatilidade futura é possível saber a probabilidade de um ativo atingir certos níveis de preço no vencimento.

A volatilidade histórica e a volatilidade futura estão associadas ao ativo, já a volatilidade implícita, associada a uma opção. Ela é a volatilidade que iguala o preço da opção praticado no mercado ao preço teórico calculado por um modelo de precificação, no caso o de *Black-Scholes*. Não existe uma fórmula específica para calcular a volatilidade implícita, mas pode-se usar um método matemático como *Newton-Raphson* ou interpolação linear.

3.2. AS LETRAS GREGAS DAS OPÇÕES

Agora se mostra o significado das derivadas e dos parâmetros gregos, dentro do modelo de Black-Scholes, definido por [9] da seguinte maneira:

Delta $\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)$**:** Mede a sensibilidade de seu preço em relação ao preço do ativo, objeto do contrato, e pode ser entendido como um indicativo da exposição da opção às oscilações no preço deste ativo, no mercado à vista.

Gama $\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)$**:** É a sensibilidade do delta, em relação ao preço do ativo, objeto do contrato. Trata-se de uma medida de risco que ocorre, a partir do momento em que posições com elevados gamas podem rapidamente apresentar grandes lucros ou grandes perdas, em resposta a repentinas alterações no mercado. Costuma-se associar ao gama, o risco de uma mudança repentina na volatilidade instantânea do ativo objeto.

Teta $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$**:** Mede a sensibilidade do preço da opção à passagem do tempo. É uma boa medida do que se costuma chamar de *time decay:* a queda no prêmio de uma opção dada pela corrosão do seu valor no tempo, à medida que se aproxima o vencimento.

Rô $\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)$**:** É a medida de sensibilidade do preço da opção às variações na taxa de juro sem risco da economia. De uma forma geral, verifica-se que o preço das opções é muito pouco sensível às mudanças nas taxas de juros, já que raramente são observadas alterações bruscas significativas, no juro básico da economia.

Kappa $\left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right)$**:** Mede a sensibilidade do preço da opção às variações na volatilidade implícita do ativo objeto no mercado à vista. Essa volatilidade deveria refletir a variabilidade que o mercado espera nos retornos dos ativos, ao longo da vida da opção, e é essa sensibilidade que o kappa traduzirá. O kappa normalmente é padronizado no mercado para refletir a variação no preço da opção, dada uma alteração de 1% na volatilidade implícita pelo mercado de opções.

O cálculo desses parâmetros pode ser facilmente feito com o auxílio de recursos computacionais. A Tabela 1 mostra a expressão matemática de cada um dos parâmetros citados acima, tanto para uma opção de compra, quanto para uma de venda.

Delta	$N(d_1)$
Gama	$\frac{N'(d_1)}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}}$
Teta	$\frac{-S \cdot N'(d_1)}{2 \cdot \sqrt{t}} - r \cdot E \cdot e^{-rt} N(d_2)$
Rô	$E \cdot t \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2)$
Kappa (Vega)	$S \cdot N'(d_1) \cdot \sqrt{t}$

Tabela 1 – Expressão matemática dos parâmetros gregos para uma call

3.3. POSIÇÕES NEUTRAS

Segundo [10], as posições neutras são caracterizadas por eliminar quase que completamente os riscos envolvidos nos negócios com opções. Para se conseguir tal neutralidade, é necessário que a soma de todos os *deltas*, *gamas*, *thetas*, *rhos* e *kappas* seja igual a zero. Sendo assim, é possível eliminar o risco de oscilações do preço do ativo (*delta*), de mudanças na volatilidade instantânea do ativo (*gama*), da queda no preço com o passar do tempo (*theta*), da mudança no preço devido às variações da taxa de juros livre de risco (*rho*) e de erros na avaliação na volatilidade futura percebida pelo mercado (*kappa*).

4. MODELO PROPOSTO

Baseado nos artigos publicados por [1] e [2], o presente trabalho busca determinar qual o melhor portfólio de opções sobre ações, sem a necessidade de decidir qual a melhor estratégia a ser seguida.

Em seu trabalho, [1] buscou uma operação com *calls* e *puts* sobre a ação da *Erickson,* a partir dos parâmetros gregos do modelo de *Black-Scholes*. Para isso, considerou várias modelagens distintas, utilizando diferentes quantidades de gregas, desde uma até todas. O autor percebeu que, quanto menos gregas envolvidas, maior foi o valor alcançado pela função objetivo, por se tratar de um portfólio com maior nível de risco, cabendo ao investidor decidir se está disposto a aceitar esse risco. Também verificou que a lucratividade depende do tamanho da operação, ou seja, quanto mais opções negociadas, maior é o valor da função objetivo. Ignácio *et al*. [2] formularam um modelo de programação linear genérico para ser testado com os dados do trabalho de [1]. Neste trabalho, o modelo genérico proposto não considera nenhuma estratégia de operação com opções, já que o objetivo não é buscar a melhor estratégia, mas sim a solução ótima fornecida pelo modelo. Para simplificar o modelo não são considerados os custos de transações do mercado de opções. Onde:

i: Indica se a opção é uma *call* (1) ou uma *put* (2);
j: Mês de vencimento da opção;
k: Preço de exercício.

Para a formulação do modelo são usados os seguintes parâmetros:

$\boldsymbol{P_T}$: Preço teórico da opção, calculado pelo modelo de *Black-Scholes*;

$\boldsymbol{P_M}$: Preço de mercado da opção;

As seguintes variáveis:

$\boldsymbol{C_{i,j,k}}$: Percentual do número de opções do tipo *i* que serão compradas com data de vencimento em *j* e preço de exercício *k*;

$\boldsymbol{V_{i,j,k}}$: Percentual do número de opções do tipo *i* que serão vendidas com data de vencimento em *j* e preço de exercício *k*.

Modelo

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left[\left(P_{T(i,j,k)} - P_{M(i,j,k)}\right)\cdot C_{(i,j,k)}\right] - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left[\left(P_{T(i,j,k)} - P_{M(i,j,k)}\right)\cdot V_{(i,j,k)}\right] \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Delta_{i,j,k}\,.\,C_{i,j,k}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Delta_{i,j,k}\,.\,V_{i,j,k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k C_{i,j,k} - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k V_{i,j,k} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Gamma_{i,j,k}\,.\,C_{i,j,k}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Gamma_{i,j,k}\,.\,V_{i,j,k}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Theta_{i,j,k}\,.\,C_{i,j,k}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\Theta_{i,j,k}\,.\,V_{i,j,k}\right) = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\rho_{i,j,k}\,.\,C_{i,j,k}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(\rho_{i,j,k}\,.\,V_{i,j,k}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(K_{i,j,k}\,.\,C_{i,j,k}\right) - \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k\left(K_{i,j,k}\,.\,V_{i,j,k}\right) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_j\sum_k\left(\Delta_{1,j,k}\,.\,C_{1,j,k}\right) + \sum_j\sum_k\left(\Delta_{2,j,k}\,.\,V_{2,j,k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k C_{i,j,k} \leq 1000 \quad (7)$$

$$\sum_j\sum_k\left(\Delta_{1,j,k}\,.\,V_{1,j,k}\right) + \sum_j\sum_k\left(\Delta_{2,j,k}\,.\,C_{2,j,k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k V_{i,j,k} \leq 1000 \quad (8)$$

$$Y_{1,j,k,1} + Y_{1,j,k,2} \leq 1\ ,\ \forall\, j,k \quad (9)$$

$$C_{1,j,k} \leq M\,.\,Y_{1,j,k,1}\ ,\ \forall\, j,k \quad (10)$$

$$V_{1,j,k} \leq M\,.\,Y_{1,j,k,2}\ ,\ \forall\, j,k \quad (11)$$

$$Y_{2,j,k,1} + Y_{2,j,k,2} \leq 1\ ,\ \forall\, j,k \quad (12)$$

$$C_{2,j,k} \leq M\,.\,Y_{2,j,k,1}\ ,\ \forall\, j,k \quad (13)$$

$$V_{2,j,k} \leq M\,.\,Y_{2,j,k,2}\ ,\ \forall\, j,k \quad (14)$$

$$\frac{\sum_j\sum_k\left(V_{1,j,k}\right)}{\sum_j\sum_k\left(C_{1,j,k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k C_{i,j,k}} \leq N \quad (15)$$

$$\frac{\sum_j\sum_k\left(V_{2,j,k}\right)}{\sum_j\sum_k\left(C_{2,j,k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\sum_j\sum_k V_{i,j,k}} \leq N \quad (16)$$

$$Y_{1,j,k},\ Y_{1,j,k} \in \{0,1\}\ ,\ \forall\, j,k \quad (17)$$

$$C_{i,j,k},\ V_{i,j,k} \geq 0\ ,\ \forall\, j,k \quad (18)$$

A função objetivo (1), é dada pela maximização da soma das diferenças entre o número de opções, de compra e de venda.

Na restrição (2),(3),(4),(5) e (6) tratam das posições neutras, *deltas*, *gamas*, *thetas*, *rhos* e *kappas* e buscam reduzir os riscos envolvidos nos negócios com opções.

Na restrição (7) e (8) limita a 1000 o somatório das compras de *call* do tipo *delta*, mais o somatório das vendas de *put* do tipo *delta*, mais o somatório das opções compradas. A restrição (9) garante que não será comprada e nem vendida uma mesma opção simultaneamente do tipo *Call*. Neste caso, são usadas as variáveis binárias $y_{1,j,k,1}$ e $y_{1,j,k,2}$

Nas restrições (10) e (11) se garante que somente é adquirida ou vendida uma opção quando a variável de decisão binária é 1. Neste caso, usa-se o valor de M, igual ou maior do que 1000. A restrição (12) garante que não será comprada e nem vendida uma mesma opção simultaneamente do tipo *Put*. Neste caso, são usadas as variáveis binárias $y_{2,j,k,1}$ e $y_{2,j,k,2}$.

Na restrição (13) e (14) se garante que somente é adquirida ou vendida uma opção, quando a variável de decisão binária é 1. Neste caso, usa-se o valor de M, igual ou maior do que 1000. Nas restrições (15) e (16) se estabelece limite para as opções compradas e vendidas e para as razões entre *calls* e *puts*.

4.1. TESTE DO MODELO

O modelo apresentado neste trabalho é testado com as opções sobre ações preferenciais da Petrobras (PETR4) e Vale do Rio Doce (VALE5). As escolha das duas empresas escolhidas se justifica, pois, segundo [11], as opções sobre ações da Petrobras e da Vale representam 67,8% do volume médio diário negociado do mercado de opções.

Inicialmente, considerando-se a data de 18 de setembro de 2013, observa-se os preços dos ativos PETR4 e VALE5, no mercado à vista. PETR4 estava cotada em R$ 18,90 e VALE5 em R$ 33,00. Também se observa os preços de mercado de *calls* e *puts* sobre esses ativos, com vencimento em 21 de outubro 2013 e 18 de novembro de 2013. O número de dias até o vencimento para outubro é de 32 dias e para novembro é de 60 dias. A taxa Selic é a taxa básica de juros da economia brasileira, definida em reuniões do Comitê de Política Monetária (COPOM) do BACEN. Em 28 de agosto de 2013, o COPOM anunciou o aumento da taxa Selic para 9,00% ao ano.

A volatilidade dos ativos é calculada pela própria BM&FBOVESPA, através do método *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), ou seja, médias móveis exponencialmente ponderadas, que atribui pesos exponencialmente decrescentes, de acordo com a idade dos dados. A volatilidade calculada para PETR4 é de 32,61% ao ano e para VALE5 é de 29,69%. A Tabela 2 a seguir mostra os valores de *calls* e *puts* disponíveis para o teste.

Índice	Call	Vencimento	Preço de Exercício (R$)	Índice	Put	Vencimento	Preço de Exercício (R$)
1	PETRJ18	Outubro	17,34	10	PETRV18	Outubro	17,34
2	PETRJ19	Outubro	18,34	11	PETRV19	Outubro	18,34
3	PETRJ20	Outubro	20	12	PETRV20	Outubro	20
4	PETRK18	Novembro	17,34	13	PETRW46	Novembro	16,5
5	PETRK20	Novembro	19,34	14	PETRW57	Novembro	28,25
6	VALEJ34	Outubro	33,24	15	VALEV34	Outubro	33,24
7	VALEJ35	Outubro	35	16	VALEV35	Outubro	35
8	VALEK34	Novembro	34	17	VALEW32	Novembro	31,24
9	VALEK35	Novembro	35	18	VALEW33	Novembro	33

Tabela 2 – dados disponíveis para o teste do modelo.

Com todos os dados apresentados acima, é possível calcular os preços teóricos de cada *call* e *put*, através do modelo de *Black-Scholes*, e também os parâmetros gregos.

Para a realização dos testes do modelo, são considerados quatro cenários distintos. No primeiro cenário, os preços teóricos das *calls* e *puts* e os parâmetros gregos são calculados, considerando-se os dados reais do problema proposto, ou seja, os dados apresentados acima. A Tabela 3, mostrada em seguida, traz os dados utilizados para o teste.

Para o segundo cenário, é considerado um aumento na taxa básica de juros da economia, considerando-se os demais dados de entrada como constantes. Os preços teóricos das *calls* e *puts* e os parâmetros gregos foram recalculados utilizando uma taxa de juros de 15% ao ano.

No terceiro e quarto cenários, a volatilidade que está alterada e os demais dados de entrada são considerados constantes. O terceiro cenário apresenta uma volatilidade de 37,61% para PETR4, e de 34,69% para VALE5. O quarto cenário é considerado uma diminuição na volatilidade dos ativos, com 27,61% para PETR4 e 24,69% para VALE5. A Tabela 4 mostra os dados utilizados para testar o modelo, nestes cenários.

Realizar esses testes é importante para verificar a sensibilidade e ver como o modelo se comporta com a mudança de alguns parâmetros.

		Cenario 1							Cenario 2						
K	Call Put	$P_M(R\$)$	$P_T(R\$)$	Delta	Gama	Theta	Rho	Kappa	$P_M(R\$)$	$P_T(R\$)$	Delta	Gama	Theta	Rho	Kappa
1	PETRJ18	1,86	1,85	0,85	0,13	-3,74	1,24	1,32	1,86	1,92	0,86	0,12	-4,47	1,25	1,25
2	PETRJ19	1,11	1,12	0,67	0,20	-4,81	1,01	2,03	1,11	1,18	0,69	0,19	-5,45	1,04	1,97
3	PETRJ20	0,30	0,37	0,32	0,20	-4,26	0,51	2,01	0,30	0,40	0,34	0,20	-4,75	0,54	2,06
4	PETRK18	2,15	2,12	0,80	0,11	-3,31	2,13	2,17	2,15	2,25	0,82	0,11	-3,99	2,17	2,03
5	PETRK20	0,85	0,92	0,50	0,16	-3,80	1,41	3,06	0,85	1,01	0,53	0,16	-4,38	1,48	3,05
6	VALEJ34	1,05	1,17	0,52	0,14	-8,03	1,40	3,89	1,05	1,25	0,54	0,14	-9,07	1,46	3,87
7	VALEJ35	0,41	0,52	0,30	0,12	-6,55	0,81	3,38	0,41	0,57	0,32	0,12	-7,38	0,87	3,48
8	VALEK34	1,21	1,36	0,47	0,10	-6,10	2,35	5,33	1,21	1,50	0,51	0,10	-7,10	2,50	5,34
9	VALEK35	0,81	0,98	0,38	0,10	-5,64	1,90	5,09	0,81	1,10	0,41	0,10	-6,57	2,05	5,21
10	PETRV18	0,20	0,15	-0,15	0,13	-2,19	-0,27	1,32	0,20	0,14	-0,14	0,12	-1,91	-0,25	1,25
11	PETRV19	0,42	0,42	-0,33	0,20	-3,17	-0,58	2,03	0,42	0,38	-0,31	0,19	-2,74	-0,55	1,97
12	PETRV20	1,23	1,31	-0,68	0,20	-2,47	-1,23	2,01	1,23	1,24	-0,66	0,20	-1,79	-1,20	2,06
13	PETRW46	0,32	0,15	-0,11	0,08	-1,26	-0,38	1,48	0,32	0,13	-0,10	0,07	-1,03	-0,33	1,35
14	PETRW57	9,31	8,94	-1,00	0,00	2,45	-4,47	0,05	9,31	8,66	-1,00	0,00	-4,06	-4,52	0,06
15	VALEV34	1,09	1,15	-0,48	0,14	-5,05	-1,49	3,89	1,09	1,06	-0,46	0,14	-4,14	-1,41	3,87
16	VALEV35	2,09	2,24	-0,70	0,12	-3,43	-2,23	3,38	2,09	2,11	-0,68	0,12	-2,20	-2,16	3,48
17	VALEW32	0,63	0,67	-0,26	0,08	-3,09	-1,53	4,35	0,63	0,58	-0,24	0,08	-2,46	-1,37	4,12
18	VALEW33	1,29	1,34	-0,43	0,10	-3,35	-2,54	5,25	1,29	1,20	-0,40	0,10	-2,52	-2,34	5,15

Tabela 3 - Dados utilizados para o teste do cenário 1 e cenário 2.

		Cenario 3							Cenario 4						
K	Call Put	$P_M(R\$)$	$P_T(R\$)$	Delta	Gama	Theta	Rho	Kappa	$P_M(R\$)$	$P_T(R\$)$	Delta	Gama	Theta	Rho	Kappa
1	PETRJ18	1,86	1,92	0,82	0,13	-4,41	1,18	1,49	1,86	1,79	0,88	0,13	-3,07	1,31	1,10
2	PETRJ19	1,11	1,22	0,65	0,18	-5,43	0,98	2,06	1,11	1,02	0,69	0,23	-4,18	1,06	1,96
3	PETRJ20	0,30	0,47	0,35	0,18	-5,01	0,54	2,08	0,30	0,27	0,29	0,22	-3,48	0,46	1,91
4	PETRK18	2,15	2,23	0,77	0,11	-3,77	2,02	2,33	2,15	2,02	0,83	0,12	-2,85	2,25	1,93
5	PETRK20	0,85	1,08	0,51	0,14	-4,27	1,40	3,06	0,85	0,77	0,49	0,19	-3,34	1,40	3,06
6	VALEJ34	1,05	1,36	0,52	0,12	-9,13	1,39	3,89	1,05	0,97	0,52	0,17	-6,93	1,41	3,89
7	VALEJ35	0,41	0,69	0,33	0,11	-7,90	0,89	3,53	0,41	0,36	0,25	0,13	-5,14	0,71	3,13
8	VALEK34	1,21	1,62	0,49	0,09	-6,92	2,37	5,33	1,21	1,09	0,46	0,12	-5,26	2,32	5,31
9	VALEK35	0,81	1,24	0,40	0,08	-6,56	1,99	5,18	0,81	0,73	0,35	0,11	-4,68	1,77	4,95
10	PETRV18	0,20	0,22	-0,18	0,13	-2,86	-0,32	1,49	0,20	0,09	-0,12	0,13	-1,52	-0,20	1,10
11	PETRV19	0,42	0,52	-0,35	0,18	-3,79	-0,62	2,06	0,42	0,32	-0,31	0,23	-2,54	-0,54	1,96
12	PETRV20	1,23	1,41	-0,67	0,18	-3,22	-1,20	2,08	1,23	1,21	-0,71	0,22	-1,70	-1,28	1,91
13	PETRW46	0,32	0,23	-0,14	0,08	-1,72	-0,48	1,74	0,32	0,08	-0,08	0,07	-0,82	-0,26	1,15
14	PETRW57	9,31	8,94	-0,99	0,01	2,33	-4,56	0,15	9,31	8,94	-1,00	0,00	2,50	-4,57	0,01
15	VALEV34	1,09	1,34	-0,48	0,12	-6,16	-1,50	3,89	1,09	0,95	-0,48	0,17	-3,97	-1,48	3,89
16	VALEV35	2,09	2,42	-0,67	0,11	-4,77	-2,16	3,53	2,09	2,08	-0,75	0,13	-2,01	-2,34	3,13
17	VALEW32	0,63	0,89	-0,29	0,07	-3,87	-1,70	4,55	0,63	0,46	-0,23	0,09	-2,32	-1,31	4,04
18	VALEW33	1,29	1,60	-0,43	0,08	-4,12	-2,60	5,26	1,29	1,08	-0,42	0,12	-2,58	-2,46	5,23

Tabela 4: Dados utilizados para o teste do cenário 3 e cenário 4.

4.2. Resultados

O modelo descrito anteriormente é implementado para os quatro cenários propostos, apresentando os portfólios de opções sobre ações escolhidos. Os resultados são mostrados na Tabela 5.

Cenário	Transação	Quantidade	Código	i	j	k	Preço de Exercício	Função Objetivo
1	Compra	2%	VALEK34	Call	Novembro	8	34,0	233,0
	Compra	27%	PETRV18	Put	Outubro	10	17,3	
	Compra	5%	PETRV20	Put	Outubro	12	20,0	
	Compra	19%	VALEV35	Put	Outubro	16	35,0	
	Vende	9%	VALEJ34	Call	Outubro	6	33,2	
	Vende	26%	PETRW46	Put	Novembro	13	16,5	
	Vende	12%	PETRW57	Put	Novembro	14	28,3	
2	Compra	6%	PETRJ20	Call	Outubro	3	20,0	234,0
	Compra	29%	PETRV18	Put	Outubro	10	17,3	
	Compra	3%	PETRV20	Put	Outubro	12	20,0	
	Compra	13%	VALEV35	Put	Outubro	16	35,0	
	Vende	46%	PETRW46	Put	Novembro	13	16,5	
	Vende	3%	PETRW57	Put	Novembro	14	28,3	
3	Compra	3%	VALEJ35	Call	Outubro	7	35,0	235,0
	Compra	25%	PETRV18	Put	Outubro	10	17,3	
	Compra	5%	PETRV20	Put	Outubro	12	20,0	
	Compra	21%	VALEV35	Put	Outubro	16	35,0	
	Vende	12%	VALEJ34	Call	Outubro	6	33,2	
	Vende	21%	PETRW46	Put	Novembro	13	16,5	
	Vende	13%	PETRW57	Put	Novembro	14	28,3	
4	Compra	3%	VALEJ34	Call	Outubro	6	33,2	244,0
	Compra	29%	PETRV18	Put	Outubro	10	17,3	
	Compra	24%	VALEV35	Put	Outubro	16	35,0	
	Vende	5%	VALEK34	Call	Novembro	8	34,0	
	Vende	23%	PETRW46	Put	Novembro	13	16,5	
	Vende	16%	PETRW57	Put	Novembro	14	28,3	

Tabela 5 - Resultados dos testes, nos quatro cenários.

Na Tabela 5 acima, a segunda coluna informa o tipo de transação que deve ser feita, ou seja, se a opção deve ser comprada ou vendida. A terceira coluna mostra a quantidade de opções que deve ser comprada ou vendida. A quarta coluna traz o código das opções selecionadas. A quinta coluna mostra se a opção é *call* ou *put*. A sexta diz qual é o mês de vencimento das opções. A sétima e a oitava indicam, respectivamente, o índice e o preço de exercício das opções. A última coluna mostra o valor da função objetivo, ou seja, o lucro alcançado, caso as opções sejam compradas e vendidas. Os resultados são obtidos, utilizando-se todas as restrições do modelo.

Apesar dos resultados alcançados pela função objetivo estarem próximos, em todos os cenários, o modelo mostra-se sensível à alteração de alguns parâmetros, nos dados de entrada, selecionando-se algumas opções diferentes. Nas opções que são selecionadas em mais de um cenário, as quantidades compradas e vendidas também são diferentes. Além disso, todos os resultados apresentam lucro, nas operações.

Salienta-se que em todos os resultados obtidos, o modelo não considera nenhuma estratégia de operação com opções e nem os custos das transações.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do estudo realizado, conclui-se que a programação linear é uma ferramenta excelente para simplificar problemas como o apresentado neste trabalho, pois sem a utilização da mesma, seria praticamente impossível definir a quantidade e quais opções devem ser compradas e vendidas para o portfólio atingir o maior lucro possível.

Os resultados alcançados em todos os cenários apresentam lucros e o modelo se mostra sensível às alterações nos dados de entrada, como o aumento na taxa básica de juros da economia e a mudança nos percentuais da volatilidade dos ativos.

Apesar dos benefícios do modelo proposto, as limitações apresentadas nos testes podem prejudicar o resultado final. Como os custos de transações praticados no mercado não estão sendo considerados, os resultados apresentados apenas se aproximam da realidade. Considerando-se que o modelo não encontra nenhuma solução inteira, o resultado não mostra a realidade do mercado, tendo em vista que as operações com opções são sempre realizadas em lotes de 100.

Ainda que tenha limitações, o modelo mostra-se consistente, eficiente e de grande valia, já que ele possibilita atingir o melhor resultado, com menos riscos, sem a necessidade de decidir qual a melhor estratégia de mercado.

Sendo assim, o modelo proposto pode ser usado como uma alternativa de tomada de decisão para os investidores que desejam entrar no mercado de opções, com mínima exposição ao risco, buscando atingir mais lucros.

Para trabalhos futuros, sugere-se que sejam estudadas alternativas de modelagem para que seja alcançada uma solução inteira, juntamente com a criação de restrições para limitar as compras e vendas de opções em lotes de 100.

Outra linha de trabalho seria incluir no modelo estratégias de operações que envolvam a compra e venda de *calls* e *puts* e também de ações, além da inclusão dos custos de transação envolvidos. Com essas adaptações os resultados poderão ser mais satisfatórios.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PAPAHRISTODOULOU, Christos. Options Strategies with Linear Programming. European Journal of Operational Research 157, p. 246-256, 2004.

[2] IGNACIO, A. A. V.; COELHO, S. T.; MEZA, E. B. M.; VIANNA, D. S.. Modelo de Otimização Aplicado ao Mercado de Opções. In: XIX Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), Bauru-SP, 2012.

[3] OLIVEIRA, Gilson; PACHECO, Marcelo. Mercado Financeiro. 2ª ed. São Paulo: Editora Fundamento Educacional, 2011.

[4] BM&FBOVESPA, Instituto Educacional. Apostila PQO BM&FBOVESPA. São Paulo, 2012. (<http://lojavirtual.bmf.com.br/LojaIE/portal/pages/pdf/APO_PQO_V2.completa.pdf.>. Acesso em: 10 de setembro de 2013).

[5] HISSA, Maurício. Operando Opções: Guia Avançado de Operações com Opções. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

[6] HISSA, Maurício. Investindo em Opções: Como Aumentar seu Capital Operando com Segurança. 6ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

[7] BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Chicago: Journal of political economy, v. 81, 1973.

[8] CASPARY, Michel Cardonsky. Modelo Genético-Neural para Otimização de Carteiras com Opções Financeiras no Mercado Brasileiro. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2012.

[9] GAARDER HUANG E.,(2006), The complete Guide to options Princing Formulas, McGraw-Hill; 2 d, New York.

[10] SOUZA, Luiz Alvares Rezende de. Estratégias para Aplicação no Mercado Brasileiro de Opções. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Economia) – Universidade de São Paulo, 1996.

[11] BM&FBOVESPA. Demonstrações Financeiras Trimestrais – 3º Trimestre de 2013. São Paulo: BM&FBOVESPA, 2013.