

APROXIMAÇÃO EXTERNA/DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS PARA PROJETO DE REDES SOB CONGESTIONAMENTO VIA λ -ÓTIMO

Karolliny Danielle Santos

Universidade Federal de Minas Gerais
UFMG - Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
CEP: 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
karollinny.ds@gmail.com

Gilberto de Miranda Júnior

Universidade Federal de Minas Gerai
UFMG - Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
CEP: 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
miranda@dep.ufmg.br

Ricardo Saraiva de Camargo

Universidade Federal de Minas Gerai
UFMG - Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
CEP: 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
rcamargo@dep.ufmg.br

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se a técnica de seleção de cortes de Benders conhecida como λ -ótimo ao problema de projeto de redes sob congestionamento, via Aproximação Externa/ Decomposição de Benders. O problema de projeto de redes tem uma ampla aplicação em atividades de planejamento, estratégias de empresas que operam sistemas de distribuição, produção, transporte de energia, matéria, etc; visa atender as demandas dos clientes, assegurar o lucro e a eficiência da operação e respeitar os níveis de serviço pré-estabelecidos. Deste esforço de modelagem derivou um programa não-linear, NP-difícil e de grande porte. Experimentos computacionais e comparações com versões mais simples demonstram o sucesso do esquema adotado.

Palavras chave: Projeto de Redes com Custos Convexos; Método de Decomposição de Benders; Aproximação Externa; Esquema λ -ótimo.

ABSTRACT

This work presents the Benders selection cuts technique known as Optimal-lambda to the network congestion project problem, which uses Outer approximation / Benders decomposition. The network project problem has a wide application in planning activities, business strategies that operate at distribution systems, production, energy transport, material, etc; proposes attend the customer demand, ensure profit and efficiency of the operation and respect the pre-established service levels. This modeling derived a nonlinear program, which is a large scale NP-hard. Computational experiments and comparisons with standard versions demonstrate the efficiency of the proposed approach.

Keywords: Convex network design; Benders decomposition; Outer approximation; Optimal-lambda scheme.

1. Introdução

As redes são as veias entre todas as atividades de comunicação espalhadas pelo espaço e tempo. A variedade de tipos de redes inclui os sistemas de distribuição de energia, fornecimento de água, serviços de saúde, malhas ferroviárias e rodoviárias, sistemas de estradas, redes de telecomunicações, etc. As redes de energia fornecem a alimentação para execução de atividades econômicas; redes de transporte possibilitam a movimentação de pessoas, bens e serviços; redes de comunicação permitem a troca de informações e mensagem.

Dado um grafo, o problema de projeto de redes consiste em encontrar um subgrafo que liga um nó fornecedor a um nó de demanda a um custo mínimo. O principal objetivo do problema é atender as demandas dos clientes, assegurar o lucro e a eficiência da operação e respeitar os níveis de serviço pré-estabelecidos. Deve-se considerar tanto a adequação dos níveis de serviços da infraestrutura afim de manter o nível de serviço necessário quanto a necessidade de operação otimizada que racionalize o uso da capacidade instalada. Segundo [Dias et al. \(2011\)](#) demonstrar um bom comportamento no que diz respeito às duas versões compreende investir mais em infra-estrutura e aumentar a capacidade instalada ou priorizar a otimização das práticas operacionais, buscar o equilíbrio entre essas versões é a raiz de uma estratégia bem sucedida, uma forma de tal equilíbrio é estudar o problema sob a perspectiva da *Programação Matemática*.

Conforme [Maculan \(1987\)](#) este problema pode ser visto, do ponto de vista matemático, como uma extensão do *Problema da Árvore de Steiner* em um grafo dirigido. De acordo com [Maculan \(1987\)](#) e [Hwang and Richards \(1992\)](#) desprezando os custos de transmissão e de serviço nas conexões, um *Problema de Steiner* é gerado, enquanto para [Dantzig \(1962\)](#) um problema de transbordo de fonte única é obtido quando desconsidera-se os custos fixos.

Um dos principais trabalhos abordando projeto de redes com congestionamento foi proposto por [Miranda et al. \(2011\)](#), no qual considera uma formulação de multimercadoria que é capaz de lidar com o projeto de redes de computadores centralizados, *multi-cast*, *multi-party* ou árvores de transporte baseados em hub. [Dias et al. \(2011\)](#) aborda o mesmo problema resolvendo-o por meio do Método de Decomposição de Benders Generalizado e Aproximação Externa; o problema consiste basicamente em ligar um servidor aos seus diversos clientes dispersos geograficamente, satisfazendo a demanda a um custo mínimo total.

As várias aplicações do problema em estudo são vistas nas áreas de distribuição de energia elétrica como em [Dantzig \(1962\)](#) e [Ramírez-Rosado and Domínguez-Navarro \(2006\)](#), de transporte de cargas fracionadas ([Cordeau et al. \(2006\)](#)), de transporte público ([Contreras et al. \(2009\)](#); [Contreras et al. \(2010\)](#)), de rede de acesso local de telefonia ([Randazzo and Luna \(2001\)](#)), e de redes de computadores ([Klincewicz \(1998\)](#), [Altıparmak et al. \(2003\)](#)). Um excelente *survey* envolvendo diferentes variações do problema e de suas técnicas de solução pode ser encontrado em ([Costa \(2005\)](#)).

Neste trabalho problemas de projeto de redes congestionadas são abordados. Apresenta-se a extensão dos trabalhos de [Miranda et al. \(2011\)](#) e [Dias et al. \(2011\)](#) onde considera-se o problema de projeto de redes sob congestionamento apresentando técnicas de seleção de cortes de Benders conhecida como λ -ótimo atacado via Aproximação Externa/Decomposição de Benders (OA+BD). No problema associa-se a cada arco da rede três custos: custo fixo que representa a conexão do arco, um custo operacional unitário de transmissão de uma unidade de fluxo através do arco e um custo de congestionamento não linear. Além disso, o problema pode ter terminais heterogêneos, como o nó de *Steiner* ou de transbordo. Apresenta-se redes arborescentes de fonte única com custos convexos, considerando custos de instalação, infra-estrutura, transporte e congestionamento. Esses últimos são responsáveis pela degradação dos níveis de serviço e economia de escala em cada arco.

Em termos gerais as técnicas propostas aqui podem ser empregadas em problemas reais de projeto de rede de distribuição de energia ou de redes de dados, no entanto, este modelo descreve melhor problemas de redes de transportes de informação; para estudos posteriores pode-se fazer as adequações necessárias, na linha proposta por [Benchakroun et al. \(1992\)](#) onde é possível abordar

problemas de projeto de redes de transmissão de energia que envolvam funções sofisticadas, desde que o esforço de convexificação garanta boa previsão na descrição dos efeitos não-lineares.

Formulações matemáticas são desenvolvidas para projeto de redes sob congestionamento. Até hoje tais problemas não podem ser resolvidos eficientemente, sendo assim, a principal contribuição deste trabalho concentra-se na resolução de um problema não-linear, NP-difícil e de grande porte de forma eficiente. Estabelecida a relevância de tais problemas, desenvolve-se um eficiente algoritmo para resolver o problema. Utiliza-se técnicas de Decomposição de Benders (BD) e o método de Aproximação Externa (OA), além da técnica λ -ótimo para acelerar a convergência dos métodos, esta combinação permitiu reduzir o tempo computacional de resolução e aumentar o tamanho da rede usadas como teste. Resultados experimentais confirmam a eficiência deste algoritmo ao resolver instâncias de grande porte.

O trabalho está assim organizado: na Seção 2, são apresentadas as definições usadas e a formulação proposta. Na Seção 3: Metodos de resolução: A decomposição de Benders e a Aproximação Externa são formalizadas. Na Seção 4: Apresenta-se alguns metodos de aceleração de convergência do algoritmo. Por fim, os experimentos computacionais e os comentários finais são feitos nas Seções 5 e 6 respectivamente.

2. Definições e Formulação

Uma rede genérica é representada por grafo direcionado $\Gamma(V, E)$, onde V e E são os conjuntos de nós e arcos, que representam as possíveis conexões. Um arco ou ligação entre os nós i e j é representado por $(i, j) \in E$, onde $i, j \in V$, e o índice $k \in K$. Seja s é o nó fonte, que deve enviar a energia, matéria ou informação a K de nós de demanda d_k , e K é o conjunto de nós de demanda, onde $K \subseteq V$.

O custo unitário de transporte/transmissão da demanda no nó $k \in K$ no arco $(i, j) \in E$ é representado por c_{ijk} . Assume-se $c_{ijk} = \theta_{ij}^k \delta_{ij}$, onde θ^k é o custo específico de transporte de demanda do nó k , e δ_{ij}^k é a distância entre os nós i e j , o custo de ativação do arco, b_{ij} , onde $b_{ij} = \zeta_{ij} \delta_{ij}$, $\forall (i, j) \in E$ e ζ_{ij} é custo da instalação da infraestrutura por unidade de distância. Utiliza-se as seguintes variáveis de decisão: $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall (i, j) \in E$, que indica se o arco (i, j) é ativado ($x_{ij} = 1$) ou não ($x_{ij} = 0$); $f_{ijk} \geq 0$: representa o fluxo com destino a $k \in K$ passando pelo arco $(i, j) \in E$ e $g_{ij} \geq 0$ representa o fluxo global do arco $(i, j) \in E$.

A função convexa não-linear de degradação do nível de serviço é representada pelo custo de congestionamento nos arcos, sendo separável por arco e representada pela seguinte lei de potência:

$$\tau_{ij}(g_{ij}) = e g_{ij}^p, \quad \forall (i, j) \in E \quad (1)$$

$e > 0$ e $p \geq 1$ são escalares que representam a participação dos custos de congestionamento do custo total.

Em geral, o problema de projeto de redes com congestionamento pode ser formulado como:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} [b_{ij} x_{ij} + \tau_{ij}(g_{ij})] + \sum_{k \in K} c_{ijk} f_{ijk} \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in V} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in V \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} f_{ijk} - g_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in E \quad (4)$$

$$\sum_{(s,j) \in E} f_{sjk} = d_k \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{(i,k) \in E} f_{ikk} = d_k \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} f_{ijk} = \sum_{(j,i) \in E} f_{jik} \quad \forall j \in V \setminus S, k \in K : k \neq j \quad (7)$$

$$f_{ijk} \leq d_k x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E, k \in K \quad (8)$$

$$f_{ijk} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E, k \in K \quad (9)$$

$$g_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \quad (10)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \quad (11)$$

A função objetivo (2) possui 3 termos: O primeiro termo contabiliza o custo total da instalação dos arcos; o segundo calcula os custos convexos de congestionamento; enquanto o terceiro totaliza o custo de transporte das diversas demandas. As restrições (3) obrigam a geração de arborescências ao impedir a incidência de mais de um arco em cada nó. As restrições (4) calculam o fluxo global que atravessa o arco (i, j) . As restrições (5)-(7) garantem o balanço de fluxo para cada produto em cada nó desde a origem s até cada nó de destino k . As restrições de acloperamento (8) permitem que o fluxo passe através do arco (i, j) somente se o mesmo estiver instalado. Finalmente (9) e (10) são as restrições de não negatividade para os fluxos f_{ijk} e g_{ij} respectivamente, enquanto as restrições (11) obrigam a integralidade das variáveis x_{ij} .

3. Método de Resolução

Ao abordar problema de PNLIM, destacam-se dois métodos de grande escala para a resolução desses problemas: A Decomposição de Benders (Geoffrion (1972)) e a Aproximação Externa (Duran and Grossmann (1986), Fletcher and Leyffer (1994) e Yuan et al. (1988)). Ambos idealizam decompor o problema original em dois níveis: no nível superior, conhecido como problema mestre (PLIM), onde é resolvido um problema inteiro misto e no nível inferior, conhecido como subproblema (SP), resolve-se um subproblema não linear, o problema é resolvido de forma iterativa até que o limite inferior (LI) convirja para o limite superior (LS). A diferença entre os dois métodos é que o BD exclui um conjunto de variáveis fracionárias, pertencentes ao problema original, do PM, enquanto o OA mantém todas as variáveis do problema original no PM. Sendo assim, ao tratar a formulação com limites inferiores o PM-OA fornece limites inferiores maiores ou iguais aos obtidos pelo BD, implicando em menores iterações para a convergência, entretanto como o PM-OA é um pouco maior tornando-o mais difícil de ser resolvido, pois possui um número bem maior de variáveis e restrições, veja (Duran and Grossmann (1986)).

3.1. Decomposição de Benders

Considere o seguinte problema de PLIM:

$$\min\{c^T x + f^T y : Ax \geq b; Dx + By \geq d; x \in Z_+^n; y \in \mathfrak{R}_+\} \quad (12)$$

Introduz-se uma variável artificial $\eta = f^T y$, com um limite $\bar{\eta}$ e o Problema Mestre Relaxado (PMR):

$$\min\{c^T x + \eta : Ax \geq b; \eta \geq \bar{\eta}; x \in Z_+^n\} \quad (13)$$

O problema é resolvido de forma iterativa. Uma solução ótima encontrada (x^*, η^*) com $x^* \in Z$ é enviado para o SP:

$$\max\{\pi^T (d - Dx^*) : \pi^T B \leq f^T, \pi \geq 0\} \quad (14)$$

Se o SP é ilimitado, um raio extremo π^T é escolhido e o *Corte de Viabilidade de Benders* é adicionado ao PM $\pi^T (d - Dx^*) \leq 0$ onde é novamente resolvido. Caso contrário, assume z^* e $\bar{\pi}$ indica o valor ótimo do SP, respectivamente. Se $z^* \leq \eta^*$, então (x^*, η^*) é viável e esses são ótimos para (12). Se não, o *Corte de Otimalidade de Benders* $\eta \geq \bar{\pi}^T (d - Dx^*)$ é adicionado ao PM e o que segue é resolvido novamente. Aplicando o método ao problema proposto temos a formulação mestre:

3.2. O Problema Mestre Relaxado

Algumas vezes, a solução encontrada pelo PMR pode acarretar em ciclos na topologia proposta ou em sub-árvore desconexas. Logo, trabalha-se com ambos os conjuntos de variáveis de x e g no problema mestre relaxado. A ideia aqui é garantir o fechamento de balanço de fluxos no nível superior, evitando a geração de topologias inviáveis. Portanto temos o seguinte PMR:

$$\min_{t, x \in X} \sum_{(i,j) \in E} b_{ij}(x_{ij}) + \sum_k t_k \quad (15)$$

$$\text{s.t.: (10) - (11)} \quad e \quad (16)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in V \quad (17)$$

$$\sum_{(i,k) \in E} g_{ik} - \sum_{(k,j) \in E} g_{kj} = d_k \quad \forall k \in K \quad (18)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} g_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} g_{ji} = 0 \quad \forall j \in V \setminus K \cup s \quad (19)$$

$$\sum_{(s,j) \in E} g_{sj} = \sum_{k \in K} d_k \quad (20)$$

$$g_{ij} \leq \sum_{k \in K} d_k x_{ij} \quad \forall k \in K \quad (21)$$

$$t_k \geq \nu_k(x^h) + \sum_{ij} \alpha_{ijk}^h d_k (x_{ij}^h - x_{ij}) \quad \forall k \in K \quad (22)$$

$$t \geq 0 \quad (23)$$

Onde $\nu_k(x^h) = \sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} -\alpha_{ijk}^h d_k x_{ij} + \min \sum_{(i,j) \in E} \tau_{ij} g_{ij} + \sum_{k \in K} (c_{ijk} + \alpha_{ijk}^h) f_{ijk}$.

As variáveis (17)- (19) são restrições de balanço de fluxo no espaço das variáveis g , ao utilizá-las, evita-se uso dos cortes de Benders do tipo II, ou seja, cortes associados a raios extremos do poliedro original (2)- (11). Caso contrário, gastaria-se tempo para resolver problemas inteiros apenas para descartar configurações de redes inviáveis.

3.3. Subproblema Linear: Primal e Dual

Para x fixado em x^h o subproblema primal seria:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ijk} f_{ij} \quad (24)$$

$$\text{s.t.: } \sum_{(s,j) \in E} f_{sjk} = d_k \quad (25)$$

$$\sum_{(i,k) \in E} f_{ikk} = d_k \quad (26)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} f_{ijk} = \sum_{(j,i) \in E} f_{jik} \quad \forall j \in V \setminus j \neq s \neq k \quad (27)$$

$$-f_{ijk} \geq -d_k x_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \quad (28)$$

$$f_{ijk} \geq 0 \quad (29)$$

É sabidamente mais útil trabalhar com a versão dual de (24)- (29). Associando as variáveis p_{jk} , p_{sk} , p_{kk} e α_{ijk} . Obtém-se o respectivo subproblema dual, para cada produto k :

$$\max_{p, \alpha \geq 0} d_k (p_{kk} - p_{sk} - \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \alpha_{ijk}) \quad (30)$$

$$p_{jk} - p_{ik} - \alpha_{ijk} \leq c_{ijk} \quad \forall (i, j) \in E \quad (31)$$

Enquanto o SP primal tem solução única o SP dual pode ter multiplas soluções ótimas tornando a escolha das variáveis duais ótimas um tópico a parte.

3.4. Aproximação Externa

A técnica conhecida como Aproximação Externa(OA) (do inglês Outer Approximation) foi desenvolvida em trabalhos pioneiros de [Duran and Grossmann \(1986\)](#), [Fletcher and Leyffer \(1994\)](#) e [Yuan et al. \(1988\)](#). Tem sido aplicada em otimização de síntese de processos ([Grossmann and Kravanja \(1995\)](#)), ([Karuppiah et al. \(2008\)](#)), e em várias outras aplicações de projeto em engenharia. Mais recentemente, o método tem sido aplicado a sistemas logísticos como em [Huang et al. \(2005\)](#) e em problemas de otimização em geral ([Grossmann and Kravanja \(1995\)](#)).

Na formulação (2)- (11), $(\sum_{(i,j) \in E} (\tau_{ij} g_{ij}))$ é o único termo não-linear. Portanto, esse é o termo que necessita sofrer aproximação externa. Pode-se substituir $\tau_k(g_k)$ por ξ_{ij} para cada k na função objetivo.

A ideia aqui é permitir a solução do problema mestre OA, por meio de algoritmo de decomposição de Benders. Lida-se com a não-linearidade via OA e com a parte de grande escala via Decomposição de Benders.

$$\min \sum_{(i,j) \in E} [b_{ij} x_{ij} + \xi_{ij} + \sum_k t_k] \quad (32)$$

$$\text{s.t.: (10) - (11), (16) - (19)} \quad e \quad (33)$$

$$\xi_{ij} \geq \tau_{ij}(g_{ij}^h) + \beta_{ij}^h (g_{ij} - g_{ij}^h) \quad \forall (i, j) \in E, \quad \forall h = 1, \dots, H \quad (34)$$

$$t_k \geq \nu_k(x^l) + \sum_{ij} \alpha_{ijk}^l d_k(x_{ij}^l - x_{ij}) \quad \forall k \in K \quad (35)$$

$$\xi_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E \quad (36)$$

$$t_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (37)$$

O uso concorrente de Aproximação Externa e Decomposição de Benders (OA+BD) já foi aplicado com sucesso para problemas de projeto de redes ([Dias et al. \(2011\)](#)), de localização de hubs ([De Camargo et al. \(2011\)](#)).

[Magnanti and Wong \(1981\)](#) introduziram novas técnicas para acelerar a convergência do método de Decomposição de Benders. A técnica de aceleração é baseada em uma seleção criteriosa das variáveis duais que sejam Pareto-ótimas.

4. Técnicas de Aceleração

[Magnanti and Wong \(1981\)](#) notaram que quando o SP é degenerado, existe um conjunto de diferentes cortes que poderiam ser gerados. Portanto, a ideia principal da técnica de Magnanti e Wong consiste em adicionar ao PM a cada iteração cortes Pareto-ótimo, ou seja, aqueles que não são dominados por nenhum outro corte. Para gerar cortes Pareto-ótimo Magnanti e Wong utilizam um conjunto de pontos auxiliares, denominados *core-points*. Um ponto é denominado *core-point* se ele pertence ao interior da casca convexa dos pontos interiores viáveis.

Seja π_h e $f(\pi_h)$, a solução ótima e o valor da função objetivo do SP associado a solução x_h do PM e seja x^0 um *core-point* válido na iteração h . Logo temos o respectivo Subproblema de Magnanti e Wong (SMW) para gerar cortes Pareto-ótimo:

$$\max (d - Dx^0)^T \pi \quad (38)$$

$$\text{s.t.: } (d - Dx_h)^T \pi = f^T(\pi_h) \quad (39)$$

$$B^T \pi \leq f^T \quad (40)$$

$$\pi \geq 0 \quad (41)$$

A equação (39), entretanto, insere instabilidade numérica no SP dual, o que torna o uso prático de método de [Magnanti and Wong \(1981\)](#) limitado. [Papadakos \(2008\)](#) propõe remover a equação (39) e substituí-la por uma atualização em vôo do *core-point*, removendo então os problemas de natureza numérica, veja (42) e (43).

$$x_{h+1}^0 = (1 - \lambda)x_h^0 + \lambda x_h \quad (42)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad (43)$$

Papadakos propõe ainda relaxar o conceito de *core-point*, bastando garantir a validade de seu Teorema 7 para gerar cortes Pareto-ótimo mesmo que fora do interior relativo da casca convexa de soluções inteiras viáveis, vide o Teorema 7 em [Papadakos \(2008\)](#).

Uma extensão das ideias de Papadakos permite gerar cortes Pareto-ótimo a partir de soluções em que o SP é inviável. Essa modificação aumenta a velocidade de recuperação de informação do subproblema e permite utilizar a parte útil da solução do PM, em vez de meramente gerar um corte de viabilidade. Há também que se considerar que diversas soluções inviáveis sejam topologicamente similares à solução ótima.

Para tanto, basta escrever um problema auxiliar no peso λ usado na equação (44):

$$\max \lambda_k \quad (44)$$

$$\text{s.t.:} \quad \sum_{j \setminus (s,j) \in E} f_{sjk} = d_k \quad (45)$$

$$\sum_{j \setminus (j,k) \in E} f_{jkk} = d_k \quad (46)$$

$$\sum_{j \setminus (j,i) \in E} f_{jik} = \sum_{j \setminus (i,j) \in E} f_{ijk} \quad \forall i \in V \setminus i \neq s \neq j \quad (47)$$

$$f_{ijk} \leq d_k [(1 - \lambda)x_{ij}^0 - \lambda_k x_{ij}^h] \quad \forall (ij) \in E \quad (48)$$

$$f_{ijk}^h \geq 0 \quad (49)$$

Para cada produto k . Naturalmente ao atualizar o *core-point*, usa-se λ tal que $\lambda = \min_k \{\lambda_k\}$, e procede-se à geração de um corte de otimalidade Pareto-ótimo. Essa técnica já foi aplicada com grande sucesso em outro problema, veja ([de Sá et al. \(2013\)](#)).

5. Experimentos Computacionais

Os testes computacionais foram realizados utilizando um sistema operacional Linux 64 bits e os experimentos feitos em uma estação de trabalho com o processador *Intel(R) Xeon(R) CPU E5630* com $2.53GHz$ e $24GB$ de memória RAM. Códigos foram implementados em *Concert/Cplex* usando o CPLEX. Para essas formulações utiliza-se um conjunto de instâncias disponíveis na biblioteca online QAPLIB ([Hahn et al. \(2006\)](#)). O número de nós e os tamanhos dos conjuntos E e K são mostrados na tabela (1).

Para cada conjunto de testes foram analisados o tempo computacional gasto e o gap de otimalidade. Para gerar a primeira solução viável são utilizados a Árvore Geradora Mínima (AGM) e a Árvore de Caminho Mínimo (ACM). Dois conjuntos de experimentos usando instâncias padrão da literatura foram realizados afim de avaliar a eficiência dos algoritmos propostos. Esses conjuntos

Tabela 1: Análise das instâncias em relação ao tamanho dos conjuntos.

Instância	E	K	V
14	182	9	14
15	210	9	15
17	272	10	17
18	306	11	18
20	380	17	20
21	420	14	21
22	462	14	22
24	552	16	24
25	600	17	25
27	702	18	27
28	756	19	28
30	870	21	30
40	1560	25	40
50	2450	31	50
60	3540	36	60
80	6320	48	80
100	9900	59	100
150	22350	92	150

de experimentos foram dividido em duas fases. A primeira fase tem o objetivo de avaliar qual é a melhor variante do método OA+BD ao combinar diferentes estratégias para acelerar a convergência do método, enquanto a segunda fase consiste em comparar a melhor variante encontrada com o CPLEX.

Nesta primeira fase faz-se comparações entre os algoritmos *Cplex*, *OA+BD*, *Agregado*, *Desagregado* e λ -Ótimo.

- **Cplex:** Formulação Original.
- **OA+BD:** Algoritmo utilizando os métodos de Decomposição de Benders e o Aproximação Externa.
- **Agregado:** Além da utilização do (OA+BD), utiliza-se ainda os cortes Callbacks adicionados em uma única árvore.
- **Desagregado:** Utiliza-se o (OA+BD), os cortes callbacks adicionando os cortes de viabilidade e também os de otimalidade.
- **λ -Ótimo:** É uma versão da junção de todos os algoritmos citados anteriormente e a utilização do λ -ótimo.

As tabelas (2) e (3) demonstram que a variante λ -ótimo apresenta os melhores desempenhos ao considerar o problema com congestionamento e principalmente a medida que as instâncias aumentam.

Em média esta técnica se mostra muito eficiente tornando o método até 37 vezes mais rápido ao comparar com o tempo gasto pelo CPLEX, como pode-se ver na instância 20 nós entre outras. Pode-se ver, que os cortes de Benders agregado são bastante competitivos, mas medida a que a instância aumenta o tempo computacional aumenta tornando assim mais adequado utilizar o problema desagregados.

Tabela 2: Comparativo entre os algoritmos *Cplex*, *OA+BD*, *Agregado*, *Desagregado* e o algoritmo λ -*ótimo* em relação ao tempo gasto.

Instância	ex	Cplex T(s)	OA+BD T(s)	Agregado T(s)	Desagregado T(s)	λ-ótimo T(s)
12	0.0	0.0300	0.0400	0.0600	0.0500	0.0500
	0.01	0.3200	0.3200	0.1300	0.1900	0.1900
	0.05	1.7800	1.8200	0.7300	0.9600	1.1500
14	0.0	0.0300	0.0800	0.1000	0.1000	0.1100
	0.01	0.6000	0.6600	0.3400	0.5200	0.3900
	0.05	4.5200	2.7000	0.5700	1.2300	0.9800
15	0.0	0.0400	0.0900	0.0900	0.0800	0.1100
	0.01	0.5100	0.6800	0.3000	0.4400	0.3300
	0.05	5.6500	2.2400	0.5100	0.6400	0.6200
17	0.0	0.0500	0.0600	0.1300	0.0700	0.1800
	0.01	1.0700	1.2900	0.3800	0.7000	0.3500
	0.05	10.4300	4.5900	0.6600	0.9700	1.1900
18	0.0	0.0700	0.1000	0.2000	0.1200	0.2100
	0.01	1.7000	2.3600	0.7300	1.6400	0.9400
	0.05	38.2200	20.5900	4.0600	7.5400	5.6700
20	0.0	0.1200	0.1000	0.2900	0.1800	0.5200
	0.01	16.4400	24.7700	6.4100	5.6600	6.5400
	0.05	1415.4000	259.2500	21.1700	73.7000	38.2900
22	0.0	0.1300	0.1600	0.4900	0.4500	0.5900
	0.01	88.8400	62.8200	21.5400	26.7100	35.4300
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	2462.820
24	0.0	0.2100	0.3800	0.8200	0.6000	1.0200
	0.01	684.5000	376.9000	1233.4800	250.6800	233.4800
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000
25	0.0	0.2100	0.2900	1.0200	0.3400	1.6500
	0.01	1913.6800	839.7700	234.0100	726.7200	334.6600
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000
27	0.0	0.2600	0.4200	2.1200	0.7100	1.8200
	0.01	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000
28	0.0	0.3000	0.2700	3.7600	0.8000	2.7300
	0.01	164.8900	45.0500	14.3200	41.6200	22.9800
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000
30	0.0	0.4800	3.1400	3.1800	2.5900	4.0000
	0.01	335.0500	73.8300	14.0900	14.1400	24.6700
	0.05	3600.000	3600.000	3600.000	3600.000	2459.3600

Tabela 3: Análise das instâncias que não obtiveram o gap de otimalidade como o valor = 0, para as demais instâncias tem-se o gap= 0.0.

Instância	ex	Cplex GAP(%)	OA+BD GAP(%)	Callback GAP(%)	Callback multi-cuts GAP(%)	λ-ótimo GAP(%)
22	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.05	0.64	0.0173	1.66	3.3	0.0
24	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.05	3.72	0.8091	2.61	2.89	1.80
25	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.05	4.40	4.6413	1.62	3.40	1.63
27	0.01	2.20	1.0216	1.29	3.39	1.04
	0.05	7.26	13.4597	6.38	7.31	4.85
28	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.05	2.78	1.1493	1.97	5.79	1.50
30	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.05	2.03	2.6155	1.19	1.50	0.0

Para a segunda fase de testes faz-se comparações entre os algoritmos *Cplex*, *agregado* e *desagregado*:

- **Cplex:** Formulação Original utilizando o CPLEX 12.3.
- **Agregado:** Algoritmo (OA+BD) via λ -ótimo que gera um único corte por iteração.
- **Desagregado:** O algoritmo (OA+BD) via λ -ótimo que gera múltiplos cortes por cada iteração, ou seja, gera um corte para cada k a cada iteração.

Tabela 4: Comparativo entre os algoritmos *Cplex*, *Agregado* e o *Desagregado* em relação ao tempo gasto.

Instância	τ	Cplex T(s)	Agregado T(s)	Desagregado T(s)	Capacidade
15	10	0.0200	0.0800	0.0700	100
	10	0.8800	0.4200	0.4800	3
17	10	0.0200	0.1100	0.1000	100
	10	3.3600	1.2600	2.4800	3
18	10	0.0400	0.0900	0.0800	100
	10	0.7200	0.4500	0.4000	4
20	10	0.0100	0.1400	0.1000	100
	10	4.2300	1.3700	1.1900	6
	10	40.8700	28.5900	37.5400	4
22	10	0.0900	0.3400	0.2200	100
	10	119.8300	24.4700	41.4500	10
	10	318.6700	111.0000	161.4000	8
24	10	0.2000	0.3700	0.3400	100
	10	495.2300	72.7200	64.9700	8
	10	5152.6200	2021.1300	2737.3300	6
25	10	0.0700	0.3600	0.2000	100
	10	71.9100	7.1500	13.6000	12
	10	197.0500	88.7900	84.1000	10
27	10	0.3700	0.7400	0.3400	100
	10	1082.2300	61.5200	48.4700	13
	10	9144.4700	1027.0800	1990.6200	10
28	10	0.8600	1.5300	0.4000	100
	10	157.9300	30.1700	28.9200	10
30	10	0.2800	0.7100	0.7300	100
	10	553.2400	41.7000	52.2900	13
	10	42142.2800	8631.8100	8830.0700	10
40	10	0.2700	7.2800	0.9800	100
	10	8757.5500	908.6300	966.8900	14
50	10	0.9700	28.3600	3.4800	100
	10	295.2800	56.6600	34.8500	25
100	10	16.3500	2839.4700	106.8900	1000
	10	110446.7300	6804.7700	700.3100	35
150	10	5.2000	34421.1500	298.7300	1000
	10	249377.7300	154887.6300	5348.4600	60

Na tabela 4, nota-se que *Cplex* se mostra muito rápido nas capacidades maiores e nas instâncias menores, mas a medida que a capacidade diminui e as instâncias os outros algoritmos se mostram mais eficientes. Em relação as formulações de corte de Benders agregado e desagregado que conforme Magnanti et al. (1986) as formulações são mais eficientes do que as obtidas com as restrições de agregação, percebe-se que se o número de capacidade for menor e o número de nós da instância for maior é mais útil trabalhar com os cortes de desagregados, caso contrário, é melhor trabalhar com cortes agregados.

5.1. Análise dos Resultados

Dos resultados obtidos pode-se ver que o CPLEX é boa ferramenta para resolver o problema em estudo, porém não a mais rápida. Sendo assim, é melhor resolvê-lo com uma única árvore ao invés de utilizar a implementação tradicional da Decomposição de Benders.

O método λ -ótimo, assim como o esquema OA+BD se mostraram as ferramentas mais rápidas e precisas para esta importante classe de problemas. É possível perceber que as instâncias ficam mais difíceis de resolver quando o custo de congestionamento aumenta.

As figuras 1 e 2 exemplificam o resultado do problema mostrando que, para uma mesma instância, há uma diferença nas conexões instaladas na rede ótima.

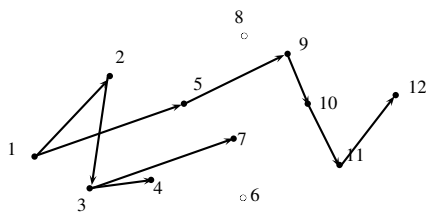


Figura 1: Solução sem congestionamento.

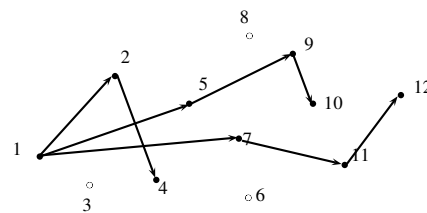


Figura 2: Solução com congestionamento.

6. Conclusão

Neste trabalho aplicou-se a técnica de seleção de cortes de Benders conhecida como λ -ótimo ao problema de projeto de redes sob congestionamento, atacado via Aproximação Externa/Decomposição de Benders (OA+BD). Os conjuntos de experimentos demonstram que o custo do congestionamento em cada instância afetam o tempo de resolução de cada algoritmo. De acordo com os testes analisa-se que a medida que aumenta o custo de congestionamento aumenta também o esforço computacional para resolver o problema em estudo.

Estudos empíricos confirmaram que a variante do OA+BD via λ -ótimo apresenta a melhor performance entre as demais testadas, ou seja, esta variante resolve o problema proposto em menor tempo computacional e é capaz de resolver instâncias maiores que os demais analisados. Esta combinação de técnicas é promissora para a solução de grandes instância deste importante problema. Este algoritmo é capaz de resolver a maioria das instâncias significativamente mais rápido do que o *CPLEX 12* na formulação original. Pode-se ver também, que os cortes de Benders agregado são bastante competitivos, mas medida que a instância aumenta torna-se mais eficaz utilizá-los desagregados.

Referências

- Altıparmak, F., Dengiz, B., and Smith, A. E. (2003). Optimal design of reliable computer networks: A comparison of metaheuristics. *Journal of Heuristics*, 9(6):471–487.
- Benchakroun, A., Ferland, J., and Cleroux, R. (1992). Distribution system planning through a generalized benders decomposition approach. *European journal of operational research*, 62(2):149–162.
- Contreras, I., Fernández, E., and Marín, A. (2009). Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem. *Computers & Operations Research*, 36(12):3117–3127.
- Contreras, I., Fernández, E., and Marín, A. (2010). The tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*, 202(2):390–400.
- Cordeau, J.-F., Pasin, F., and Solomon, M. M. (2006). An integrated model for logistics network design. *Annals of operations Research*, 144(1):59–82.
- Costa, A. M. (2005). A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & operations research*, 32(6):1429–1450.
- Dantzig, G. (1962). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press.
- De Camargo, R. S., De Miranda, G., and Ferreira, R. P. (2011). A hybrid outer-approximation/benders decomposition algorithm for the single allocation hub location problem under congestion. *Operations Research Letters*, 39(5):329–337.

- de Sá, E. M., de Camargo, R. S., et al. (2013). An improved benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*.
- Dias, P. G. F., de Miranda Jr, G., Saldanha, R. R., and de Camargo, R. S. (2011). Projeto de rede com custos convexos e balanceamento de fluxos. *Revista Controle & Automação/Vol. X no. X/Fev*, page 1.
- Duran, M. and Grossmann, I. E. (1986). An outer-approximation algorithm for a class of mixed integer nonlinear programmes. *Mathematical Programming*, 36:307–339.
- Fletcher, R. and Leyffer, S. (1994). Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation. *Mathematical programming*, 66(1-3):327–349.
- Geoffrion, A. (1972). Generalized Benders decomposition. *Journal of optimization Theory and Applications*, 10(4):237–260.
- Grossmann, I. E. and Kravanja, Z. (1995). Mixed-integer nonlinear programming techniques for process systems engineering. *Computers & chemical engineering*, 19:189–204.
- Hahn, P., Anjos, M., Burkard, R., Karisch, S., and Rendl, F. (2006). Qaplib-a quadratic assignment problem library. *Avialable at <http://www.seas.upenn.edu/qaplib>*.
- Huang, S., Batta, R., and Nagi, R. (2005). Distribution network design: Selection and sizing of congested connections. *Naval Research Logistics (NRL)*, 52(8):701–712.
- Hwang, F. K. and Richards, D. S. (1992). Steiner tree problems. *Networks*, 22(1):55–89.
- Karuppiah, R., Furman, K. C., and Grossmann, I. E. (2008). Global optimization for scheduling refinery crude oil operations. *Computers & Chemical Engineering*, 32(11):2745–2766.
- Klincewicz, J. G. (1998). Hub location in backbone/tributary network design: a review. *Location Science*, 6:307–335.
- Maculan, N. (1987). The Steiner problem in graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:185–212.
- Magnanti, T. L., Mirchandani, P., and Wong, R. T. (1986). Tailoring Benders decomposition for uncapacitated network design. *Mathematical Programming Study*, 26:112–154.
- Magnanti, T. L. and Wong, R. T. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29(3):464–483.
- Miranda, G., Luna, H., De Camargo, R., and Pinto, L. (2011). Tree network design avoiding congestion. *Applied Mathematical Modelling*, 35(9):4175–4188.
- Papadakis, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti–wong method. *Operations Research Letters*, 36:444–449.
- Ramírez-Rosado, I. J. and Domínguez-Navarro, J. A. (2006). New multiobjective tabu search algorithm for fuzzy optimal planning of power distribution systems. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 21(1):224–233.
- Randazzo, C. and Luna, H. (2001). A comparison of optimal methods for local access uncapacitated network design. *Annals of Operations Research*, 106:263–286.
- Yuan, X., Zhang, S., Pibouleau, L., and Domenech, S. (1988). Une méthode d’optimisation non linéaire en variables mixtes pour la conception de procédés. *RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle*, 22(4):331–346.