

MENSURAÇÃO DE ÍNDICES DE PODER EM JOGOS DE VOTAÇÃO PONDERADA POR SIMULAÇÃO DE MONTE-CARLO

Moacir Manoel Rodrigues Junior

Universidade Federal do Paraná/Universidade Regional de Blumenau

moacir_ro@hotmail.com

Volmir Eugênio Wilhelm

Universidade Federal do Paraná

volmirw@gmail.com

Resumo

Este estudo tem por objetivo apresentar um modelo de simulação, por meio do método de Monte Carlo, que mensure os Índices de Poder de Banzhaf e Shapley-Shubik. A problemática foi elaborada levando em consideração a complexidade envolvida no cálculo destes índices para grandes comissões de votação. O trabalho envolveu um modelo de simulação para cada índice de poder, sendo feitas duas simulações, uma com 10 mil coalizões e outra com 100 mil coalizões repetidas sucessivamente por 200 vezes. Os resultados apontaram para a confirmação do potencial da simulação estabelecida. Os resultados apresentaram erros médios absolutos inferiores a 10^{-3} para o modelo com 10 mil simulações e inferior a 10^{-4} para o modelo com 100 mil simulações. De similar modo, analisando a correlação linear entre o desvio-padrão das estimativas e o erro absoluto, confirmou-se que o desvio-padrão pode ser entendido como um fator de controle do erro de estimação. Conclui-se pela satisfação do objetivo da pesquisa e verificação que a simulação de Monte Carlo é uma estimativa potencialmente aplicável aos Índices de Poder de Shapley-Shubik e Banzhaf.

Palavras-Chave: Índice de Shapley-Shubik. Índice de Banzhaf. Simulação de Monte-Carlo

Abstract

This paper aims to present a simulation model, through the Monte Carlo method that measures the Power Index of the Banzhaf and Shapley-Shubik. The problematic has been prepared taking into consideration the complexity involved in the calculation these indices for large voting commissions. The study involved one simulation model for each power index, and made two simulations, the first with 10 thousand coalition and other with 100 thousand coalition successively repeated for 200 times. The results pointed to confirm the potential of the established simulation. The results presented absolute errors mean less than 10^{-3} for model with 10 thousand simulations and less than 10^{-4} for model with 100 thousand simulations. Likewise, analyzing linear correlation between the standard deviation of the estimates and the absolute error, it was confirmed that the standard deviation could be understood as a factor of control of the estimated error.

Key-words: Shapley-Shubik Index. Banzhaf Index. Monte-Carlo Simulation.

1. INTRODUÇÃO

Um Jogo de Votação, ou como referido por Von Neumann e Morgenstern (1944) “*Simple Games*”, define a aplicação de análises quanto ao comportamento estratégico de um jogador sobre um ambiente de votação. Isso se aplica a comissões, assembleias, parlamentos, comitês de acionistas entre outros. Laruelle e Valenciano (2005) estabelecem que um ambiente de votação deve pressupor a existência de duas características importantes: a existência de uma regra de votação; e a existência de jogadores. Nesse contexto é possível apresentar o que é definido como Jogos de Maioria Ponderada, onde cada jogador possui quantidade específica de votos e para aprovação de um projeto a soma de todos os votos deve ser superior a um valor de referência chamado de cota de aprovação (SHAPLEY; SHUBIK, 1954; BANZHAF, 1965).

O que busca-se com o estudo de comissões eleitorais, é estabelecer o poder decisivo que um jogador, doravante chamado eleitor, possui para aprovação ou rejeição de um projeto (LARUELLE; VALENCIANO, 2001, 2002). Neste contexto o ambiente de Jogos Ponderados de Votação, é descrito por Shapley e Shubik (1954), Dubey e Shapley (1979), Feltkamp (1995), Hu e Shapley (2003), entre outros, como um jogo cooperativo de com transferência de utilidade. Considera-se jogos de transferência de utilidade o mesmo conjunto de jogos a qual se insere o Valor de Shapley, que busca em sua construção estabelecer uma forma de distribuição justa de ganhos quando da formação de uma aliança entre jogadores, doravante chamada de coalizão (SHAPLEY, 1953). Assim, os Índices de Poder são regras de distribuição justa de poder quando considerada a participação de um eleitor em uma comissão. Mais precisamente, os Índices de Poder medem o quão decisivo um eleitor é, quando considerado seu poder de ajudar a aprovar uma proposta em votação.

Destaca-se dois índices como os mais citados pela literatura: Índice de Shapley-Shubik (SHAPLEY; SHUBIK, 1954); e o Índice de Banzhaf (BANZHAF, 1965, 1968). O primeiro índice é definido como uma adaptação do Valor de Shapley (SHAPLEY, 1953) aplicado em situações de votação. O segundo índice define-se como a quantificação do número de coalizões a qual um eleitor é decisivo, ou como definido por Dubey e Shapley (1979) o eleitor é um *swing*.

Os estudos que desenvolveram os índices, tanto Shapley-Shubik como Banzhaf, estudaram as características do sistema político norte americano. O Índice de Shapley-Shubik, foi aplicado inicialmente para a obtenção do poder dos membros do congresso norte-americano (SHAPLEY; SHUBIK, 1954). Já o Índice de Banzhaf foi apresentado inicialmente (BANZHAF, 1965) para algumas assembleias legislativas estaduais dos EUA e posteriormente (BANZHAF, 1968) aplicado para a composição do colégio eleitoral americano.

Na maioria das aplicações realizadas pelos autores, o sistema é muito possivelmente pequeno, como por exemplo o estudo do Congresso Americano trabalha com apenas três eleitores factíveis (Presidente do Congresso, Senado e Câmara). A dificuldade de aplicação destes modelos está quando o número de eleitores é grande. A construção do Índice de Shapley-Shubik para uma comissão de 20 eleitores exigiria a análise de $20!$ coalizões, já o Índice de Banzhaf 2^{20} coalizões. Em ambos os casos a análise é significativamente grande. Desta maneira este trabalho se propõe a responder a seguinte questão de pesquisa: Qual a possibilidade da mensuração dos Índices de Poder de Shapley-Shubik e Banzhaf por meio da Simulação de Monta Carlo? E desta forma associa-se também o seguinte objetivo de pesquisa: Avaliar o desempenho da Simulação de Monte Carlo como forma de mensuração dos Índices de Poder de Shapley-Shubik e Banzhaf.

A temática da mensuração dos índices de poder por meio de métodos alternativos já foi apresentada por outros trabalhos como Leech (2003) e Klinz e Woeginger (2005). Em ambos os casos as ferramentas utilizadas foram computacionais, sendo o segundo mais voltado a simulação de coalizões. Entretanto considerando o aspecto da simulação pelo método de Monte Carlo, este trabalho se confirma como uma contribuição quanto a aplicabilidade destes índices em grandes comissões, ganhando em objetividade.

2. ÍNDICES DE PODER

Para a construção dos Índices de Poder faz-se necessária a compreensão inicial do que é um Jogo de Maioria Ponderada. Preliminarmente temos que um Jogo de Transferência de Utilidade é um par ordenado (N, v) . N denota o conjunto de jogadores que participam, sendo $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a representação de cada jogador. Ainda tem-se v como a função que mensura o valor que cada coalizão o possui no jogo, destaca-se v como um valor real associado a uma coalizão. Assume-se S como uma coalizão formada por jogadores de N , logo temos $S \subseteq N$ e s representa o número de jogadores pertencentes a coalizão (LAURELLE, VALENCIANO, 2001).

Um *simple game* é definido como um jogo de transferência de utilidade quando v assume os valores $(0, 1)$. Assim se uma coalizão S , tem associada a ela um valor $v(S) = 0$, disse que esta coalizão é perdedora. Já se S tem $v(S) = 1$, assume-se que S é uma coalizão vencedora. Cabe destacar que necessariamente a regra do jogo, conforme Laruelle e Valenciano (2005) deve contemplar, $v(\emptyset) = 0$ e $v(N) = 1$. Indicando assim que sempre existirá uma coalizão vencedora, podendo ser a coalizão de unanimidade. Esta condição destaca que se $v(S) = 1$ então $v(N - S) = 0$.

Dentro dos *simple games* existe uma subcategoria definida como *weighted majority games* ou Jogos de Maioria Ponderada, também conhecida como *Voting Problem*. Este conjunto de jogos, segundo Jelnov e Tauman (2013) destacam-se por associar a cada jogador um peso p_i que define o quantidade de votos que o eleitor i possui. Assim é possível definir:

$$A_n = \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad x \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

Associa-se a este conjunto de votos uma cota q definida como a regra de votação. Assumindo uma coalizão S , disse que ela é vencedora se $\sum_{i \in S} p_i \geq q$, caso contrário a coalizão S é dita perdedora. Destaca-se ainda, segundo Jelnov e Tauman (2013) que costumeiramente $\frac{q}{\sum_{i \in N} p_i} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, ou seja uma coalizão para ser vencedora, na maioria dos casos, precisa de pelo menos metade dos votos totais.

Assim é possível mensura a função valor de cada coalizão S , formada pelos eleitores como:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i \in S} p_i \geq q \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Com base nos Jogos de Maioria Ponderada, a seguir dão construídos os dois principais índices de poder, considerando o que já foi exposto.

2.1 ÍNDICE DE SHAPLEY-SHUBIK

Introduzido inicialmente por Loyd Shapley e Martin Shubik, pelo artigo “*A method for evaluating the distribution of power in a committee system*” publicado na “*The American Political Science Review*” no ano de 1954, os autores pretenderam investigar a distribuição de poder que existia, no congresso americano. Os autores propuseram que um projeto, para ser aprovado, deveria ter apoio de metade da Câmara de Deputados, metade do Senado e concordância do Presidente do Congresso Americano. Assim como cada membro do congresso possuía um voto, a conclusão dos autores era que cada deputado possui um peso menor em seu voto, em comparação com os membros do Senado, que possuíam poder menor do que o poder do presidente do congresso. A formulação do artigo não descreveu nenhuma estrutura matemática mais rebuscada. O objetivo do artigo foi mesmo apresentar uma situação de cooperação em um jogo de votação.

Matematicamente muitos trabalhos procuraram descrever com maior robustez o método de Shapley-Shubik para a distribuição do poder entre os membros de uma comissão. Entretanto o índice descrito de forma intuitiva por Shapley e Shubik (1954) está robustamente definido

como um caso específico de Shapley (1953). Desta maneira, as discussões propostas nos estudos que se seguiram, baseiam-se na reinterpretação dos axiomas de Shapley (1953). Dubey (1975) que estabeleceu algumas informações a respeito do índice de poder, principalmente na substituição do axioma da aditividade. Para o caso dos jogos de votação podem ser citados trabalhos como Feltkam (1995), Laruelle e Valenciano (2001), Laruelle e Valenciano (2003), Einy e Haimanko (2011), entre outros trabalhos.

Assim o modelos de Shapley-Shubik admite que a função de utilidade é definida por meio da função de valor de uma coalizão definida acima

Os axiomas definidos por Shapley (1953) são três: Simetria, Eficiência e Aditividade. A axiomatização mais funcional apresentada sobre o índice de Shapley-Shubik foi descrita por Laruelle e Valenciano (2001), que agregaram a substituição do axioma da aditividade pelo axioma da transferência descrito por Dubey (1975). Desta forma um Jogo de Votação ($v \in 2^N$), que contemple uma regra de votação e um conjunto de jogadores (N), deve assumir as seguintes características:

Axioma 2.1.1 (Simetria): Para todo $v \in 2^N$, existe alguma permutação π de N , e algum $i \in N$, tal que:

$$\phi_i(\pi v) = \phi_{\pi(i)}(v)$$

Onde $(\pi v)(S) = v(\pi S)$.

Axioma 2.1.2 (Elemento Nulo): Para algum $v \in 2^N$ e algum $i \in N$, se i é um jogador nulo (sem poder de voto) no jogo v , então $\phi_i(v) = 0$.

Axioma 2.1.3 (Eficiência): Para todo $v \in 2^N$,

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = 1$$

Axioma 2.1.4 (Transferência): Para algum $v, w \in 2^N$ tal que $v \vee w \in 2^N$,

$$\phi(v) + \phi(w) = \phi(v \wedge w) + \phi(v \vee w)$$

Onde $(v \wedge w) := \min\{v(S), w(S)\}$ e $(v \vee w) := \max\{v(S), w(S)\}$.

Seguindo a definição do Valor de Shapley é possível definir que:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(n-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

Onde s denota a cardinalidade da coalizão S em estudo, n denota a cardinalidade do conjunto N de eleitores. É possível perceber que o modelo considera apenas as coalizões cujo jogador, ou eleitor, i é fundamental para a aprovação do projeto. Haja vista que, se: i) se a coalizão S não for vencedora na votação ($v(S) = 0$), a coalizão $S - \{i\}$ também não será ($v(S - \{i\}) = 0$), logo $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$. ii) Caso a S seja uma coalizão vencedora ($v(S) = 1$), e a coalizão $S - \{i\}$ também seja vencedora ($v(S - \{i\}) = 1$), tem-se que $v(S) - v(S - \{i\}) = 0$, ou seja, as permutações da coalizão S também serão desconsideradas. Por fim, iii) se a coalizão S é vencedora ($v(S) = 1$), e a coalizão $S - \{i\}$ não, ($v(S - \{i\}) = 0$), tem-se que $v(S) - v(S - \{i\}) = 1$, apenas neste caso as permutações são contadas. Quando o caso (iii) ocorre, i é definido como *swing* ou *pivot*.

Um resultado apresentado que alguns translhos apontam como importante foi apresentado por Dubey (1975) e Laurelle e Valenciano (2001) considera que:

Teorema 2.1 – O Índice de Shapley-Shubik é a única regra de alocação definida em 2^N que satisfaz os Axiomas 4.4 (Simetria), 4.5 (Jogador Nulo), 4.6 (Eficiência) e 4.7 (Transferência).

A demonstração deste Teorema pode ser obtida em Laurelle e Valenciano (2001).

Em linhas gerais, o Índice de Shapley-Shubik considera a construção de uma coalizão até o momento que a adição de um jogador i , quando ela passa de um estado perdedor para um estado vencedor. A característica que melhor diferencia o Índice de Shapley-Shubik ao de Banzhaf, é que em uma coalizão S , onde i é *swing*, o número de coalizões de influência de i é dado pelo número de permutações possíveis entre os demais jogadores da coalizão.

2.2 ÍNDICE DE BANZHAF

O Índice de Banzhaf, foi descrito por John F. Banzhaf III, de forma inicial em um artigo de 1965 publicado na revista científica “*Rutgers Law Review*” sob o título de “*Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis*”. Em outro estudo publicado no ano de 1968 na revista científica “*Villanova Law Review*”, sob o título de “*One Man, 3312 Votes: A Mathematical Analysis of Electoral College*” Banzhaf tenta descrever os desvios existentes no Colégio Eleitoral Americano. Para o autor alguns Estados possuem maior representação do que o potencial da população de eleitores imprime.

Segundo Banzhaf (1965, 1968) o que muitas pesquisas constroem é a distribuição proporcional de cadeiras em uma comissão, entretanto segundo o autor, a distribuição proporcional não é justa. Se comparada esta afirmação com os axiomas definidos por Laruelle e Valenciano (2001), a distribuição proporcional feriria o axioma do Jogador Nulo. Pois, é possível a existência de um jogador não decisivo em nenhuma coalizão, que segundo o axioma não deveria receber pagamento, e que caso seguida a distribuição proporcional alocaria recursos a este jogador. Dessa forma, não apenas o índice de poder de Banzhaf ou Shapley-Shubik se justificam, mas sim a ideia de índices de poder.

Nos estudos apresentados por Banzhaf (1965, 1968) a construção do modelo é intuitiva e não formal. Tem-se como marco da formalização do índice o trabalho de Dubey e Shapley (1979). Neste trabalho foi descrita uma caracterização do modelo considerando as implicações previstas na Teoria dos Jogos, sob a óptica dos *Simple Games* de von Neumann e Morgenstern (1947). Posteriormente outros trabalhos também se dedicaram a este estudo, gerando algumas adaptações, como o caso de Lehrer (1988), Feltkamp (1995), Laruelle e Valenciano (2001), Laruelle e Valenciano (2003), entre outras pesquisas.

É possível caracterizar o Índice de Banzhaf, assumindo $\eta_i(v)$ o número de coalizões em que o jogador i é *swing* considerando o conjunto de coalizões a que i faz parte. Pode-se obter este valor considerando:

$$\eta_i(v) = \sum_{S \in N} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

O número total de *swings* é definido por $\bar{\eta}(v) = \sum_{i=1}^n \eta_i(v)$. Desta forma é possível a existência de um jogador *dummy*, de tal forma que $\eta_i(v) = 0$.

Verifica-se que $\eta_i(v)$ não possui fechamento quanto ao axioma da eficiência de Shapley, ou seja $\bar{\eta}(v) \neq v(N) = 1$, este valor é identificado por González-Díaz, García-Jurado e Fiestras-Janeiro (2010) como Índice Bruto de Banzhaf. Dubey e Shapley (1979) apresentaram duas formas possíveis de normalização. A primeira forma é chamada pelos autores de Índice Normalizado de Banzhaf e sua construção é definida por:

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\bar{\eta}(v)}$$

Esta normalização é capaz de forçar o Índice de Banzhaf a fechar como o axioma da eficiência considerando que o valor total de $\beta_i(v)$ é igual a 1.

Outra normalização possível é a geradora do Índice de Banzhaf definido como a probabilidade de um eleitor i ser *swing* de uma coalizão. Define-se este valor normalizado como:

$$Bz_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}}$$

É possível perceber que 2^{n-1} denota o número total de coalizões existentes sem o eleitor i , e assim sua adição ao grupo o torna *swing*. Esta caracterização é mais comum em livros de teoria dos jogos com foco em jogos de poder.

Admitindo de forma semelhante ao Índice de Shapley-Shubik, a axiomatização o Índice de Banzhaf satisfaz o seguinte Teorema.

Teorema 2.2 – O Índice de Banzhaf é a única regra de alocação de poder ϕ em 2^N que satisfaz:

- i) (Jogador *dummy*) Se i é um *dummy* em v então $\phi_i(v) = 0$;
- ii) (Simetria) Para alguma permutação π definida em N , $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$;
- iii) (Transferência) Para o par de jogos $v, w \in 2^N$, $\phi(v \vee w) + \phi(v \wedge w) = \phi(v) + \phi(w)$; e
- iv) (Soma de Banzhaf) $\sum_{i=1}^n \phi_i(v) = \frac{\bar{\eta}(v)}{2^{n-1}}$

A prova pode ser encontrada em Dubey e Shapley (1979).

É possível perceber que a condição da Soma de Banzhaf é utilizada em substituição a condição de Eficiência exigida no Índice de Shapley-Shubik. Cabe destacar que as mesmas propriedades não se verificam para o Índice de Banzhaf Normalizado, haja vista que para dois jogos $v, w \in S$ podem implicar em $\bar{\eta}(v) \neq \bar{\eta}(w)$ e por isso ferindo a propriedade da Transferência.

3. MÉTODOS DE PESQUISA

Esta pesquisa que tem por objetivo construir um modelo de simulação que permita mensurar os índices de poder de Shapley-Shubik e Banzhaf, tem como método fundamental a simulação de Monte Carlo. Segundo Hammersley e Handscomb (1964) o método de simulação de Monte Carlo é alternativa aos modelos tradicionais de cálculo explorados até o século XX. Um dos primeiros matemáticos a considerar esta possibilidade foi John von Neumann quando utiliza de métodos probabilísticos no estudo da ocorrência de um fenômeno. Com o advento dos computadores programáveis, os modelos de simulação ganharam força junto a matemática, pesquisa operacional e física experimental.

A simulação de Monte Carlo é um método numérico muito conhecido para a solução de problemas onde busca-se averiguar possíveis resultados de um experimento considerando componentes aleatórios de um determinado fenômeno (NEWMAN; BARKEMA, 1999). Para Dimov (2008) a simulação de Monte Carlo é uma poderosa ferramenta numérica para diferentes campos da matemática, sendo dada uma estimativa estatística a uma variável aleatória considerando uma função densidade de probabilidade associada.

Desta maneira, a concepção mais importante para este método é o processo de modelagem e estruturação da simulação computacional, considerando para tanto a definição das variáveis de decisão. O algoritmo utilizado para os cálculos foi elaborado como função do software Matlab. A ideia que envolve a simulação é dada por: gerar n variáveis aleatórias sendo que cada uma delas represente um eleitor. São simulados valores aleatórios para todas as n variáveis, considerando em todos os casos a distribuição uniforme contínua $X_i \sim U(0,1)$. Assim se o valor da variável aleatória X_i , gerado aleatoriamente for inferior a 0,5 assume-se que o eleitor i não pertence a coalizão de votação. Caso o valor da variável aleatória X_i , gerado aleatoriamente for igual ou superior a 0,5, assume-se que o eleitor i pertence a coalizão. Em seguida calcula-se o coeficiente de votação da coalizão simulada, se este for maior do que a cota de aprovação q , a coalizão será considerada vencedora, caso contrário ele será desprezada.

Até este passo, o modelo de simulação é idêntico para o Índice de Banzhaf e para o Índice de Shapley-Shubik. Entretanto, para a construção do índice de Shapley-Shubik considera-se uma coalizão vencedora onde i é um eleitor decisivo, ou *swing*, ou seja, quando i faz parte da coalizão ela é vencedora e quando ele não faz parte ela é perdedora. Conta-se então

$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ como o número de permutações possíveis que formam coalizões onde o jogador i é decisivo, considerando s o número de elementos da coalizão e n o número total de eleitores. O poder do jogador i é contado como a soma de todas as permutações de todas as coalizões simuladas. Ao final o Índice de Poder de Shapley-Shubik é obtido pela divisão do total de permutações de i em todas as coalizões simuladas para com o total de permutações de todos os jogadores da amostra.

Para o Índice de Banzhaf é considerado apenas o número de coalizões a qual o jogador i é decisivo. A padronização é feita com base no número de *swings* de um eleitor dividido pelo total de *swings* de todos os eleitores. Este indicador permite a comparação com o Índice Padronizado de Banzhaf e não com o Índice de Banzhaf propriamente dito, haja vista que este último padroniza o indicador dividindo o número de *swings* por 2^{n-1} .

O modelo foi testado para o seguinte problema: Supondo um jogo de votação onde dez eleitores fazem parte. Os votos são ponderados para cada eleitor, sendo que eles possuem a seguinte discriminação de votos: A tem 20 votos, B tem 16 votos, C tem 14 votos, D tem 11 votos, E e F tem 10 votos cada, G tem 8 votos, H tem 5 votos, I tem 4 votos e J tem 2 votos. Para a aprovação de uma medida, a comissão deve somar pelo menos 50 votos favoráveis, que será considerado como a quota de aprovação.

Para a confirmação do modelo de simulação proposto, os resultados foram analisados em dois estágios. Inicialmente foi realizado o cálculo do Índices de Poder de maneira exata, conforme descrito nas seções 2.1 e 2.2. Na sequência foram apresentados os resultados das simulações para ambos os Índices, bem como sua comparação. As simulações foram feitas em duas etapas, a primeiro simulou 200 vezes o montante de 10.000 coalizões, já a segunda repetiu o a simulação de 100.000 coalizões por 200 vezes. O intuito deste processo é destacar a convergência dos valores obtidos pela simulação aos valores reais. Os resultados são descritos a seguir.

4 RESULTADOS DA PESQUISA

Os resultados da pesquisa começam a ser apresentados por meio dos cálculos dos Índices de Banzhaf ($Bz(i)$) e Shapley-Shubik ($SS(i)$) considerando sua fórmula exata. Por se tratar de uma comissão eleitoral composta por dez eleitores, conforme exemplo apresentado na seção de Métodos de Pesquisa, o modelo inicial analisou um total de $2^{10} = 1024$ coalizões possíveis onde 501 se mostraram vencedores. Cabe destacar que os índices consideram o potencial que um eleitor possui de ser decisivo, ou conforme exposto anteriormente *swing*. Desta maneira foram analisados cada um dos casos, ou seja eleitor a eleitor e se verificando o potencial de cada um dos eleitores. A Tabela 1, apresenta os resultados para esta investigação.

Tabela 1 - Cálculo dos Índices de Poder de Banzhaf e Shapley-Shubik

		Peso	Tamanho da Coalizão*										Total	Prop. de votos	$Bz(i)$	$SS(i)$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
Jogadores	A	20	0	0	0	24	94	99	27	1	0	0	245	0,20	0,21416084	0,21666667
	B	16	0	0	0	19	70	75	22	1	0	0	187	0,16	0,16346154	0,16666667
	C	14	0	0	0	15	61	65	17	1	0	0	159	0,14	0,13898601	0,14087302
	D	11	0	0	0	12	48	51	12	0	0	0	123	0,11	0,10751748	0,10714286
	E	10	0	0	0	10	43	47	11	0	0	0	111	0,10	0,09702797	0,09642857
	F	10	0	0	0	10	43	47	11	0	0	0	111	0,10	0,09702797	0,09642857
	G	8	0	0	0	7	35	37	6	0	0	0	85	0,08	0,07430070	0,07261905
	H	5	0	0	0	4	22	25	4	0	0	0	55	0,05	0,04807692	0,04682540
	I	4	0	0	0	2	17	21	3	0	0	0	43	0,04	0,03758741	0,03611111
	J	2	0	0	0	1	11	13	0	0	0	0	25	0,02	0,02185315	0,02023810

* número de *swings* que o jogador é para a coalizão do referido tamanho.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados descritos na Tabela 1 destacam algumas propriedades, outrora referidas como axiomas dos Índices de Poder, e agora verifica-se empiricamente o fato. A primeira destas propriedades é destacada como simetria, que corre com os jogadores E e F que possuem o mesmo número de votos, consequentemente o mesmo poder. É possível perceber também que a distribuição do poder não é proporcional ao número de votos que cada eleitor possui, e sim que o poder depende diretamente do número de coalizões a qual o jogador é *swing*. Esta evidência conforma a suposição de Banzhaf (1965), e por consequência destaca a subestimação do poder do eleitor com maior número de votos, bem como a superestimação dos eleitores com menor quantidade de votos. Por mais que os Índices de poder tenham resultados parecidos, existe uma certa discrepância para estes resultados, o que pode ser mitigado em comissões eleitorais maiores.

Sabendo que os valores obtidos acima são índices exatos de poder, procedeu-se o processo de estimação por simulação. O processo ocorre com a simulação de coalizões aleatórias em que são avaliadas para cada jogador, quantas vezes o mesmo foi *swing*. Se é estabelecido um número de coalizões simuladas, neste caso foram simuladas em um primeiro momento 10.000 coalizões e em um segundo momento 100.000 coalizões. A simulação ocorreu com a repetição do processo por 200 vezes. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos por meio do índice de poder estimado e do erro absoluto de mensuração para o Índice de Banzhaf.

Tabela 2 - Resultado das Simulações na mensuração do Índice de Poder de Banzhaf

Estimação Banzhaf		10.000 coalizões simuladas		100.000 coalizões simuladas	
	Banzhaf	Bz(i)	Erro	Bz(i)	Erro
A	0,21416084	0,21436897	0,00020813	0,21425886	0,00009802
B	0,16346154	0,16314225	0,00031929	0,16338066	0,00008088
C	0,13898601	0,13888765	0,00009837	0,13909419	0,00010818
D	0,10751748	0,10767268	0,00015519	0,10753894	0,00002146
E	0,09702797	0,09705877	0,00003079	0,09702265	0,00000532
F	0,09702797	0,09714571	0,00011774	0,09697507	0,00005290
G	0,07430070	0,07420732	0,00009338	0,07427553	0,00002517
H	0,04807692	0,04815688	0,00007996	0,04800367	0,00007326
I	0,03758741	0,03753665	0,00005076	0,03759097	0,00000356
J	0,02185315	0,02182312	0,00003003	0,02185946	0,00000631
Média			0,00011836		0,00004751

Fonte: resultados da pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 3 destacam que a estimativa, para o Índice de Banzhaf, realizada por meio da simulação de Monte Carlo foi satisfatória em ambas as simulações, com 10 e 100 mil simulações. Mais importante que isto foi a evidente redução do erro absoluto de cada observação bem como do erro médio absoluto. O que indica que o aumento do número de simulações existem fortes influências de que o valor converge para o índice exato.

Tabela 3 - Resultado das Simulações na mensuração do Índice de Poder de Shapley-Shubik

Estimação Shapley-Shubik		10.000 coalizões simuladas		100.000 coalizões simuladas	
	SS	SS(i)	Erro	SS(i)	Erro
A	0,21666667	0,21697916	0,00031249	0,21654007	0,00012660
B	0,16666667	0,16649997	0,00016669	0,16655629	0,00011037
C	0,14087302	0,14092576	0,00005274	0,14094335	0,00007034
D	0,10714286	0,10694196	0,00020090	0,10714368	0,00000082

E	0,09642857	0,09626577	0,00016280	0,09645297	0,00002440
F	0,09642857	0,09646534	0,00003677	0,09645727	0,00002870
G	0,07261905	0,07250714	0,00011191	0,07266958	0,00005054
H	0,04682540	0,04689848	0,00007308	0,04690323	0,00007784
I	0,03611111	0,03616381	0,00005270	0,03609549	0,00001562
J	0,02023810	0,02035262	0,00011452	0,02023807	0,00000003
Média			0,00012846		0,00005052

Fonte: resultados da pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 3 mostram-se satisfatórios para conseguir uma estimativa do Índice de Poder de Shapley-Shubik, com um erro absoluto médio pequeno considerando a precisão exigida para estes modelos de estimação. De similar modo ao que foi auferido para o Índice de Banzhaf, verifica-se a redução do erro médio absoluto com o aumento do número de coalizões simuladas.

Para a verificação da convergência do erro, a Tabela 4 destaca a Correlação entre o erro de mensuração dos índices de poder e o Desvio-Padrão da estimativa. O desvio-padrão foi obtido considerando os resultados das 200 repetições do processo de estimação.

Tabela 4 – Correlação entre o Erro de Mensuração e o Desvio Padrão das estimativas

Desvio-Padrão da Estimativa		Erro de Mensuração	
		Correlação	Significância
Banzhaf	10 mil	0,70164500	0,02373200
	100 mil	0,68443100	0,02902000
Shapley	10 mil	0,65932600	0,03809200
	100 mil	0,77756900	0,00810700

Fonte: resultados da pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 4 destacam a confirmação da relação linear entre o Desvio-Padrão das estimativas e o Erro Absoluto da estimativa. O resultado mais contundente foi para o método de estimação do Índice de Shapley-Shubik com 100 mil simulações, haja vista que foi este o único resultado significativo ao nível de 0,01. As demais correlações foram significativas ao nível de 0,05. Destaca-se a correlação média entorno de 0,70, o que pode ser considerando de moderada a forte intensidade, implicando assim, que conforme o método de simulação controle o Desvio-Padrão da estimativa ele também controlará o Erro.

Seguindo as afirmações de Hammersley e Handscomb (1964), Newman; Barkema (1999) e Dimov (2008), mesmo que o modelo de simulação seja mais comum para pesquisas em física e engenharias, o método se mostrou poderoso na mensuração dos índices de poder. Cabe destacar também, que ao se aumentar o número de simulações feitas por iteração, o erro absoluto médio foi reduzido, o que indica que é possível obter o valor os Índices de Shapley-Shubik e Banzhaf para qualquer grau de precisão. Evidentemente este aumento de precisão implica em aumento da necessidade de potência computacional.

Em comparação com os modelos propostos por Leech (2003) e Klinz e Woeginger (2005) o modelo não auferiu as precisões de forma semelhante aos trabalhos. Entretanto, o sistema utilizado de simulação mostra-se bastante simples quando comprado com os referidos modelos. Desta forma entende-se que modelo de simulação de Monte Carlo, considerando precisões não tão fortes, é viável e satisfatória. Por conta do Índices de Poder de Banzhaf e Shapley-Shubik, serem aplicados as ciências sociais, a precisão auferido pelos modelos apresentados destaca-se como satisfatória.

5 CONCLUSÃO

Este estudo teve como objetivo apresentar um modelo de simulação, por meio do método de Monte Carlo, que mensura-se os Índices de Poder de Banzhaf e Shapley-Shubik. A problemática foi elaborada levando em consideração o fato da complexidade envolvida no cálculo destes índices para grandes comissões de votação. O trabalho envolveu um modelo de simulação para cada um dos índices de poder e foram rodadas duas simulações, uma com 10 mil coalizões e outra com 100 mil coalizões repetidas sucessivamente por 200 vezes.

Os resultados apontaram para a confirmação da pressuposição de que o modelo de distribuição proporcional ao número de votos, não descreve uma alocação justa entre os eleitores envolvidos no processo. Também verificou-se a confirmação do axioma da simetria de Shapley (1953) que destaca que jogadores com mesmo número de votos recebem o mesmo percentual de poder.

Quanto aos resultados dos modelos de simulação, foram confirmados seus potenciais. Os resultados apresentaram erros médios absolutos inferiores a 10^{-3} para o modelo com 10 mil simulações e inferior a 10^{-4} para o modelo com 100 mil simulações. De similar modo a correlação linear verificada entre o desvio-padrão das estimativas e o erro absoluto confirmou que o desvio-padrão pode ser encarado como um fator de controle do erro de estimação. Assim conforme pressupõem a ideia da simulação de Monte Carlo, o desvio-padrão tendem a zero quando o número de iterações tende ao infinito, como há correlação positiva entre o desvio-padrão e erro absoluto, verifica-se também a convergência do modelo.

Desta forma conclui-se pela satisfação do objetivo da pesquisa e verificação que a simulação de Monte Carlo é uma estimativa potencialmente aplicável aos Índices de Poder de Shapley-Shubik e Banzhaf.

REFERÊNCIAS

- [1]. BANZHAF, J. F. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. **Rutgers L. Rev.**, v. 19, p. 317, 1965.
- [2]. BANZHAF, J. F. One man, 3.312 votes: a mathematical analysis of the Electoral College. **Villanova. Law Review**, v. 13, p. 304, 1968.
- [3]. DIMOV, I. T. **Monte Carlo Methods for Applied Scientists**. London, World Scientific, 2008.
- [4]. DUBEY, P. On the uniqueness of the Shapley value. **International Journal of Game Theory**, v. 4, n. 3, p. 131-139, 1975.
- [5]. DUBEY, P.; SHAPLEY, L. S. Mathematical properties of the Banzhaf power index. **Mathematics of Operations Research**, v. 4, n. 2, p. 99-131, 1979.
- [6]. EINY, E.; HAIMANKO, O. Characterization of the Shapley–Shubik power index without the efficiency axiom. **Games and Economic Behavior**, v. 73, n. 2, p. 615-621, 2011.
- [7]. FELTKAMP, V. Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. **International Journal of Game Theory**, v. 24, n. 2, p. 179-186, 1995.
- [8]. GONZÁLEZ-DÍAZ, J.; GARCÍA-JURADO, I.; FIESTRAS JANEIRO, M. G. (2010). **An introductory course on mathematical game theory**. Graduate Studies in Mathematics 115. American Mathematical Society, 2010.
- [9]. HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C. **Monte Carlo Methods**. London: Methuen e Co LTD, 1964.
- [10]. HU, X.; SHAPLEY, L. S. On authority distributions in organizations: equilibrium. **Games and Economic Behavior**, v.45, n. 1, p. 132-152, 2003
- [11]. JELNOV, A.; TAUMAN, Yr. Voting power and proportional representation of voters. **International Journal of Game Theory**, v. 43, n. 4, p. 747-766, 2014.
- [12]. KLINZ, B.; WOEGINGER, G. J. Faster algorithms for computing power indices in weighted voting games. **Mathematical Social Sciences**, v. 49 n.1 p. 111-116, 2005.
- [13]. LARUELLE, A.; VALENCIANO, F. Shapley-Shubik and Banzhaf indices revisited. **Mathematics of operations research**, v. 26, n. 1, p. 89-104, 2001.

- [14]. LARUELLE, A.; VALENCIANO, F. Inequality among EU citizens in the EU's Council decision procedure. **European Journal of Political Economy**, v. 18, n. 3, p. 475-498, 2002.
- [15]. LARUELLE, A.; VALENCIANO, F. Semivalues and voting power. **International Game Theory Review**, v. 5, n. 1, p. 41-61, 2003.
- [16]. LARUELLE, A.; VALENCIANO, F. Assessing success and decisiveness in voting situations. **Social Choice and Welfare**, v. 24, n. 1, p. 171-197, 2005.
- [17]. LEECH, D. Computing Power Indices for Large Voting Games. **Management Science**, v. 49, n. 6, p. 831-837, 2003.
- [18]. LEHRER, E. An axiomatization of the Banzhaf value. **International Journal of Game Theory**, v. 17, n. 2, p. 89-99, 1988.
- [19]. NEWMAN, M. E. J.; BARKEMA, G. T. **Monte Carlo Methods in Statistical Physics**. New York, Clarendon Press – Oxford, 1999.
- [20]. SHAPLEY, L. S. Stochastic games. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 39, n. 10, p. 1095, 1953.
- [21]. SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. **American Political Science Review**, v. 48, n. 03, p. 787-792, 1954.
- [22]. VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1944.