

**ENLACES DAS CONVEXIDADES DE CAMINHOS CURTOS EM
PROBLEMAS DE PARTIÇÕES E SEPARAÇÕES CONVEXAS****Lorrana F. de Castro**

Instituto do Noroeste Fluminense / Universidade Federal Fluminense – (INF/UFF)
Av. João Jasbick, S/N – Aeroporto - S. A. Pádua/RJ – Brasil
lorranafilmes@id.uff.br

Rodolfo A. de Oliveira

Instituto do Noroeste Fluminense / Universidade Federal Fluminense – (INF/UFF)
Av. João Jasbick, S/N – Aeroporto - S. A. Pádua/RJ – Brasil
rodolfooliveira@id.uff.br

Fábio Protti

Instituto de Computação / Universidade Federal Fluminense – (IC/UFF)
Gal. Milton Tavares de Souza, S/N – S. Domingos – Niterói/RJ – Brasil
fabio@ic.uff.br

RESUMO

Neste trabalho apresentamos alguns resultados teórico-computacionais sobre a convexidade P_3 e a convexidade P_3^* nas perspectivas de partição e separação convexas. Na vertente teórica, mostramos sobre quais aspectos ambas as convexidades são equivalentes, identificamos os menores grafos que não admitem uma partição convexa e listamos infinitos grafos com tal característica e, por último, analisamos os moldes de uma separação para caminhos, árvores, ciclos e cliques. Na vertente computacional, mostramos a NP-completude do problema de partição convexa em ambas as convexidades, mesmo restrito a classes particulares de grafos.

Palavra-chave: Convexidade; P_3 -convexidade; Partição Convexa.

ABSTRACT

In this paper, we present some theoretical and computational results concerning convexity P_3 and convexity P_3^* under the convex partitioning and separation perspectives. On the theoretical side, we show which aspects both convexities are equivalent to, we identify the smallest graphs that do not admit a convex partition and list an infinite class of graphs with no such partitioning, and finally, we analyze the patterns of convex separation for paths, trees, cycles, and cliques. In the computational aspect, we show the NP-completeness of the convex partitioning problem in both convexities, even restricted to particular class graphs.

Keywords: Convexity; P_3 -convexity; Convex Partitioning.

Como Citar:

CASTRO, Lorrana F.; OLIVEIRA, Rodolfo A.; PROTTI, Fábio. Enlaces das convexidades de caminhos curtos em problemas de partições e separações convexas em grafos. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA OPERACIONAL E LOGÍSTICA DA MARINHA, 19., 2019, Rio de Janeiro, RJ. *Anais* [...]. Rio de Janeiro: Centro de Análises de Sistemas Navais, 2019.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de convexidade, que foi basicamente definido e estudado em \mathbb{R}^d nos trabalhos pioneiros de Newton, Minkowski e outros, como descrito em [1], tem encontrado um lugar nas mais diversificadas e distintas estruturas matemáticas. Este desenvolvimento é motivado não apenas pela necessidade de uma teoria abstrata de convexidade generalizando os teoremas clássicos em \mathbb{R}^d devidos a Helly, Carathéodory, Radon etc., mas também para unificar aspectos geométricos de todas essas estruturas matemáticas.

Assim, de maneira simples e abrangente, por [2] temos que uma *convexidade* sobre um conjunto não-vazio X é uma família \mathcal{C} de subconjuntos de X que satisfaz: (c_1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$; (c_2) \mathcal{C} é estável por interseções; e (c_3) \mathcal{C} é estável por união aninhada. O par ordenado (X, \mathcal{C}) é chamado de *espaço de convexidade* (*estrutura convexa*, *espaço alinhado*), onde os membros de \mathcal{C} são chamados de *conjuntos convexos* e os seus complementos são chamados de *conjuntos côncavos*. Note que \emptyset e X são biconvexos triviais. O *fecho convexo* de $A \subseteq X$, escrito como $[A]_{\mathcal{C}}$, é o menor conjunto convexo contendo A . Denote por 2^X a coleção de todos os subconjuntos de X . Um *operador intervalar* $I : X \times X \rightarrow 2^X$ é uma aplicação que segue, para todo u e v em X , as seguintes propriedades: (i) $u, v \in I(u, v)$ (Lei da Extensão); (ii) $I(u, v) = I(v, u)$ (Lei da Simetria). O par ordenado (X, I) é chamado de *espaço intervalar*. Um subconjunto A de X é *(intervalo-)convexo* se $I(u, v) \subseteq A$, para todo $u, v \in A$. Muitas vezes, o intervalo é uma ferramenta fundamental para criação de espaços de convexidades sobre um dado conjunto.

Muitos problemas e questionamentos ladeiam o tema de convexidade, como por exemplo partição e separação convexa, que são nossos tópicos de interesse. Ainda de [2], um subconjunto S de X é dito *biconvexo* ou *semi-espaço* se for convexo e côncavo ao mesmo tempo, i.e., S e \bar{S} ($X \setminus S$) são ambos convexos. Uma convexidade tem uma *separação* se satisfaz os seguintes axiomas: (s_1) todos os subconjuntos unitários de X são convexos; (s_2) se $u \neq v \in X$, existe um biconvexo S de X com $u \in S$, $v \in \bar{S}$; (s_3) se $A \subseteq X$ é convexo e $x \in \bar{A}$, então existe um biconvexo S de X com $A \subseteq S$, e $x \in \bar{S}$; (s_4) se $A, B \subseteq X$ são conjuntos convexos disjuntos, então existe um biconvexo S de X com $A \subseteq S$ e $B \subseteq \bar{S}$. Em cada um dos axiomas s_2 , s_3 e s_4 , temos um conjunto biconvexo S e dois conjuntos A e B , com $A \subseteq S$ e $B \subseteq \bar{S}$. Por tal razão, dizemos que S *separa* A de B . Se X satisfaz o axioma s_i então X é chamado de s_i -*espaço de convexidade*, e a coleção dos seus conjuntos convexos é chamada de s_i -*convexidade*. Podemos generalizar o problema de partição biconvexa no problema de p -*partição convexas*, isto é, verificar a possibilidade de dividir X em p conjuntos disjuntos $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_p\}$ de modo que $\bigcup S_i = X$, $1 \leq i \leq p$, e para cada S_i vale que S_i e \bar{S}_i são ambos convexos.

O tema convexidade tem crescido de forma vertiginosa em grafos e seu interesse é atual como podemos observar nos recentes trabalhos [3, 4, 5, 6, 7]. Para um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas, em

grande parte dos trabalhos na área, a convexidade é verificada sobre o conjunto V . Com a utilização de métricas para definição de intervalos conforme a característica dos caminhos podemos construir convexidades particulares, e.g., os clássicos intervalos geodésico (para caminhos mínimos) e monofônico (para caminhos induzidos), que constituem, respectivamente, as convexidades Geodésica [8] e Monofônica [9, 10]; intervalo triangulado, que admite caminhos com triângulos, para a convexidade de caminhos triangulados [11]; intervalo de Steiner¹, que utiliza o conceito de árvore de Steiner, para a convexidade de Steiner [12]. No livro intitulado “*Geodesic Convexity in Graphs*” [13], podemos encontrar mais informações sobre as convexidades listadas.

A convexidade de nosso interesse é a convexidade que se baseia em caminhos curtos, i.e., caminhos de comprimento exato 2 em grafos. Normalmente, tal convexidade é chamada de convexidade P_3 . Para cada elemento $W \subseteq V$ da convexidade P_3 , temos que qualquer vértice com pelo menos dois vizinhos em W pertence ao mesmo; em outras palavras, não existe nenhum vértice em $V \setminus W$ adjacente a dois vértices em W . Uma variação desta é a convexidade P_3^* , a qual exige que o caminho seja induzido, i.e, para todo $W \subseteq V$ na convexidade P_3^* verifica-se que qualquer vértice com pelo menos dois vizinhos não-adjacentes em W também está em W . Ambas as convexidades possuem interesse relevante de pesquisa como podemos observar em alguns trabalhos recentes [14, 15, 16].

Existem diversos interesses computacionais referentes aos parâmetros de uma convexidade [17, 18]. Um desses parâmetros refere-se ao problema de partições convexas, como por exemplo já fora estudado em [19] para convexidade geodésica. O cerne deste trabalho é o estudo do problema de partições convexas não-triviais em grafos na convexidade P_3 e na sua variação P_3^* . O que motiva a escolha deste tema, além do interesse teórico-computacional, é a sua aplicação hipotética em determinação e delimitação de regiões endêmicas de contágio de alguma enfermidade infectocontagiosa, como por exemplo dengue, leishmaniose ou malária. Se por hipótese assumirmos que uma doença se potencializa a 100% na sua ação sobre um indivíduo se o mesmo tiver dois tipos de contato por ao menos dois hospedeiros distintos, temos que isso se adéqua à convexidade P_3 . Portanto, dado um grafo que modela indivíduos de uma população e uma região endêmica com uma certa quantidade de indivíduos infectados, podemos tentar encontrar W contendo tais indivíduos da região de modo a ser biconvexo na convexidade P_3 . Assim podemos determinar grupos de indivíduos com potencial de, em algum momento, serem contaminados em W , caso não haja controle da doença com os indivíduos na região endêmica; note que em $\bar{W} = V \setminus W$ temos os indivíduos fora de qualquer risco de contágio.

Todavia, verificar se um grafo admite p -partição convexa para convexidade P_3 , com $p \geq 2$, é demonstrado ser NP-completo, mesmo para grafos “*split*” [20]. Neste trabalho, reforçaremos esse resultado mesmo para p -fixo, assim como para a convexidade P_3^* . Além disso, mostraremos que o problema é NP-completo para ambas as convexidades restritas a grafos bipartidos e outras classes de grafos. Além

¹Mesmo embora aparente ser degenerado por se basear em árvores, faz sentido quando lembramos que árvores admitem um único caminho entre cada par de vértices.

desses resultados, listaremos infinitos grafos que não admitem uma partição convexa para ambas as convexidades e discutiremos pioneiramente separação convexa em convexidades P_3 e P_3^* para classes de grafos pequenas.

2. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Considere $G = (V, E)$ um grafo finito, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas². Denote por $|V| = n$ e $|E| = m$. Um *subgrafo* G' de G deve satisfazer $V(G') \subseteq V$ e $E(G') \subseteq E$. Para $W \subseteq V$, o *subgrafo induzido* por W é um grafo denotado por $G[W]$ de modo que, para todo $u, v \in W$, se existe a aresta $uv \in E$ então $uv \in E(G[W])$. Um grafo G é dito *planar* quando houver ao menos uma representação de G imersa no plano sem cruzamento de arestas. Dado um vértice $u \in V$, defina a *vizinhança aberta* de u por $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$, e a *vizinhança fechada* de u por $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Um vértice $u \in V$ é chamado *isolado* se $N(u) = \emptyset$. O *grau* de um vértice v corresponde ao tamanho de $N(v)$. Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são chamados *isomorfos* se $|V_1| = |V_2|$ e existe uma função unívoca $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $uv \in E_1$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E_2$. Um subconjunto de vértices $W \subseteq V$ é chamado de *conjunto estável* quando $G[W]$ é constituído apenas por vértices isolados. Usamos os termos *partição* ou *particionar* para nos referirmos a qualquer divisão disjunta de elementos de um conjunto, cuja união é exatamente o próprio conjunto. Um grafo admite uma *bipartição* se podemos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos não-vazios e estáveis. Tal grafo é chamado de *bipartido*. Um grafo *bipartido completo* $K_{p,q}$ é um grafo bipartido em A e B , onde $|A| = p$ e $|B| = q$, tal que existe aresta xy para todo par $x \in A, y \in B$.

Um *caminho* é uma sequência de vértices distintos $x_1x_2 \dots x_\ell$ de G tal que existem as arestas $x_i x_{i+1} \in E$, para $1 \leq i \leq \ell - 1$. Denote P_n um caminho com n vértices. O *comprimento de um caminho* é igual ao número de vértices do caminho menos uma unidade. Uma *corda* em um caminho é uma aresta de G que interliga dois vértices não-consecutivos no caminho em questão. Um grafo é dito *conexo* se para cada par de vértices existe ao menos um caminho, e *desconexo* caso contrário. Dado um grafo conexo, um aresta é chamada de *ponte* se, quando removida do grafo, o torna desconexo. Um *emparelhamento* é um conjunto $M \subseteq E$ tal que todo vértice do grafo incide no máximo em uma aresta de M . Um *componente conexo* é um subgrafo maximal que induz um grafo conexo. Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas. O *diâmetro* de um grafo é a maior distância entre qualquer par de vértices. Dado dois vértices $u, v \in V$, a *distância entre u e v* , denotada por $d_G(u, v)$, é o menor comprimento de um caminho induzido entre u e v no grafo. Um *ciclo* consiste de um caminho $x_1x_2 \dots x_\ell$ ao qual se adiciona a aresta x_1x_ℓ . Denote por C_n um ciclo com n vértices, onde C_n é um ciclo *par* (*ímpar*) se n é um número par (ímpar). O ciclo C_3 é chamado de *triângulo*. Uma *diagonal* em ciclo é uma aresta de G que interliga dois vértices não consecutivos do ciclo. Um *ciclo induzido* é um ciclo sem diagonais. O grafo G é dito *acíclico* se não contém nenhum ciclo

²Podemos escrever $V(G)$ para reforçar que o conjunto de vértices é de G , assim como para as arestas podemos escrever $E(G)$.

como subgrafo. Todo grafo conexo e acíclico é chamado de *árvore*; caso seja apenas acíclico, é chamado de *floresta*. Um grafo K_n é dito *completo* se para cada par de vértices u e v de K_n existe uma aresta. Uma *clique* é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo; em outras palavras, cada conjunto de três vértices da clique induz num triângulo. Um vértice v é chamado de *simplicial* se $N(v)$ é uma clique. Um grafo é dito *split* se podemos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos A e B , onde A é uma clique e B é estável.

Uma propriedade importante é:

Propriedade 2.1. [21] *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclo ímpar como subgrafo induzido.*

Como havíamos mencionado, a convexidade P_3 se baseia em caminhos curtos, isto é, caminhos cujo comprimento é 2. Note que o vértice interno de qualquer caminho de comprimento 2 está na interseção entre as vizinhanças dos extremos do caminho. Assim, considere o operador I_3 aplicado em $a, b \in V$ sendo:

$$I_3(a, b) = N[a] \cap N[b] \quad (1)$$

Para um subconjunto de vértices W , considere $I_3[W] = \bigcup I_3(a, b)$ para todo $a, b \in W$, se $|W| \geq 2$, e $I_3[W] = W$ caso contrário. Dizemos que W é P_3 -convexo se, e somente se, $I_3[W] = W$. Assim, a convexidade P_3 é constituída por subconjuntos de V que satisfazem a propriedade de serem P_3 -convexos. O menor conjunto P_3 -convexo contendo um dado W é chamado de *fecho P_3 -convexo* de W , e é denotado por $[W]_{p3}$. O processo de encontrar o fecho P_3 -convexo pode ser efetuado de forma iterativa. Para dado um $W \subseteq V$, considere:

- i. $I_3^1[W] = I_3[W]$;
- ii. $I_3^k[W] = I_3[I_3^{k-1}[W]]$.

O processo termina quando tivermos $I_3^k[W] = I_3^{k-1}[W]$ e, então, podemos concluir que $I_3^{k-1}[W] = [W]_{p3}$. Pelo fato de o grafo ser finito, podemos concluir que todo o processo é finito.

Já para a convexidade P_3^* , considere o seguinte intervalo:

$$I_3^*(a, b) = \{w \in V : d_G(a, w) + d_G(w, b) = 2 \wedge d_G(a, b) = 2\} \cup \{a, b\} \quad (2)$$

Analogamente, para um subconjunto de vértices W , considere $I_3^*[W] = \bigcup I_3^*(a, b)$ para todo $a, b \in W$, se $|W| \geq 2$, e $I_3^*[W] = W$ caso contrário. Dizemos que W é P_3^* -convexo se, e somente se, $I_3^*[W] = W$. Assim, a convexidade P_3^* é constituída por subconjuntos de V que satisfazem a propriedade de serem P_3^* -convexos. O menor conjunto P_3^* -convexo contendo um dado W é chamado de *fecho P_3^* -convexo* de W , e o escrevemos como $[W]_{p3^*}$.

Podemos verificar que:

Propriedade 2.2. *Dado um grafo G , a convexidade P_3 definida sobre G está contida na convexidade P_3^* também definida sobre G .*

Demonstração. Observe pelas definições dos intervalos das Eq (1) e Eq (2) que todo conjunto P_3 -convexo é também P_3^* -convexo. Logo, vale a propriedade. ■

Um subconjunto W de V será chamado P_3 -biconvexo (P_3^* -biconvexo) se W e \bar{W} são ambos P_3 -convexos (P_3^* -convexos). Note que é interessante que o subconjunto de vértices W seja não-trivial, i.e., o conjunto W tem que ser um subconjunto próprio e não-vazio de V . Portanto, como nosso interesse é o estudo apenas em partições não-triviais, omitiremos esse termo; porém, deixaremos claro que apenas importam subconjuntos próprios e não-vazios na partição. Além disso, podemos generalizar o problema com a utilização do termo p -partição P_3 -convexas (ou P_3^* -convexas), onde o nosso interesse é particionar V em p subconjuntos disjuntos que sejam P_3 -convexos (ou P_3^* -convexos). Note que biconvexo é uma particularização para $p = 2$.

3. ANÁLISE TEÓRICA E COMPUTACIONAL

3.1. Estudo Teórico de Partição e Separação Convexa

Agora faremos análises teóricas de ambas as convexidades. Para entendermos a relação entre as duas convexidades, destacamos o primeiro resultado:

Teorema 3.1. *Se G possui um conjunto $W \subseteq V$ de modo que W seja um conjunto P_3 -biconvexo, então W também é um conjunto P_3^* -biconvexo.*

Demonstração. Pela **Propriedade 2.2**, temos que todo conjunto P_3 -convexo é P_3^* -convexo. Assim, para dado W P_3 -biconvexo, temos W e \bar{W} ambos P_3 -convexos e, conseqüentemente, W e \bar{W} ambos P_3^* -convexos. Logo, W é também P_3^* -biconvexo. ■

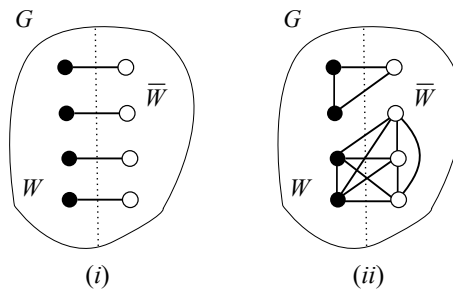


Figura 1: Em (i) o grafo G contém W P_3 -biconvexo, e em (ii) W é P_3^* -biconvexo.

A recíproca do teorema anterior é falsa. Uma justificativa para tal é que um conjunto W dito P_3 -biconvexo não admite um vértice de W que seja adjacente a dois em \bar{W} , assim como nenhum vértice em \bar{W} possui dois vizinhos (adjacentes ou não) em W . Porém, um conjunto P_3^* -biconvexo admite a existência deste vértice se os seus vizinhos na outra parte forem adjacentes. Vejamos exemplos de partições válidas na Figura 1, onde em (i) temos a exemplificação do comportamento das arestas para um conjunto P_3 -biconvexo, e em (ii) para um conjunto P_3^* -biconvexo.

Continuando no **Teorema 3.1**, podemos verificar que:

Corolário 3.1. *Dado um grafo G , toda p -partição P_3 -convexa para G é também uma p -partição P_3^* -convexa para G .*

Um fato interessante que podemos observar da Figura 1 é que as arestas da partição, i.e., as arestas que conectam W a \bar{W} , são arestas de cliques. Para conjuntos P_3 -biconvexos são exatamente arestas de cliques de tamanho 2; já para P_3^* -biconvexos são arestas de cliques de qualquer tamanho. Então, isso sugere que:

Proposição 3.1. *Se G não contém triângulos, as convexidades P_3 e P_3^* são equivalentes para G .*

Demonstração. Suponha que não sejam equivalentes as duas convexidades. Como foi verificado na **Propriedade 2.2**, temos que W P_3 -convexo também é P_3^* -convexo. Então existe um conjunto W que é P_3^* -convexo, mas que não é P_3 -convexo. Então, isso significa que $I_{p3}[W] \neq W$. Assim, temos que existe algum vértice v em $I_{p3}[W] \setminus W$ de modo que v é adjacente a pelo menos dois vértices em W . Mas v não está em $I_{p3^*}[W]$, pois $I_{p3^*}[W] = W$. Assim, temos que v tem arestas a dois vértices de W adjacentes. Contradição, pois G não contém triângulos. ■

Assim, podemos concluir que:

Corolário 3.2. *Se G não contém triângulos, então toda p -partição P_3 -convexa é também uma p -partição P_3^* -convexa.*

Observe que uma condição necessária para G conter um conjunto P_3 -biconvexo (ou P_3^* -biconvexo) é que $|V| \geq 2$. Se um grafo G é desconexo, então podemos escolher $X = V(G')$ como um conjunto P_3 -biconvexo (ou P_3^* -biconvexo), para $G' \subseteq G$ conexo. Assim, considere mais duas importantes propriedades:

Propriedade 3.1. *Seja G um grafo conexo. Se G possui ponte, então G possui um conjunto P_3 -biconvexo W contendo um componente conexo com a remoção da ponte.*

Propriedade 3.2. *Seja G um grafo conexo. Se existe um conjunto P_3 -biconvexo $W \subseteq V$, então toda aresta de uma clique maximal de tamanho maior que 2 é induzida ou por W ou por \bar{W} .*

Ambas as propriedades podem ser verificadas pela Figura 1. Note que para a **Propriedade 3.1** seria o caso de termos apenas uma aresta para a Figura 1-(i). A **Propriedade 3.2** também pode ser verificada pelo mesmo item (i) da figura; porém tal resultado não é verdade se compararmos com a Figura 1-(ii).

Agora, é fácil verificar para grafos como P_2 e P_3 que, por terem pontes, possuem um conjunto P_3 -biconvexo. Além disso, $C_3 = K_3$ não é P_3 -biconvexo, pela **Propriedade 3.2**. Logo:

Corolário 3.3. *C_3 é o menor grafo que não admite um conjunto P_3 -biconvexo.*

Note que qualquer vértice simplicial pode particionar qualquer grafo na convexidade P^* . Assim, também podemos verificar que:

Propriedade 3.3. *Seja G um grafo conexo. Se G possui um vértice simplicial, então existe um conjunto P_3^* -biconvexo em G .*

Assim, verificamos que:

Corolário 3.4. $K_{2,3}$ é o menor grafo que não admite um conjunto P_3^* -biconvexo.
Demonstração. Pela **Propriedade 3.3**, temos que não existem vértices simpliciais no grafo que buscamos sem partição P_3^* -biconvexa. Então C_3 deve ser descartado. Aliás, qualquer grafo com 4 vértices também deve ser descartado, pois sempre teremos um conjunto P_3^* -biconvexo neste caso, visto que tal grafo não contém pontes e nem vértices simpliciais pela **Propriedade 3.1** e pela **Propriedade 3.3** (note que C_4 admite um conjunto P_3^* -biconvexo, colocando dois vértices adjacentes em W). Então, o menor grafo que não admite um conjunto P_3^* -biconvexo tem 5 vértices. Podemos verificar que $K_{2,3}$ não admite tal conjunto. No entanto, a remoção de qualquer aresta leva a um grafo com partição biconvexa, pois haverá uma ponte após a remoção. Logo, $K_{2,3}$ é o menor grafo que não admite um conjunto P_3^* -biconvexo. ■

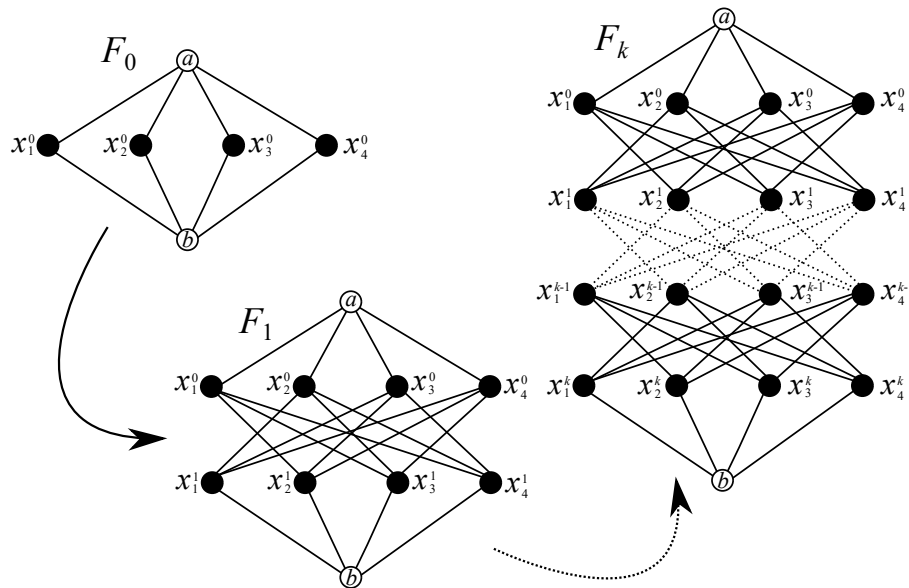


Figura 2: Família infinita de grafos que não admitem conjuntos P_3 -biconvexos nem P_3^* -biconvexos.

Na verdade, existe uma infinidade de grafos com a característica de não admitirem uma partição biconvexa. Para isso, primeiro considere F_0 como na Figura 2. Note que este grafo é $K_{2,4}$, que contém $K_{2,3}$. Para construir F_1 , removemos todas as arestas incidentes a b e criamos 4 vértices $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$ fazendo-os adjacentes a b ; em seguida criamos o conjunto de arestas $\{x_i^0 x_j^1 : 1 \leq i, j \leq 4 \wedge i \neq j\}$. Assim, temos F_1 conforme mostra a Figura 2. Repetindo o processo k vezes, removendo todas as arestas incidentes a b e criando 4 vértices $x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k$ fazendo-os adjacentes a b , e inserindo as arestas $\{x_i^{k-1} x_j^k : 1 \leq i, j \leq 4 \wedge i \neq j\}$, criamos F_k . Note que F_i não está contido em F_k , para todo $i < k$ inteiros não-negativos.

Considere o lema a seguir:

Lema 3.1. *O grafo F_k não admite um conjunto P_3 -biconvexo e nem P_3^* -biconvexo, para todo k inteiro não-negativo.*

Demonstração. Mostraremos por indução que F_k não é P_3 -biconvexo, para todo k inteiro não-negativo. A base de indução está satisfeita pelo **Corolário 3.4**, visto que F_0 é isomorfo a $K_{2,4}$, que é composto por $K_{2,3}$ mais um vértice adjacente aos vértices da menor parte. Considere F_k , para $k > 0$ inteiro não-negativo. Fazendo $V(F_k) \setminus (\{b, x_\alpha^k, x_\beta^k, x_\gamma^k\})$ e x_δ^k adjacente a x_δ^{k-1} , temos um grafo isomorfo a F_{k-1} , para $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $\delta \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Pela hipótese de indução, tal grafo não admite um conjunto P_3 -biconvexo. Com isso temos que qualquer tentativa de encontrar um conjunto W P_3 -biconvexo com ou sem x_δ^k é frustrada, pois ou $[W]_{p3} = V$ ou $[\bar{W}]_{p3} = V$. No entanto, sem a aresta $x_\delta^k x_\delta^{k-1}$, poderíamos verificar ou $[W]_{p3} \neq V$ ou $[\bar{W}]_{p3} \neq V$, para algum W . Para cada $W \subseteq V(F_k) \setminus (\{b, x_\alpha^k, x_\beta^k, x_\gamma^k\})$, vejamos os seguintes casos para F_k :

- Se $x_\delta^k \in [W]_{p3}$, temos pelo menos $x_{\alpha'}^{k-1}, x_{\beta'}^{k-1} \in N(x_\delta^k)$ que estão em $[W]_{p3}$. No entanto, também temos $x_{\gamma'}^k$ na mesma situação de x_δ^k e, com isso, podemos concluir que $x_{\gamma'}^k \in [W]_{p3}$. Então, temos $b \in [W]_{p3}$, pois $b \in I_3(x_{\gamma'}^k, x_{\delta'}^k)$. Logo $x_{\alpha'}^k, x_{\beta'}^k \in [W]_{p3}$, pois $x_{\alpha'}^k \in I_3(x_{\beta'}^{k-1}, b)$ e $x_{\beta'}^k \in I_3(x_{\alpha'}^{k-1}, b)$, e por esta razão temos $x_\alpha^{k-1}, x_\beta^{k-1}, x_\gamma^{k-1}, x_\delta^{k-1} \in W$. Portanto, $[W]_{p3} = V$.
- Se $x_\delta^k \notin [W]_{p3}$, temos pelo menos $x_{\alpha'}^{k-1}, x_{\beta'}^{k-1} \in N(x_\delta^k)$ que não estão em $[W]_{p3}$. De forma análoga ao item anterior, chegaremos à conclusão de que b não está em $[W]_{p3}$, assim como os restantes. Logo $[\bar{W}]_{p3} = V$.

Agora, se $W \subseteq \{b, x_\alpha^k, x_\beta^k, x_\gamma^k\}$, temos um grafo $K_{2,3}$ para cada vértice $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1}$. Assim, esses vértices ou inserem ou removem vértices de $V(F_{k-1})$. Logo, para F_k , ou $[W]_{p3} = V$ ou $[\bar{W}]_{p3} = V$, para todo $W \subseteq V(F_k)$.

Para finalizar, note que F_k não contém triângulos, para todo k inteiro não-negativo, e temos que todo conjunto P_3^* -convexo é P_3 -convexo pela **Proposição 3.1**. Assim, concluímos a prova. ■

Podemos verificar que:

Teorema 3.2. *Existem infinitos grafos que não são P_3 -biconvexos nem P_3^* -biconvexos.*

Este resultado era esperado, visto que verificar existência de partição para a convexidade P_3 é um problema NP-completo, como discutiremos na próxima sessão.

Agora, veremos alguns resultados sobre separação. Como este é um tema até o momento pouco estudado em grafos, trazemos alguns aspectos preliminares em algumas classes pequenas.

Lema 3.2. *Para todo caminho induzido P_n com $n \geq 2$, temos que a convexidade P_3 é uma s_3 -convexidade.*

Demonstração. Seja P_n induzido com $n \geq 2$. Considere W um conjunto P_3 -convexo e $v \in V \setminus W$. Se o grau de v for 1, podemos notar que $S = V \setminus \{v\}$ é P_3 -biconvexo. Caso contrário, note que v não possui dois vizinhos em X . Assim, podemos impedir que um vizinho de v' de v entre em S . Portanto, $S = V \setminus \{v, v'\}$ é P_3 -biconvexo. ■

Vale lembrar que um conjunto convexo não precisa ser conexo necessariamente³. O axioma S_4 não é válido para qualquer caminho, pois se tomarmos $P_5 : v_1v_2v_3v_4v_5$ e fizermos $W = \{v_1, v_4\}$ e $W' = \{v_2, v_5\}$ conjuntos P_3 -convexos, não há conjunto P_3 -biconvexo S de modo que $W \subseteq S$ e $W' \subseteq V \setminus S$. Isso se deve ao fato de v_3 afetar os conjuntos W e W' quando tentamos colocá-lo em S ou fora dele.

Teorema 3.3. *Para toda árvore T_n com $n \geq 2$, temos que a convexidade P_3 é uma s_3 -convexidade.*

Demonstração. Se T_n for um caminho, temos a prova concluída pelo **Lema 3.2**. Caso contrário, dados $W \subseteq V$ convexo e $v \in V \setminus W$, temos que o vértice v não tem dois vizinhos em W . Portanto, façamos $W' = N[v] \setminus W$. Assim, podemos concluir que $S = V \setminus W'$ é P_3 -biconvexo. ■

Do teorema anterior e da **Proposição 3.1**, podemos concluir que:

Corolário 3.5. *Para toda árvore T_n com $n \geq 2$, temos que a convexidade P_3^* é uma s_3 -convexidade.*

Teorema 3.4. *Para todo ciclo induzido C_n com $n \geq 4$, temos que a convexidade P_3 é uma s_3 -convexidade.*

Demonstração. A prova é análoga à do **Lema 3.2**, onde o grau de v é igual a dois. ■

Do teorema anterior e da **Proposição 3.1**, podemos concluir que:

Corolário 3.6. *Para todo ciclo induzido C_n com $n \geq 4$, temos que a convexidade P_3^* é uma s_3 -convexidade.*

Já para o grafo C_n , com $n \geq 4$, não podemos dizer que as convexidades P_3 ou P_3^* são s_4 -convexidades. Para isso, tomamos $C_7 : v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7$, com $W = \{v_1, v_4\}$ e $W' = \{v_2, v_5\}$. Note que W e W' são ambos convexas. Todavia, não há como encontrar S P_3 -biconvexo (ou P_3^* -biconvexo) com ou sem o vértice v_3 . Portanto, em grafos restritos a ciclos de tamanho maior que 3, as convexidades P_3 e P_3^* não são s_4 -convexidades.

Teorema 3.5. *Para toda clique K_n , com $n \geq 3$, temos que a convexidade P_3 é uma s_1 -convexidade.*

Demonstração. A prova é bem simples, pois temos da **Propriedade 3.2** que todos os vértices de uma clique maximal de tamanho maior que 2 têm que pertencer ao mesmo conjunto P_3 -biconvexo. Logo, não há como particionar K_n e, portanto, temos que os axiomas S_2 , S_3 e S_4 não são válidos por dependerem de um conjunto P_3 -biconvexo. Logo, segue o teorema. ■

³Nos primórdios de estudo da convexidade em grafos, exigia-se a conexidade dos elementos da convexidade. mas isto foi perdendo importância à medida que surgiam novas convexidades.

Contudo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.6. *Para toda clique K_n , com $n \geq 2$, temos que a convexidade P_3^* é uma s_4 -convexidade.*

Demonstração. Pela **Propriedade 3.3**, temos que os vértices simpliciais particionam o grafo em conjuntos P_3^* -biconvexos. Dados W e W' convexas e disjuntos, façamos $S = W$. Note que todos os vértices de S são simpliciais em S , assim como os vértices de $V(K_n) \setminus S$. Logo, podemos verificar que S é P_3^* -biconvexo. ■

Sobre separação, temos a seguinte propriedade:

Propriedade 3.4. [2] *Para os axiomas s_1 , s_2 , s_3 e s_4 temos:*

- i. $s_2 \Rightarrow s_1$;
- ii. *Assumindo s_1 verdadeiro, então $s_4 \Rightarrow s_3 \Rightarrow s_2$.*

Lembramos que o conjunto unitário também é convexo em ambas as convexidades estudadas. Logo, pela a propriedade acima e o **Teorema 3.6**, temos:

Corolário 3.7. *A convexidade P_3^* tem uma separação em grafos completos.*

Apesar do resultado acima, os grafos completos de tamanho maior que 2 constituem um família infinita de conjuntos que não admitem conjuntos P_3 -biconvexos. Assim, podemos concluir que a quantidade de grafos que não admitem um conjunto P_3 -biconvexo é bem maior do que os que não admitem um conjunto P_3^* -biconvexo.

3.2. Análise Computacional

A análise de complexidade é algo inerente ao nosso objeto de estudo. Existem problemas combinatórios que se relacionam com os problemas deste trabalho, e, por serem relevantes, foram colocados nesta seção para reforçar os resultados de complexidade, alguns já existentes na literatura.

Assim, formalizamos:

.....
PROBLEMA DA p -PARTIÇÃO P_3 -CONVEXA (P_3PC)
Instância: *Um grafo conexo G e um inteiro positivo p .*
Questão: *G possui uma p -partição em conjuntos P_3 -convexos?*

E, analogamente:

.....
PROBLEMA p -PARTIÇÃO P_3^* -CONVEXA (P_3^*PC)
Instância: *Um grafo conexo G e um inteiro positivo p .*
Questão: *G possui uma p -partição em conjuntos P_3^* -convexos?*

Para ambos os casos, os problemas em partição biconvexa são denotados como P_32C e P_3^*2C , respectivamente.

Como mencionamos, o problema P_3PC é NP-completo, mesmo para grafos *split* [20]. Contudo, veremos que existem outras classes de grafos onde o problema permanece NP-completo. Para $E' \subseteq E$, denote por $G - E'$ o grafo resultante da remoção das arestas em E' de G . Assim, considere o seguinte problema:

.....
PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO DE CORTE (“*Matching-Cut*” – MC)
Instância: Um grafo conexo G .
Questão: Existe um emparelhamento $E' \subseteq E$ tal que $G - E'$ é desconexo?
.....

O problema MC é NP-completo, mesmo para grafos planares com grau máximo 4 [22, 23, 24], ou grafos com diâmetro máximo d fixo ($d \geq 4$) [25].

Podemos verificar que, em essência, ambos os problemas MC e P_32C são equivalentes. Assim, podemos verificar:

Teorema 3.7. *O problema P_32C é NP-completo, mesmo restrito a grafos planares com grau máximo 4 ou com diâmetro máximo d fixo, com $d \geq 4$.*

Note que se um grafo G possui uma p -partição em conjuntos P_3 -convexos, então G possui um conjunto P_3 -biconvexo. Logo:

Corolário 3.8. *O problema P_3PC com p fixo é NP-completo, mesmo restrito a grafos planares com grau máximo 4 ou grafos com diâmetro máximo d fixo, com $d \geq 4$.*

Enunciamos agora o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *O problema P_3^*2C é NP-completo.*

Demonstração. Primeiro, é fácil verificar um certificado em tempo polinomial. Para isso, basta analisar se $W \neq \emptyset$ e $W \neq V$ e, em seguida, efetuar o intervalo da Eq 2 para cada par de vértices a, b em W , a fim de verificar se $I_3^*(a, b) \subseteq W$. Como isso pode ser feito em tempo polinomial, o problema está em NP.

Considere $\langle G = (V, E) \rangle$ um entrada para o problema P_32C , e construamos a partir dela uma entrada $\langle G^* = (V^*, E^*) \rangle$ para o problema P_3^*2C . A função transformação $T(G)$ consiste em eliminar os triângulos de G , pois pela **Proposição 3.1** garantimos que ambas as convexidades são equivalentes neste caso. Para isso, para cada $\{a, b, c\} \subseteq V$ induzindo C_3 em G , criaremos o conjunto de vértices $\{a, b, c, v_{ab}, v_{ac}, v_{bc}, u_{abc}, u'_{abc}\}$ em V^* , o conjunto das arestas $\{av_{ab}, av_{ac}, bv_{ab}, bv_{bc}, cv_{ac}, av_{bc}, v_{ab}u_{abc}, v_{ab}u'_{abc}, v_{bc}u_{abc}, v_{bc}u'_{abc}, v_{ac}u_{abc}, v_{ac}u'_{abc}\}$ em E^* , e removemos as arestas ab, ac e bc . Essa transformação de G para G^* pode ser vista na Figura 3.

Para os vértices restantes que não pertencem a nenhum triângulo, replicamos em G^* mantendo as mesmas adjacências do grafo G . Note que a transformação $T(G)$ é feita em tempo polinomial.

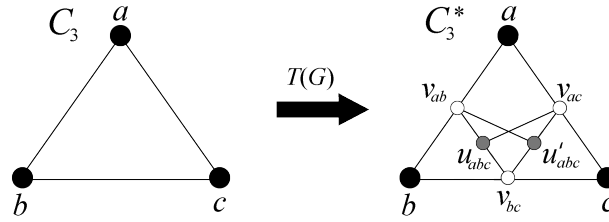


Figura 3: Método da transformação $T(G) = G^*$, que converte os triângulos de G , à esquerda, nas estruturas em G^* , à direita.

Agora seguiremos com a conclusão da prova de equivalência entre os problemas.

(\Rightarrow) Seja $\langle G = (V, E) \rangle$ uma instância SIM do problema P_32C . Seja W um conjunto P_3 -biconvexo de G . Então, pelo **Teorema 3.1**, temos que W também é um conjunto P_3^* -biconvexo. Assim sendo, se existe um subgrafo C_3 induzido por W , então fazemos W^* receber os vértices do subgrafo associado C_3^* pela função transformação $T(G)$. Já os vértices restantes de W também são associados a seus correspondentes em W^* por $T(G)$. Um fato importante: pela **Propriedade 3.2**, temos que não existe nenhum subgrafo C_3 com algum vértice em W e outro em \bar{W} . Logo, os vértices de um subgrafo C_3^* não podem ser compartilhados entre W^* e \bar{W}^* . Assim, podemos concluir que W^* é um conjunto P_3^* -biconvexo. Portanto, $\langle G^* = (V^*, E^*) \rangle$ é uma instância SIM do problema P_3^*2C .

(\Leftarrow) Seja $\langle G^* = (V^*, E^*) \rangle$ uma instância SIM do problema P_3^*2C . Seja W^* um conjunto P_3^* -biconvexo de G^* . Agora, considere a seguinte afirmação:

Afirmção 1: Para cada C_3^ criado pela função transformação $T(G)$, temos que não existe nenhum conjunto P_3^* -biconvexo em G de modo a não conter todos os vértices de C_3^* .*

Isto é, se algum vértice em C_3^* pertencer a um conjunto W P_3^* -biconvexo, então todos vértices de C_3^* pertencem a W . Isso se deve ao fato de que todos os vértices de C_3^* pertencem a algum subgrafo $K_{2,3}$, que não possui conjunto P_3^* -biconvexo pelo **Corolário 3.4**. Note que pela **Proposição 3.1**, temos que W^* também é um conjunto P_3 -biconvexo, pois G^* não contém triângulo por construção. Além disso, temos que os vértices de cada C_3^* de G^* pertencem ou a W^* ou a \bar{W}^* pela *Afirmção 1*. Então, se fizermos W receber todos os vértices originais de G em W^* , teremos que os triângulos de G nunca estarão compartilhados entre W e \bar{W} , e com isso estaremos apenas ligando pares distintos entre W e \bar{W} . Portanto, temos uma instância SIM para $\langle G = (V, E) \rangle$. ■

Note que se G tiver grau máximo 4, a transformação $T(G)$ não muda o grau dos vértices em G^* , e os vértices novos possuem grau 3. Portanto, o problema P_3^*2C permanece NP-completo mesmo quando o grafo tem grau máximo 4. Assim:

Corolário 3.9. O problema P_3^*PC com p fixo é NP-completo, mesmo para grafos com grau máximo 4.

Corolário 3.10. O problema P^*2C é NP-completo para grafos bipartidos.

Demonstração. Considere a mesma construção do **Teorema 3.8** para arestas em triângulos, e para as arestas restantes xy criaremos os vértices z_{xy} e z'_{xy} com as arestas $\{xz_{xy}, xz'_{xy}, yz_{xy}, yz'_{xy}\}$. Note que removemos todos os ciclos ímpares. Assim, se existir um conjunto P_3 -biconvexo W em G , façamos r, z_{rs} em W^* e s, z'_{rs} em \bar{W}^* , onde $r \in W$ e $s \in \bar{W}$. Já para os outros vértices façamos r, s, z_{rs}, z'_{rs} em W^* se $r, s \in W$; ou r, s, z_{rs}, z'_{rs} em \bar{W}^* caso contrário. E, por fim, temos W^* um conjunto P_3^* -biconvexo. Em contrapartida, se G^* contém um conjunto P_3^* -biconvexo W^* , temos que um vértice em W^* não possui mais de um vizinho em \bar{W}^* . Com isso, podemos encontrar um conjunto P_3 -convexo W fazendo $W = W^* \cap V(G)$ e $\bar{W} = \bar{W}^* \cap V(G)$, e assim podemos notar que, para qualquer aresta rs cujos extremos satisfazem $r \in W$ e $s \in \bar{W}$, ocorre ou $z_{rs} \in W^*$ e $z'_{rs} \in \bar{W}^*$, ou $z'_{rs} \in W^*$ e $z_{rs} \in \bar{W}^*$. Logo, G possui um conjunto P_3 -biconvexo, se e somente se, G^* possui um conjunto P_3^* -biconvexo. Portanto, o problema permanece NP-completo. ■

Corolário 3.11. *O problema P_3^* PC com p fixo é NP-completo para grafos bipartidos.*

Novamente, esse resultado para o problema P_3^* PC se relaciona ao problema MC, pois também o problema MC foi demonstrado NP-completo para grafos planares bipartidos [24], ou grafos bipartidos com grau máximo 4 [26].

4. CONCLUSÃO

Embora os problemas que estudamos se enlaçam pelo fato de que os conjuntos da convexidade P_3 estão contidos na convexidade P_3^* definida sobre o mesmo grafo, e que elas se equivalem quando o grafo não possui triângulos, verificamos diversos outros aspectos interessantes registrados neste trabalho. Identificamos os menores subgrafos que não admitem um conjunto P_3 -biconvexo e P_3^* -biconvexo, mostramos uma construção sistemática de uma lista infinita de grafos que não admitem conjuntos P_3 -biconvexo nem P_3^* -biconvexos, e analisamos os casos de separação para caminhos, árvores, ciclos e cliques.

Ademais, trouxemos alguns resultados computacionais de NP-completude para partição convexa em ambas as convexidades, mesmo para grafos bipartidos.

E assim, notamos que os resultados para as convexidades permanecem NP-completos mesmo para grafos planares com grau máximo 4 (exceto P_3^* PC), planares bipartidos, bipartidos com grau máximo 4 e grafos com diâmetro máximo d fixo ($d \geq 4$).

Em trabalhos futuros, pretendemos analisar os aspectos teórico-computacional do problema da p -partição convexas na convexidade P_3 e na convexidade P_3^* sobre classes particulares de grafos, tais como cordais, cografos, grafos P_4 -tidy, grafos de distância-hereditária etc. Além disso, pretendemos nos aprofundar mais sobre o tema de separação convexa em classes de grafos maiores do que foram apresentadas neste trabalho.

Reconhecimento. Os autores são gratos a FAPERJ (Ed. Sediadas/2018), CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BERGER, M. Convexity. *Amer. Math. Monthly*, v. 97, n. 8, p. 650 – 678, 1990. 2
- [2] VAN DE VEL, M. L. J. *Theory of Convex Structures*. 1st edition. ed. Amsterdam: North Holland, 1993. 2, 11
- [3] MOSCARINI, M.; MALVESTUTO, F. M. Two classes of graphs in which some problems related to convexity are efficiently solvable. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, v. 10, n. 03, p. 1850042, 2018. 2
- [4] MATHEW, J. K.; MATHEW, S. Monophonic convexity in weighted graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, v. 10, n. 01, p. 1850010, 2018. 2
- [5] MARCILON, T.; SAMPAIO, R. The maximum infection time of the p3 convexity in graphs with bounded maximum degree. *Discrete Applied Mathematics*, v. 251, p. 245 – 257, 2018. 2
- [6] MORDESON, J. N.; MATHEW, S. Distances and convexity in fuzzy graphs. In: _____. *Advanced Topics in Fuzzy Graph Theory*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 93–126. 2
- [7] COELHO, E. M. et al. On the p3-hull number of some products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 253, p. 2 – 13, 2019. 14th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2016). 2
- [8] HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. *J. Differential Geom*, v. 16, n. 2, p. 185–190, 1981. 3
- [9] FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, v. 7, n. 3, p. 433–444, 1986. 3
- [10] DUCHET, P. Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 44, n. 3, p. 307 – 316, 1988. 3
- [11] CHANGAT, M.; MATHEW, J. On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 206, p. 91 – 95, 1999. 3
- [12] CÁCERES, J.; MÁRQUEZ, A.; PUERTAS, M. L. Steiner distance and convexity in graphs. *European Journal of Combinatorics*, v. 29, n. 3, p. 726 – 736, 2008. 3
- [13] PELAYO, I. M. *Geodesic Convexity in Graphs*. 1st edition. ed. New York: Springer, 2013. 3
- [14] PENSO, L. D. et al. Complexity analysis of p3-convexity problems on bounded-degree and planar graphs. *Theoretical Computer Science*, v. 607, p. 83 – 95, 2015. 3

- [15] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 32, p. 11 – 18, 2009. DIMAP Workshop on Algorithmic Graph Theory. 3
- [16] ARAÚJO, R. T.; SAMPAIO, R. M.; SZWARCFITER, J. L. The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 44, p. 109 – 114, 2013. 3
- [17] GIMBEL, J. Some remarks on the convexity number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, v. 19, n. 3, p. 357–361, 2003. 3
- [18] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, n. 12, p. 1268 – 1274, 2010. 3
- [19] ARTIGAS, D. et al. Partitioning a graph into convex sets. *Discrete Mathematics*, v. 311, n. 17, p. 1968 – 1977, 2011. 3
- [20] CENTENO, C. C. et al. Convex partitions of graphs induced by paths of order three. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, v. 12, n. 5, p. 175–184, 2010. 3, 12
- [21] BONDY, A.; MURTY, M. R. *Graph theory*. 1st edition. ed. London: Springer, 2008. 5
- [22] CHVÁTAL, V. Recognizing decomposable graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 8, n. 1, p. 51–53, 1984. 12
- [23] PATRIGNANI, M.; PIZZONIA, M. The complexity of the matching-cut problem. In: BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B. (Ed.). *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001. p. 284–295. 12
- [24] BONSMÁ, P. The complexity of the matching-cut problem for various graph classes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 13, p. 18 – 21, 2003. 12, 14
- [25] HOANG-OANH LE; BANG LE, V. On the Complexity of Matching Cut in Graphs of Fixed Diameter. In: HONG, S.-H. (Ed.). *27th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2016)*. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 64), p. 50:1–50:12. 12
- [26] BANG LE, V.; RANDEARTH, B. On stable cutsets in line graphs. *Theoretical Computer Science*, v. 301, n. 1, p. 463 – 475, 2003. 14