



18 a 21 de novembro de 2014, Caldas Novas - Goiás

Como Emparelhar as Arestas dos Polígonos Hiperbólicos para a Maximização de Resultados na Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes

Alessandro Ferreira Alves, alemengo2003@yahoo.com.br¹

Alexandre Oliveira Lopes, alexandre.lopes@unis.edu.br¹

Gustavo Pereira Tavares, gustavo.tavares@hotmail.com¹

Diogo Guilherme Pereira, diogo.feec@gmail.com²

¹UNIS-MG, GEAD Varginha-MG

²UNICAMP, FEEC Campinas-SP

Resumo. Na projeção de um sistema de comunicação digital descrito em um espaço hiperbólico é muito importante o estabelecimento de um sistema construtivo de reticulados, como elemento chave para a determinação de constelações geometricamente uniformes associadas. Especificamente falando, por exemplo, em codificação de canal é de fundamental relevância a caracterização do aparato algébrico e geométrico associadas a canais discretos sem memória. Sendo assim, neste trabalho apresentamos a caracterização geométrica de superfícies a partir dos possíveis emparelhamentos das arestas do polígono fundamental hiperbólico de 3 a 8 lados, relacionados à superfície em questão, sendo que esse tratamento geométrico apresenta propriedades importantes na determinação dos reticulados hiperbólicos a serem utilizados no processo de construção de constelações de sinais, a partir de grupos fuchsianos aritméticos e da superfície de Riemann associada.

Palavras-chave: Emparelhamentos. Codificação de Canal. Constelação de sinais. Polígonos Hiperbólicos. Superfícies de Riemann.

1. INTRODUÇÃO

A busca por constelações de sinais que apresentem a menor probabilidade de erro, está diretamente relacionada ao problema de projetar sistemas de comunicações digitais eficientes em faixa e potência. Desta maneira se torna importante a fundamentação matemática dos códigos geometricamente uniformes através da utilização de estruturas topológicas como mostrado em B. Silva; M. Firer; S.R. Costa and R. Palazzo Jr. (2006), J.D. de Lima; R. Palazzo Jr. (2002) e R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. (2005). Este aparato diferenciado de códigos e modulações através do estudo de espaços topológicos relacionados, bem como, das superfícies de Riemann envolvidas, permite um melhor entendimento do processo de geração de constelações de sinais. Em H. Lazari; R. Palazzo Jr. (2005) foi proposto pela primeira vez um sistema de comunicação hiperbólico considerando as tesselações auto-duais $\{p, p\}$, um importante subconjunto das tesselações $\{p, q\}$ com $p \neq q$, onde $\{p, q\}$ denota um polígono regular de p arestas, de tal forma que em cada vértice, q desses polígonos regulares se encontram tendo em comum somente as arestas.

Em E.D. Carvalho (2001), forneceu-se técnicas para a geração de alfabetos de códigos corretores de erros dotados de uma estrutura algébrica, a partir das constelações de sinais geometricamente uniformes, cujos sinais sejam rotulados por elementos de um p -grupo G_{p^m} e por elementos de um grupo de Galois $GF(p^m)$ em espaços de sinais euclidianos identificados por elementos de um anel de inteiros e em espaços de sinais no plano hiperbólico identificados por elementos de uma ordem de quatérnios. Em Rodrigo Gusmão Cavalcante (2008), foi realizada a análise de desempenho de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas, onde mostra-se que quanto maior for o gênero da superfície menor será o valor da probabilidade de erro associada. Por outro lado, em João de Deus Lima (2002) caracterizou-se as estruturas algébricas e geométricas associadas a canais discretos sem memória (DMC), determinando o conjunto das superfícies no qual o grafo correspondente ao DMC está mergulhado.

Dentro desse contexto e com o objetivo de propor um método de rotulagem de sinais de constelações hiperbólicas convenientes, é necessário o estabelecimento de um procedimento sistemático de construção de reticulados. Para tal procedimento é relevante a identificação dessas informações geométricas via emparelhamento das arestas de polígonos hiperbólicos regulares de modo a construir códigos geometricamente uniformes e, por consequência, garantir a eficiência desejada em diversas situações envolvendo projetos de sistemas de comunicações digitais. Associado a este tratamento, analisamos os possíveis emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos de $3 \leq n \leq 8$ lados com o objetivo de determinação de reticulados hiperbólicos a serem usados na construção de constelações de sinais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2, considera alguns conceitos preliminares e resultados relacionados à geometria hiperbólica e constelação de sinais, o grupo modular homogêneo e não-homogêneo, além da identificação da região de Voronoi para o mesmo. Estas informações são importantes para o entendimento da conexão entre as tesselações hiperbólicas e os correspondentes grupos fuchsianos aritméticos. Na Seção 3, apresentamos os subgrupos de congruência principal e discutimos os principais resultados envolvendo estes subgrupos especiais. Na Seções 4 e 5, apresentamos e caracterizamos as superfícies de Riemann resultantes da interpretação das propriedades a partir dos emparelhamentos dos lados dos polígonos hiperbólicos com até 8 lados.

2. REVISÃO DE CONCEITOS

Nesta seção apresentamos alguns conceitos preliminares e resultados relacionados à geometria hiperbólica e constelações de sinais, bem como ao grupo modular homogêneo e não-homogêneo, além da identificação da região de Voronoi.

Definição 2.1. A. Garcia; I. Leguain (2002) *Seja G um grupo de permutações de um conjunto $E \neq \emptyset$. Dado $x \in E$, o conjunto $G(x) = \{T(x) : T \in G\}$ é chamado **G-órbita de x** . E o subgrupo de G , $G_x = \{T \in G : T(x) = x\}$ é chamado **estabilizador de x** .*

Definição 2.2. S. Katok (1991) *Uma **figura geométrica** S é um subconjunto de pontos em um espaço métrico E . Duas figuras geométricas S_1 e S_2 de um espaço métrico E são **geometricamente congruentes** se existe uma isometria $T : E \leftarrow E$ tal que $T(S_1) = S_2$. Nesse caso, dizemos que S_1 e S_2 **têm a mesma forma**. Além disso, uma isometria T que deixa uma figura geométrica S invariante, ou seja, $T(S) = S$, é chamada uma **simetria de S** . O conjunto das simetrias de S , $\mathcal{U}(S)$, é um grupo sob a operação de composição, sendo que $\mathcal{U}(S)$ é chamado **grupo de simetrias de S** .*

Em superfícies de gênero ≥ 2 , a geometria a ser considerada é a **geometria hiperbólica**. A partir de agora, vamos considerar dois modelos para a geometria hiperbólica plana, que são $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, conhecido como **plano de Lobachevski** e $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, munido da métrica Riemanniana $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ conhecido como **disco de Poincaré**.

Definição 2.3. S. Katok (1991) *As transformações identificadas em $PSL(2, \mathbb{Z})$ são classificadas em três tipos, quanto ao valor do módulo do traço da matriz associada. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $ad - bc = 1$. Desta forma, T é chamada: **transformação elíptica**, se $\text{Tr}(T) = |a+d| < 2$; **transformação parabólica**, se $\text{Tr}(T) = |a+d| = 2$; **transformação hiperbólica**, se $\text{Tr}(T) = |a+d| > 2$.*

Proposição 2.1. S. Katok (1991) *As transformações de Möbius são isometrias, isto é, um subgrupo do grupo de isometrias do semi-plano superior $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.*

Definição 2.4. S. Katok (1991) *Uma **tesselação regular** do plano hiperbólico é uma partição consistindo de polígonos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em arestas ou vértices, de modo a ter o mesmo número de polígonos compartilhando um mesmo vértice, independente do vértice. Portanto, existem infinitas tesselações regulares em \mathbb{H}^2 .*

Considere P um polígono e \mathcal{A} o conjunto de arestas de P . Um emparelhamento de arestas é definido da seguinte forma.

Definição 2.5. S. Katok (1991) *Um **emparelhamento de arestas de P** é um conjunto $\phi = \{T_\tau \mid \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$; 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$; 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.*

Definição 2.6. S. Katok (1991) *Um conjunto de sinais \mathcal{K} é uma **constelação de sinais geometricamente uniforme** se para quaisquer dois pontos $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, existe uma isometria $T \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$ tal que $T(k_1) = k_2$. Neste caso, dizemos que a ação de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ em \mathcal{K} é transitiva.*

Em sistemas de comunicações digitais, as figuras geométricas de interesse são conjuntos S de pontos discretos de \mathbb{R}^n , ou seja, dado $s \in S$, existe $r > 0$ tal que $B_r(s) \cap S = \{s\}$, onde $B_r(s)$ denota uma bola aberta em \mathbb{R}^n de centro s e raio r . Nesse caso, o conjunto S é denominado **conjunto de sinais**. Geralmente, podemos considerar S como um conjunto de pontos discretos de um espaço métrico qualquer (E, d) , desde que se tenha uma identificação dos pontos de E por sinais.

Definição 2.7. S. Katok (1991) Chamamos de **região de Voronoi** associada a um ponto $k \in K$ ao conjunto

$$R_v(k) = \{x \in E : d(x, k) \leq d(x, T(k)), \forall T \in \mathcal{U}(K)\}$$

Em outras palavras, $R_v(k)$ consiste de pontos que estão mais próximos de k do que qualquer outro ponto da órbita de $k, U(K)$.

Teorema 2.1. J. Anderson (1999) Se \mathcal{K} é uma constelação de sinais geometricamente uniforme então todas as regiões de Voronoi são da mesma forma.

Definição 2.8. J. Lehner (1996) O **grupo modular** é o grupo de transformações fracionárias lineares

$$L : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Como consequência temos: $\Gamma' = SL(2, \mathbb{Z}) \equiv$ **grupo modular homogêneo** e $\Gamma \cong \Gamma' / \{\pm I\} \equiv$ **grupo modular não homogêneo**. Salientamos, de acordo com o critério de classificação das transformações lineares, que uma transformação elíptica de Γ ocorre quando $a + d = 0$ ou $a + d = \pm 1$.

Teorema 2.2. S. Katok (1991) Um domínio fundamental para Γ é $D = \{z \in \mathbb{H}^2 : |Re z| < 1/2 \text{ e } |z| > 1\}$.

Sendo assim, verificamos que os únicos pares de pontos da fronteira de D , os quais são equivalentes sobre Γ , são os pares de pontos da fronteira de D que coincidem com uma reflexão sobre a reta $x = 0$, como mostrado na Fig. 1. Ressaltamos ainda que estes pontos são identificados pelas transformações $T : z \mapsto z + 1$ e $S : z \mapsto -\frac{1}{z}$, que no sentido geométrico correspondem a translação e inversão no plano, respectivamente. Além disso, temos que as transformações S e T geram o grupo modular não-homogêneo Γ , isto é, $\Gamma = \langle S, T \rangle$.

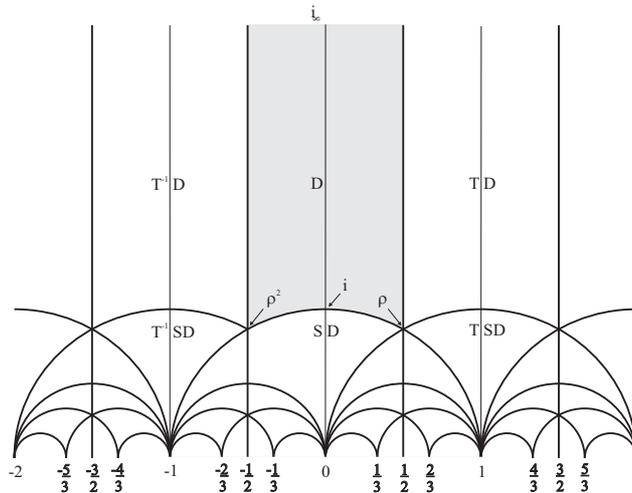


Figura 1. Domínio fundamental para Γ .

As superfícies hiperbólicas \mathbb{H}^2/Γ obtidas como espaços de identificação de polígonos são aquelas para os quais Γ é finitamente gerado. Como Γ é gerado por transformações de emparelhamento de lados e um polígono P' tem apenas uma quantidade finita de lados, então Γ é finitamente gerado se P' é uma região fundamental para Γ . Desta forma, uma superfície hiperbólica compacta \mathbb{H}^2/Γ é o espaço de identificação de um polígono se o polígono é uma região fundamental para Γ . Quando superfícies geometricamente orientáveis são construídas de forma normal, qualquer superfície de gênero 0 torna-se uma esfera (elíptica), qualquer superfície de gênero 1 torna-se um toro (Euclidiano) e superfícies de gênero ≥ 2 torna-se um g-toro (hiperbólica). Reciprocamente, toda superfície hiperbólica compacta orientável é de gênero ≥ 2 , ou equivalentemente, sua característica de Euler é um número par negativo. Desta maneira, quando mudamos o tipo de tesselação mudamos também as transformações de emparelhamentos de lados, e consequentemente o número dessas transformações e o número de ciclos de vértices.

3. SUBGRUPOS DE CONGRUÊNCIA PRINCIPAL

Considere o grupo quociente \mathbb{H}^2/Γ , onde a topologia é tal que o mapeamento $\tau : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ é contínuo. Logo, se considerarmos a compactificação segue que o grupo quociente \mathbb{H}^2/Γ é simplesmente \bar{D} com identificações próprias ao longo da fronteira.

Teorema 3.1. J. Lehner (1996) *Ao espaço quociente \mathbb{H}^2/Γ , quando compactificado acrescentando o ponto i_∞ , pode ser dado uma estrutura analítica natural resultando em uma superfície compacta de Riemann de gênero zero.*

Definição 3.1. *Sejam \mathbb{Z} o grupo dos inteiros e \mathbb{Z}_q os inteiros módulo q . O homomorfismo natural $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_q$ induz um homomorfismo*

$$\tilde{\varphi} : SL(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow SL(2, \mathbb{Z}_q) \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix}$$

O núcleo desta aplicação é denominado **subgrupo de congruência principal de nível q** que denotaremos por Γ'_q . Note que Γ'_q é um subgrupo normal em Γ e $\Gamma/\Gamma'_q \cong SL(2, \mathbb{Z}_q)$ de acordo com o primeiro Teorema do isomorfismo.

Definição 3.2. *Um par de inteiros c, d é chamado **primitivo mod q** se $\text{mdc}(c, d, q) = 1$. Denotaremos o número de pares primitivos incongruentes mod q por $\lambda(q)$.*

Lema 3.1. J. Lehner (1996) *Uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}_q) \Leftrightarrow c, d$ é um par de inteiros primitivos mod q . Em outras palavras, as segundas linhas de $SL(2, \mathbb{Z}_q)$ são precisamente os pares primitivos mod q .*

Desta maneira, para um par de inteiros $c, d \text{ mod } q$, existem q pares de inteiros incongruentes $a, b \text{ mod } q$, tais que $ad - bc \equiv 1 \text{ (mod } q)$, equivalentemente, significa dizer que existem q elementos da forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em $SL(2, \mathbb{Z}_q)$. Além disso, como $\lambda(q)$ é uma função multiplicativa segue o seguinte resultado.

Teorema 3.2. J. Lehner (1996) *O índice $[\Gamma'_q : \Gamma']$, que denotaremos por $\nu'(q)$, é dado por*

$$\nu'(q) = q^3 \cdot \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

representando o número de classes de conjugação do espaço quociente $\Gamma'/\Gamma'_q \cong SL(2, \mathbb{Z}_q)$.

Tal resultado é importante para as justificativas dos passos desenvolvidos ao longo da análise geométrica dos emparelhamentos considerando, por exemplo, conjugação de lados e equivalência de vértices.

4. SUPERFÍCIES DE RIEMANN ASSOCIADAS A SUBGRUPOS DO GRUPO MODULAR

Nesta seção, consideramos G um subgrupo do grupo modular Γ de índice finito μ , isto é, $[\Gamma : G] = \mu < \infty$. Sendo assim, caracterizamos um domínio fundamental para o subgrupo G , bem como analisamos o grupo quociente \mathbb{H}^2/G , sendo o mesmo compactificado e identificado sobre uma superfície de Riemann. Com isso, determinamos o gênero da mesma através da característica de Euler.

Teorema 4.1. J. Lehner (1996) *Seja G um subgrupo de índice finito μ em Γ e sejam T_1, T_2, \dots, T_μ representantes de classes laterais. Desta forma, $\Gamma = GT_1 \cup GT_2 \cup \dots \cup GT_\mu$. Se D é um domínio fundamental para Γ , então $D_G = T_1D \cup T_2D \cup \dots \cup T_\mu D$ é um domínio fundamental para o subgrupo G .*

Agora, para o espaço quociente \mathbb{H}^2/G pode ser dado uma estrutura analítica, como fizemos com o grupo quociente \mathbb{H}^2/Γ na seção anterior. Além do mais, para a compactificação poderão existir vértices reais parabólicos, assim como vértices parabólicos infinitos, porém todos são tratados como anteriormente. Existe uma triangularização natural de \mathbb{H}^2/Γ (Fig.1), na qual os pontos fixos são os vértices de cada aresta emparelhados aos pares. Esta triangulação natural de \mathbb{H}^2/Γ induz uma triangulação sobre \mathbb{H}^2/G . Além disso, \mathbb{H}^2/G é uma superfície de Riemann compacta. Para calcularmos seu gênero, utilizamos a característica de Euler, $\chi = 2 - 2g = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$, onde: g denota o gênero da superfície, σ_0 denota o número de vértices, σ_1 denota o número de arestas, e σ_2 denota o número de faces. Note que alguns destes parâmetros podem ser facilmente visualizados, como por exemplo, o número de faces (σ_2) que, no caso em consideração de variedades bidimensionais, tem valor 1. Com relação às arestas (σ_1), para n ímpar dividimos um dos lados em dois e passa-se a considerar $(n + 1)$ lados. Para a determinação de (σ_0), necessitamos via os possíveis emparelhamentos das arestas do polígono em questão caracterizar as classes de conjugação dos vértices (pontos fixos ou não) e assim efetuar uma contagem simples. Tais procedimentos ficam justificados através dos resultados apresentados anteriormente.

5. CARACTERIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE RIEMANN DECORRENTES DOS EMPARELHAMENTOS

Nesta seção, apresentamos as principais conclusões sobre os possíveis emparelhamentos (conjugação de lados) de um polígono regular, com $3 \leq n \leq 8$, bem como, a partir da característica de Euler identificamos a superfície de Riemann associada. Chamamos a atenção ao fato de que os resultados apresentados na seção anterior, são fundamentais para a determinação dos parâmetros σ_0, σ_1 e σ_2 , e que as transformações que aparecem nas conjugações das arestas podem ser parabólicas, elípticas, ou hiperbólicas. Além disso, temos, em alguns casos, diversas possibilidades de emparelhamentos.

Devido à limitação de espaço, apresentamos um caso onde a superfície em questão é o bitoro, para o toro e a esfera o procedimento é análogo. Os demais casos seguem raciocínio similar e a superfície associada é uma das citadas anteriormente. Ressaltamos ainda que a diminuição do gênero de uma superfície está relacionada com a inclusão de transformações elípticas e/ou parabólicas. Para o polígono contendo $n = 8$ lados, temos cento e cinco possíveis emparelhamentos. A seguir consideramos um desses casos.

Exemplo 1:

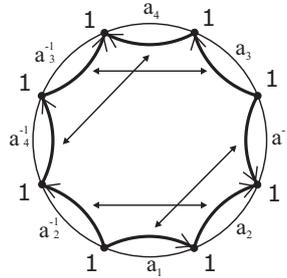


Figura 2. Emparelhamento de arestas e conjugação de lados para $n = 8$.

$$\chi = 2 - 2g = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 = 1 - \frac{8}{2} + 1 \rightarrow g = 2$$

Como resultado dos possíveis emparelhamentos, apresentamos na Tabela 1 algumas propriedades importantes.

Arestas	Pontos Fixos	Conjugação	Gênero	Superfície	Emparelhamentos
3	2	3	0	Esfera	1
4	0	1	1	Toro	1
4	2	3	0	Esfera	1
5	2 ou 3	4	0	Esfera	2
5	1	2	1	Toro	1
6	0 ou 1	2	1	Toro	10
6	2 ou 3	4	0	Esfera	5
7	1 ou 2	3	1	Toro	10
7	2,3 ou 4	5	0	Esfera	5
8	2,3 ou 4	5	0	Esfera	15
8	0,1 ou 2	3	1	Toro	69
8	0	1	2	Bitoro	21

Tabela 1. Propriedades associadas aos emparelhamentos.

- Para $n = 3$, temos um único possível emparelhamento, com um ponto fixo e três classes de conjugação, sendo assim, a superfície associada é uma esfera;
- Para $n = 4$, temos dois possíveis emparelhamentos, sendo que um deles não possui pontos fixos e tem uma classe de conjugação, logo a superfície associada é um toro; já o outro, possui dois pontos fixos e três classes de conjugação, logo, uma esfera;
- Para $n = 5$, temos três possíveis casos de emparelhamentos, sendo que as superfícies associadas são esfera (emparelhamento com 2 ou 3 pontos fixos e 4 classes de conjugação) e o toro (emparelhamento com 1 ponto fixo e 2 classes de conjugação);
- Para $n = 6$, temos quinze possíveis emparelhamentos; aqui, as superfícies resultantes são dadas pela esfera (com 2 ou 3 pontos fixos e 4 classes de conjugação) e o toro (com 0 ou 1 ponto fixo e 2 classes de conjugação);
- Para $n = 7$, temos também quinze possíveis emparelhamentos, sendo as superfícies associadas dadas pela esfera (2, 3 ou 4 pontos fixos e 5 classes de conjugação) e o toro (1 ou 2 pontos fixos e 3 classes de conjugação);
- Para $n = 8$, temos cento e cinco emparelhamentos, sendo que neste caso aparecem a esfera (2, 3 ou 4 pontos fixos e 5 classes de conjugação), o toro (0, 1 ou 2 pontos fixos e 3 classes de conjugação) e o bitoro (com 0 pontos fixos e 1 classe de conjugação).

Como exemplo, consideramos o polígono regular com $n = 8$ lados, como mostra a Fig. 2. Como todas as transformações são hiperbólicas, resulta em zero pontos fixos, uma classe de conjugação e gênero igual a 2. Como resultado temos um bitoro. Percorrendo as arestas do polígono, mostrado na Fig. 2, em um ciclo fechado, resulta na seguinte sequência: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_1^{-1} \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_3^{-1} \cdot a_4^{-1} \cdot a_2^{-1} = e$. Note que esta sequência resulta em quatro geradores para o subgrupo Fuchsiano associado. A partir da análise relacionada aos possíveis emparelhamentos das arestas dos polígonos hiperbólicos de $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 arestas, foi caracterizado e tabulado algumas informações geométricas (gênero da superfície, número

de pontos fixos, número de classes de conjugação) que podem ser utilizadas para o estabelecimento de um processo sistemático de construção de códigos geometricamente uniformes, bem como garantir a eficiência desejada em problemas de se projetar sistemas de comunicações eficientes em faixa e potência. Além disso, a classificação dos emparelhamentos descrita no trabalho nos permite verificar a possibilidade de construção de constelações de sinais geometricamente uniformes a partir dos emparelhamentos que possuam grupos fuchsianos aritméticos. Ou ainda, nos permite a identificação dos emparelhamentos que podem ser utilizados na proposta de construção de constelações de sinais através da caracterização do gênero da superfície associada ao mergulho do grafo correspondente ao canal binário simétrico e suas quantizações.

REFERÊNCIAS

- A. Garcia; I. Leguain 2002. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA.
- B. Silva; M. Firer; S.R. Costa and R. Palazzo Jr. 2006. Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems. *Journal of the Franklin Institute*, 343, 69–82.
- E.D. Carvalho 2001. Construção e Rotulamento de Constelação de Sinais Geometricamente Uniformes em Espaços Euclidianos e Hiperbólicos. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP.
- H. Lazari; R. Palazzo Jr. 2005. Geometrically uniform hyperbolic codes. *Computational and Applied Mathematics*.
- J. Anderson 1999. *Hiperbolic Geometry*. Springer-Verlag. New York.
- J. Lehner 1996. *A Short Course in Automorphic Functions*. University of Maryland, New York.
- J.D. de Lima; R. Palazzo Jr. 2002. Embedding Discrete Memoryless Channels on Compact and Minimal Surfaces. *IEEE Information Theory Workshop*, (pp. 183–186).
- João de Deus Lima 2002. Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos e de Canais Discretos sem Memória. Tese de doutorado, UNICAMP-FEEC-DT.
- R.G. Cavalcante; H. Lazari; J.D. Lima; R. Palazzo Jr. 2005. A new approach to the design of digital communication systems. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science - DIMACS Series*, 68, 145–177.
- Rodrigo Gusmão Cavalcante 2008. Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações. Tese de doutorado, UNICAMP-FEEC.
- S. Katok 1991. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, Chicago.

6. SOBRE RESPONSABILIDADE AUTORAL E O USO DE IDIOMA PORTUGUÊS OU ESPANHOL

Os trabalhos escritos em português ou espanhol devem incluir (após direitos autorais) título, os nomes dos autores e afiliações, o resumo e as palavras chave, traduzidos para o inglês e a declaração a seguir, devidamente adaptada para o número de autores.

RESPONSABILIDADE AUTORAL

“O(s) autor(es) é(são) o(s) único(s) responsável(is) pelo conteúdo deste trabalho”.

How to Pair the edges of polygons hyperbolic for Maximizing Results in Signal Constellations Construction of Geometrically Uniform

Alessandro Ferreira Alves, alemengo2003@yahoo.com.br¹

Alexandre Oliveira Lopes, alexandre.lopes@unis.edu.br¹

Gustavo Pereira Tavares, gustavo.tavares@hotmail.com¹

Diogo Guilherme Pereira, diogo.feec@gmail.com²

²UNIS-MG, GEAD Varginha-MG

³UNICAMP, FEEC Campinas-SP

Abstract. The projection of a digital communication system described in a hyperbolic space is very important to establish a constructive system of lattices as a key element for the determination of geometrically uniform constellations associated. Specifically speaking, for example, channel coding is of fundamental importance to characterize the algebraic and geometric apparatus associated with discrete channels without memory. Therefore, in this work we present a geometric characterization of surfaces from possible pairings of the edges of the hyperbolic fundamental polygon 3 and 8 sides, related to the surface in question, and this treatment has important geometric properties in the determination of the hyperbolic lattices to be used the construction process of signal constellations, from fuchsianos arithmetic groups and the associated Riemann surface.

Keywords: pairings. Channel coding. Sign constellation. Polygons hyperbolic. Riemann surfaces.