

UM ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO DAS ALTERAÇÕES DE FREQUÊNCIAS ESTRUTURA-CAVIDADE ACÚSTICA DEVIDO AOS EFEITOS DE UMA CONSTRIÇÃO

N.B. Mendes¹, S.M. Souza², L.J. Pedroso³

¹Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental (neanderberto@hotmail.com)

²Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental (sorayamendes@hotmail.com)

³Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília-DF, Brazil, Zip Code:70919-970, PO Box 04492 (lineu@unb.br)

Abstract. *This paper presents an analytical-numerical study of the acoustic behavior of cavities made up of rigid and flexible walls, with particular emphasis being laid on the acoustic problem of ducts. Topics in this paper include inertial effects due to sudden change of section in the singular zone. These results are compared with analytical expressions specially built for this, showing an excellent agreement between them.*

Keywords: fluid-structure, finite element, vibration modes, acoustic cavities, inertial effects.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo analítico-numérico sobre o comportamento acústico de cavidades compostas de paredes rígidas ou rígidas - móveis, com ênfase aos problemas de acústica de dutos. De forma particular, este texto aborda a mudança de seção de tubos, incluindo-se a conexão entre duas cavidades, analisando as frequências naturais do sistema, bem como o comportamento do campo de pressão decorrente da variação das seções dos tubos.

Expressões analíticas baseadas no Método da Matriz de Transferência (MMM) Pedroso (1985, 1998) e Gibert (1988), foram especialmente elaboradas para a representação teórica desse modelo.

Para modelagem numérica utiliza-se formulação U-P, por meio de uma discretização com base no método dos elementos finitos, proposta por Zienkiewicz & Newton (1969), onde a pressão (p) é a variável para o fluido, enquanto que os deslocamentos (u) descrevem o comportamento do sólido.

Diversos problemas acoplados são solucionados através das principais técnicas numéricas, entre elas: MEF, MDF e MEC. O método dos elementos finitos (MEF) tem se mostrado, como uma poderosa ferramenta de análise para esta categoria de problemas, como pode ser verificado em pesquisas anteriores: Barbosa (1998), Barbosa, Souza & Pedroso (2006), Souza (2007). No MEF, a estrutura analisada para o problema de acoplamento pode incluir desde sólidos, vigas, placas e elementos mais complexos, como as cascas. Neste texto serão utilizados elementos finitos 2D de estado plano de tensão para as paredes móveis da estrutura.

Com efeito, este trabalho consiste em comparar os resultados analíticos e numéricos de problemas de interação fluido - estrutura (analogia de pistões rígidos - móveis), considerando o sólido como elemento estado plano de tensão. Os resultados numéricos são obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), por meio do código ANSYS. Os modelos estudados consistem na junção de dois tubos, variando-se a seção do segundo tubo em relação ao primeiro, com intuito de avaliar o efeito das frequências e comportamento do campo de pressão. Na constrição dos tubos, verificou - se os efeitos inerciais desta zona singular.

As frequências e modos de vibração obtidos por meio do programa ANSYS (1995), baseiam - se na formulação U-P. Outros autores utilizaram procedimentos similares em seus trabalhos: Daniel (1980,1980) e Müller (1981), Sandberg (1995), Sandberg, Hansson, Gustavsson (2001). A principal vantagem dessa formulação Euleriana é que apresenta um menor número de graus de liberdade para descrever o movimento do fluido quando comparada com a formulação Lagrangeana, Zienkiewicz & Bettess (1978).

Finalmente, entre as diversas e mais usuais formulações já apresentadas na literatura, a saber: as formulações Lagrangeanas, Eulianas, Eulerianas-Lagrangeanas, as Quase-Eulianas, que fundamentalmente diferem entre si apenas na forma adotada na discretização nodal do problema, nós adotamos nesse trabalho, uma das formulações Eulianas para o fluido (tendo a pressão como variável nodal) e os deslocamentos (u) como variável para a estrutura.

Apesar de reconhecermos nesta formulação os problemas numéricos associados a sistemas (matrizes) não simétricos, a mesma foi adotada para nos beneficiarmos dos resultados fornecidos pelo Programa ANSYS (1995) - versão 5.2 - onde esta formulação é utilizada.

As frequências e os modos de vibração apresentaram uma boa correlação quando se comparada com as soluções analíticas correspondentes. Além disso, o MEF mostrou resultados bem correlacionados para a frequência de massa adicional (1º modo acoplado), em relação aos resultados analíticos elaborados para os modelos da conexão de tubos, assim como para os modos mais altos acoplados que foram analisados.

2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

O problema de interação fluido - estrutura em estudo está submetido a algumas considerações: o sólido apresenta comportamento elástico linear, constituído por material isotrópico, homogêneo, com módulo de elasticidade constante e submetido a pequenos deslocamentos, quando comparados com as dimensões da estrutura. Assume-se, ainda, que o fluido seja invíscido, compressível e que o processo seja adiabático.

Para a análise numérica do acoplamento pelo método dos elementos finitos, utili-

zou-se o programa de elementos finitos ANSYS, que é fundamentado na formulação acústica (U - P), sendo a pressão a variável no domínio do fluido e o deslocamento a incógnita da estrutura.

A equação de movimento da estrutura para o problema acoplado é dada pela equação (1), cujo vetor de forças $\{F\}$ pode ser decomposto em dois outros vetores: um vetor de forças genéricas $\{F^E\}$ e outro vetor de forças na interface, este corresponde às pressões do fluido na região de contato com o sólido $\{F^I\}$.

A equação de movimento do sólido é dada por:

$$[M_s]\{\ddot{U}\} + [C_s]\{\dot{U}\} + [K_s]\{U\} = \{F^E\} + \{F^I\} \quad (1)$$

Onde:

$$[K_s] = \int_{V_s} [Bu]^T [C_s] \cdot [Bu] \cdot dV_s \quad \text{Matriz de rigidez do sólido} \quad (2)$$

$$[M_s] = \int_{V_s} \rho [Nu]^T \cdot [Nu] \cdot dV_s \quad \text{Matriz de massa do sólido} \quad (3)$$

O vetor de forças na interface $\{F^I\}$ aplicado na região do acoplamento é obtido através da integração da pressão na superfície de interface fluido - estrutura, tem-se que:

$$\{F^I\} = \int_S \{N_u\} P \{n\} dS \quad (4)$$

Onde:

$\{N_u\}$ = funções de forma utilizadas para discretizar os componentes de deslocamentos u , v , w .

$\{n\}$ = vetor na direção normal

O campo de deslocamento do elemento sólido é dado pela equação (5):

$$U = \{N_u\}^T \{U_e\} \quad (5)$$

Para o elemento fluido, tem-se que a pressão num ponto do elemento pode ser expressa por:

$$P = \{N_p\}^T \{P_e\} \quad (6)$$

Onde:

O vetor $U_e = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_N \ v_N \ w_N]$ representa os deslocamentos nodais, onde u_i , v_i e w_i corresponde aos deslocamentos do nó i , nas direções x , y e z , respectivamente. Enquanto que $P_e = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_N]$ representa as pressões e esta associada às variáveis nodais do fluido.

Substituindo a equação (6) na equação da força na região da interface (4), obtém-

se:

$$\{F^I\} = \int_S \{N_p\} \{N_u^T\} \{n\} dS \{P_e\} \quad (7)$$

Tem-se que $\int_S \{N_p\} \{N_u^T\} \{n\} dS$ representa a matriz fluido - estrutura $\{FS\}$ para o

sistema acoplado, como mostrado em Sousa Jr (2006) e ANSYS, então:

$$\{F_e^I\} = [FS] \{P_e\} \quad (8)$$

Substituindo a equação (8) na equação (1), resulta na equação de movimento da estrutura para o problema acoplado:

$$[M_s] \{\ddot{U}\} + [C_s] \{\dot{U}\} + [K_s] \{U\} - [FS] \{P_e\} = \{F^s\} \quad (9)$$

Aplica-se o método de Galerkin na equação da onda e utiliza-se a discretização por elementos finitos, obtém-se a equação dinâmica para cavidade acústica do problema acoplado, conforme Sousa Jr (2006).

$$[M_f] \{\ddot{P}\} + [C_f] \{\dot{P}\} + [K_f] \{P\} + \rho [FS] \{\ddot{U}\} = \{0\} \quad (10)$$

Onde:

$$[K_f] = \int_{\Omega_f} [Bp]^T \cdot [Bp] \cdot d\Omega_f \quad \text{Matriz de rigidez do fluido} \quad (11)$$

$$[M_f] = \int_{\Omega_f} [Np]^T \cdot [Np] \cdot d\Omega_f \quad \text{Matriz de massa do fluido} \quad (12)$$

$$[C_f] = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_4} [Np]^T \cdot [Np] \cdot d\Gamma_4 \quad \text{Matriz de amortecimento do fluido} \quad (13)$$

$$[FS]^T = \oint_{\Gamma_1} [Nu]^T \cdot \vec{n} \cdot [Np] \cdot d\Gamma_1 \quad \text{Matriz de acoplamento fluido - estrutura} \quad (14)$$

As equações (9) e (10) descrevem o problema de interação fluido - estrutura, colocando na forma matricial, e reproduz similar formulação apresentada no programa ANSYS (1997), assim:

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ \rho[FS] & [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}\} \\ \{\ddot{P}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_s] & [0] \\ [0] & [C_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{\dot{P}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & -[FS] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F^E] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Ou ainda:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (16)$$

A equação (16) corresponde ao sistema completo para o problema de interação fluido - estrutura, e representa a forma clássica da equação de movimento em vibrações forçadas. Para a análise no domínio da frequência, desenvolvem-se as equações do sistema acoplado (15), considerando que as partículas do sistema acoplado executem um movimento harmônico em torno de sua posição de equilíbrio. Para simplificar o problema, pode-se eliminar a matriz [C] que envolve o amortecimento estrutural e do fluido (condição de radiação no infinito), como também se considera $F = 0$. Logo:

$$(K - \omega^2 M)X = 0 \quad (17)$$

A equação (17) apresenta na forma tradicional de valores próprios. A solução dessa equação fornece as frequências naturais de vibração do sistema acoplado e suas respectivas deformadas modais e será utilizada na análise do caso estudado neste trabalho.

3. RESULTADOS

O modelo estudado se caracteriza pela junção de duas cavidades (dois dutos), conforme mostrado na Figura 1 e na Figura 2. O caso em estudo apresenta tubos com comprimentos e seções diferentes, e tem como objetivo avaliar o efeito da variação de seção na conexão entre esses dois tubos. Um tubo maior de comprimento L , seção S e paredes rígidas conecta-se a outro menor, de comprimento l , seção s variável e paredes rígidas. A extremidade do tubo maior é acoplada a uma placa rígida apoiada por uma mola de constante K , e com deslocamento livre na direção longitudinal do tubo (modelo do pistão). A extremidade do tubo menor é aberta. Calculam-se as frequências próprias e os modos principais dessa cavidade acústica, variando-se a seção transversal do tubo menor para uma relação de seção $\sigma = s / S$ com os valores de $\sigma = 0,1; 0,3; 0,5$ e $1,0$.

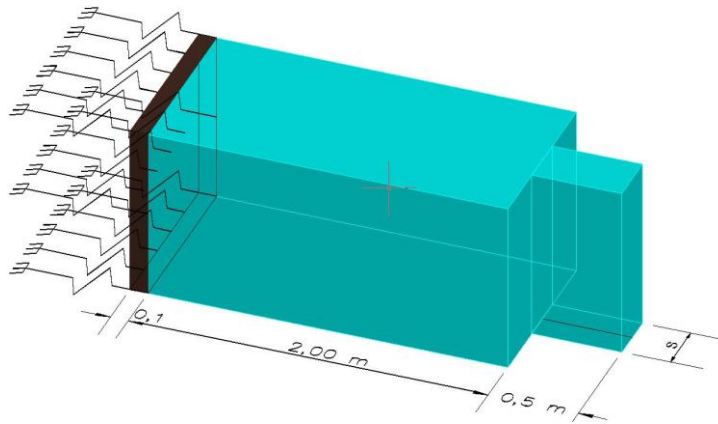


Figura 1. Esquema 3D do sistema estrutura-cavidade.

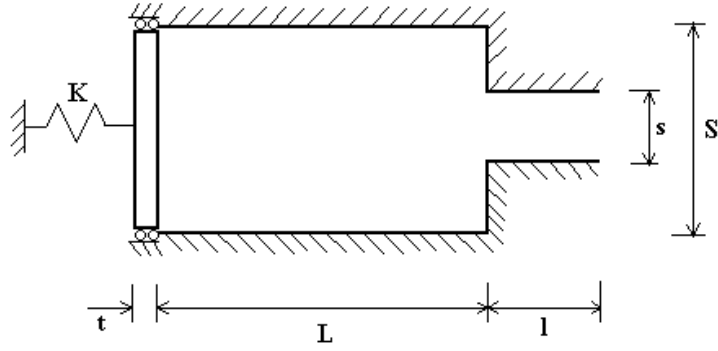


Figura 2. Corte esquemático 2D utilizado para o caso em estudo.

Dados do problema:

- $L = 2\text{m}$; $l = 0,5\text{m}$; $S = 1\text{m}$; $t = 0,1\text{m}$; $K = 100.000 \text{ N/m}^2$

- $E = 2,1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\nu = 0,3$; $\beta = 2,25 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\rho_s = 7.800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_f = 1.000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

3.1. Resultados Analíticos

Para obter as frequências naturais da cavidade desacoplada, utiliza-se o método da matriz de transferência (MMT) aplicando as condições de contorno adequadas, Pedroso (1998). As frequências a serem calculadas são aquelas na direção longitudinal, no eixo comum aos dois tubos (problema 1D).

3.1.1 Caso desacoplado

a) Estrutura:

A estrutura é representada por uma placa sobre base elástica. Nesse caso a estrutura apresenta uma deformada rígida móvel (pistão), e sua frequência desacoplada é dada pela expressão:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K_e}{m_e}} \quad (18)$$

onde K_e = rigidez da estrutura = K = rigidez da mola e m_e = massa da estrutura.

b) Cavidade Acústica:

A montagem das equações para a cavidade acústica desacoplada é obtida pela aplicação do método da matriz de transferência, Pedroso (1985,1998), Barbosa (1998), dada na forma apresentada pela expressão (19):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} - \frac{S}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} & \frac{c}{i} \left(\frac{1}{S} \cos \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} + \frac{1}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} \right) \\ -\frac{i}{c} \left(s \sin \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} + S \cos \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} \right) & -\frac{s}{S} \sin \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} + \cos \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Da primeira linha da equação pode-se concluir que:

$$\cos \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} - \frac{S}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (20)$$

Da equação transcendental (20) calculam-se as frequências próprias do sistema desacoplado e da expressão (19) devidamente adaptada com auxílio do MMT, obtêm-se as deformadas modais associadas às frequências naturais obtidas pela equação (20).

3.1.2 Caso acoplado

Chamando de M a matriz de transferência na equação (19) pode-se escrever o problema acoplado como:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ q_s \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} p_e \\ i\omega \rho_f SX \end{bmatrix} \quad (21)$$

Pode-se isolar o valor da pressão atuando sobre a estrutura rígida - móvel (pistão) a partir da primeira linha da equação (21):

$$p_e = \frac{-\omega \rho_f c SX \left(\frac{1}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} + \frac{1}{S} \cos \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} \right)}{-\frac{S}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} + \cos \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c}} \quad (22)$$

Montada a equação de equilíbrio do pistão, a equação para o cálculo das frequências acopladas é dada por:

$$m\omega^2 - K + \frac{\omega \rho_f c S^2 \left(\frac{1}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c} + \frac{1}{S} \cos \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} \right)}{-\frac{S}{s} \sin \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega L}{c} + \cos \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega L}{c}} = 0 \quad (23)$$

3.2. Resultados Numéricos

A Figura 3 apresenta as malhas utilizadas na discretização por elementos finitos. Adota-se a mesma malha para os casos desacoplados da cavidade e da estrutura. Para o sistema acoplado, deve-se considerar a região da interface, que faz a conexão entre os elementos do fluido e do sólido. Utilizou-se elementos triangulares lineares para o fluido (FLUID29) e elementos triangulares simples para a estrutura - elemento de estado plano - (PLANE42) da biblioteca do código ANSYS.

Para se poder correlacionar adequadamente os resultados numéricos com os analíticos, na sequência de modos e frequências numéricas, foram considerados somente os modos de onda plana (movimentos rígidos da placa - modos de pistão). Os modos deformacionais da estrutura e transversais de cavidade não foram mostrados no texto, por fugir do escopo desse trabalho.

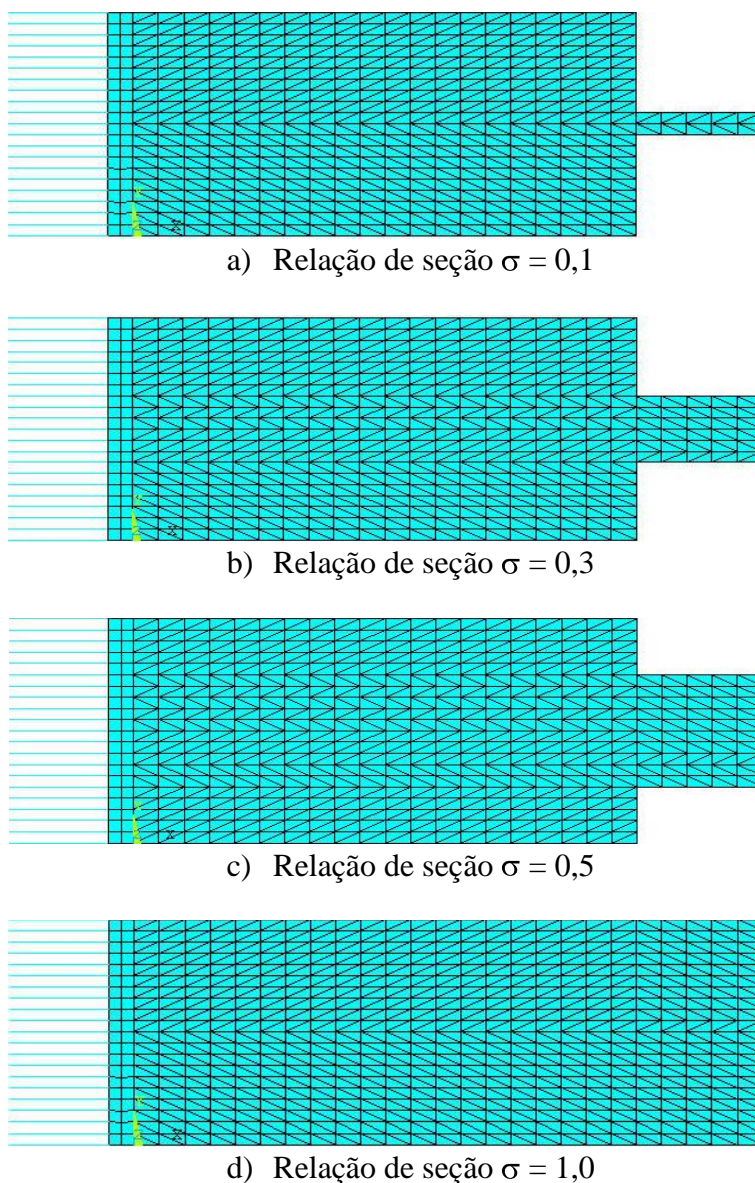


Figura 3. Malhas utilizadas nas discretizações das quatro relações de seção.

A Tabela 1 fornece as primeiras frequências analíticas e numéricas desacopladas correspondentes aos modos longitudinais da cavidade para os quatro modelos de junção de tubos com $\sigma = 0,1; 0,3; 0,5$ e $1,0$.

Tabela 1. Frequências desacopladas analíticas e numéricas

ω rad/s	σ (m)							
	0,1		0,3		0,5		1,0	
Modo	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.
1	11,04	11,32	11,04	11,32	11,04	11,32	11,04	11,32
2	426,42	443,50	654,14	684,22	779,55	802,17	942,60	942,48
3	2425,25	2427,50	2535,96	2549,52	2634,79	2648,61	2831,58	2827,43
4	4725,40	-	4731,68	4712,39	4731,68	4712,39	4731,74	4712,39
5	4731,74	4712,39	4752,04	-	4781,13	-	4813,80	-

A Tabela 2 fornece as primeiras frequências analíticas e numéricas acopladas correspondentes aos modos longitudinais da cavidade (modos de ondas planas) para os quatro modelos de junção de tubos.

Tabela 2. Frequências acopladas analíticas e numéricas

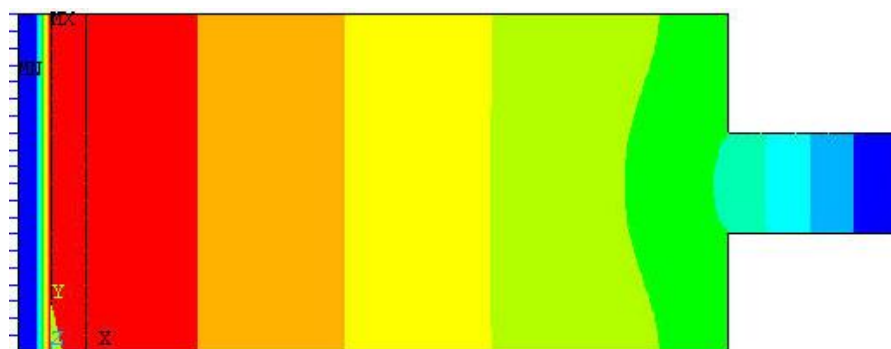
ω rad/s	σ (m)							
	0,1		0,3		0,5		1,0	
Modo	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.
1	3,48	3,59	4,62	4,74	5,07	5,14	5,52	5,52
2	1008,45	1019,35	1187,27	1214,04	1309,23	1331,71	1490,12	1489,55
3	2855,27	2854,25	2933,24	2939,64	3006,19	3013,13	3161,38	3155,81
4	4810,41	-	4852,63	-	4902,52	-	4955,74	-
5	5004,05	4981,93	4991,68	4969,93	4980,49	4958,97	4957,24	4935,32

As Figuras 4, 6 e 8 mostram os modos acústicos 2D correspondentes à primeira, à segunda e à terceira frequências acopladas para os quatro modelos de conexão dos tubos simulados, que se diferenciam pela variação da área do segundo tubo (s). As Figuras 5, 7 e 8 representam os cortes na direção longitudinal (x), no eixo do sistema, em termos de pressões adimensionais, correspondentes aos modos acoplados 2D, dados nas Figuras 4, 6 e 8.

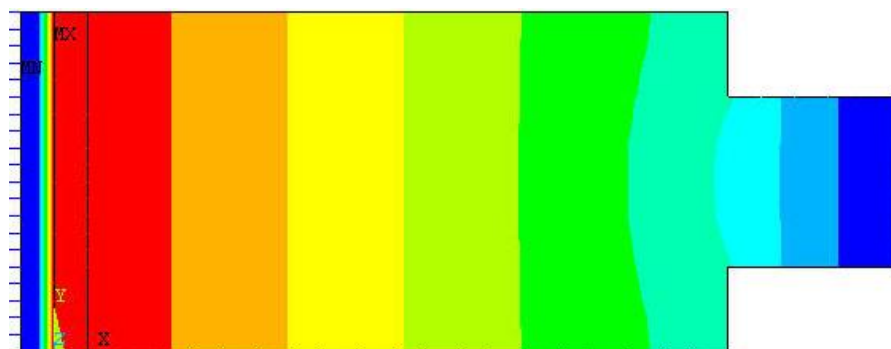
Nas tabelas 1 e 2, as células vazias identificadas por um traço nas colunas dos valores analíticos representam as frequências de modos transversais não capturados pelo modelo analítico 1D, ainda que se tenha construído soluções para tal, não utilizadas, em razão de orientarmos os resultados para os modos de ondas planas (associados a deslocamentos da estrutura como um placa rígida móvel - movimento de pistão).



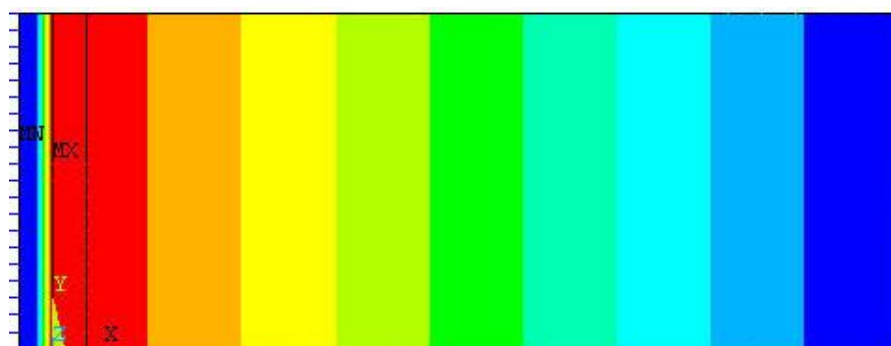
a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$

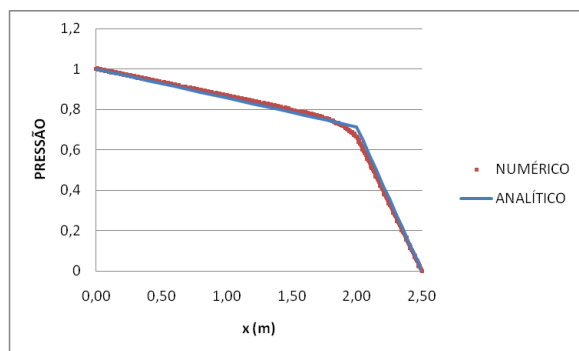


c) Relação de seção $\sigma = 0,5$

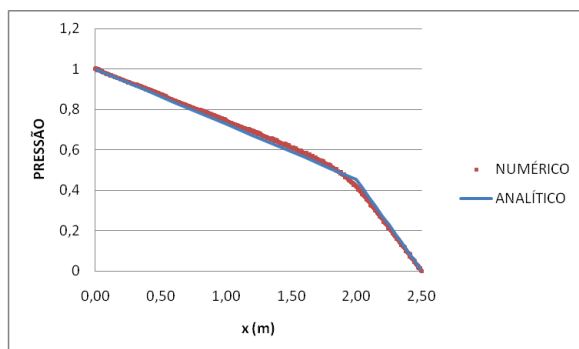


d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

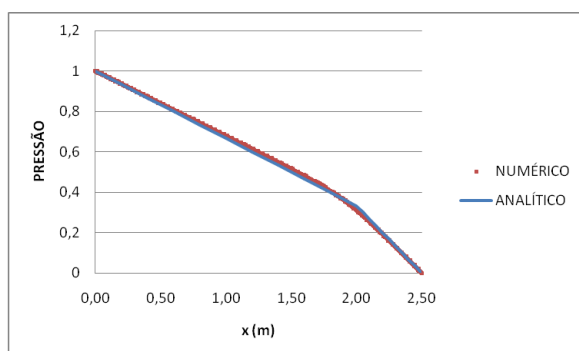
Figura 4. Primeiro modo acoplado - modo de massa adicional para as quatro relações de seção (σ).



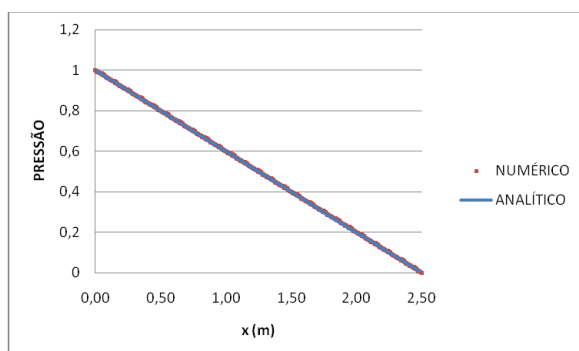
a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$

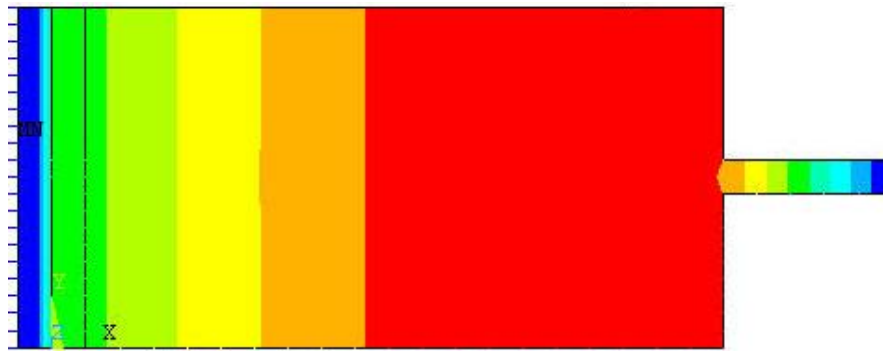


c) Relação de seção $\sigma = 0,5$

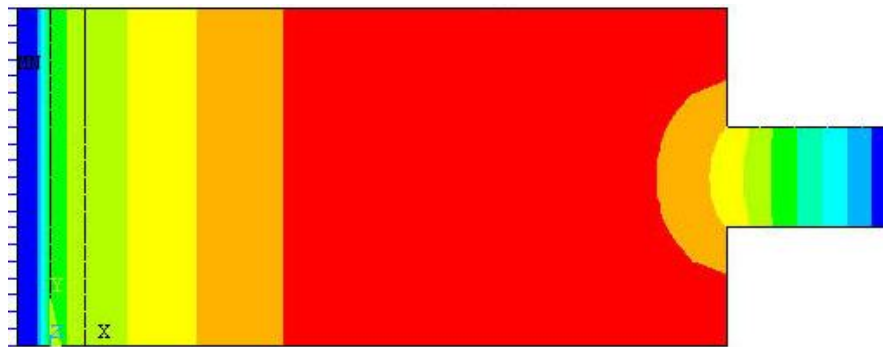


d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

Figura 5. Perfil longitudinal de pressões adimensionais $\bar{P}(x)$, do primeiro modo acoplado para as quatro relações de seção (σ).



a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$

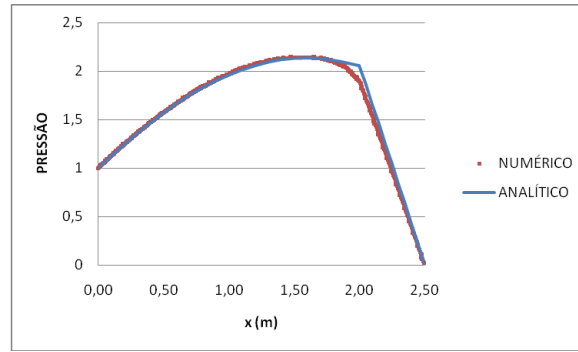


c) Relação de seção $\sigma = 0,5$

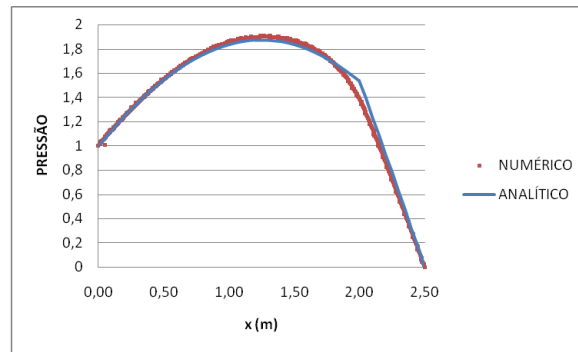


d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

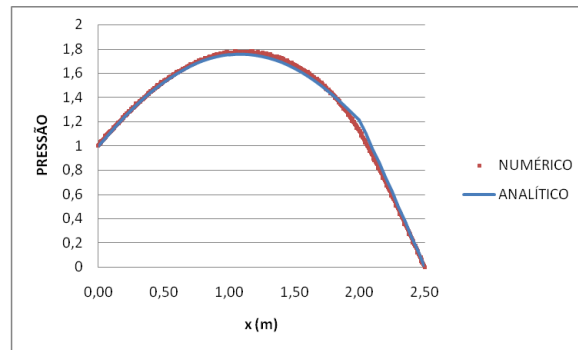
Figura 6. Segundo modo acoplado de onda plana - modo do ressonador de Helmholtz (cavidade maior compressível e duto menor incompressível) para as quatro relações de seção (σ).



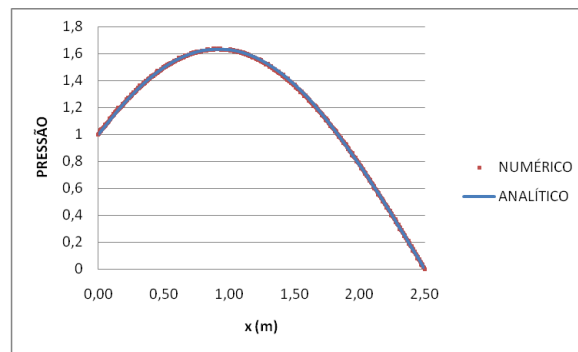
a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$

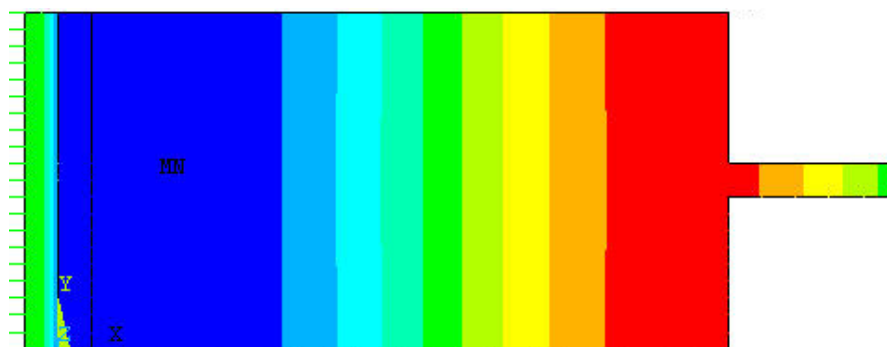


c) Relação de seção $\sigma = 0,5$

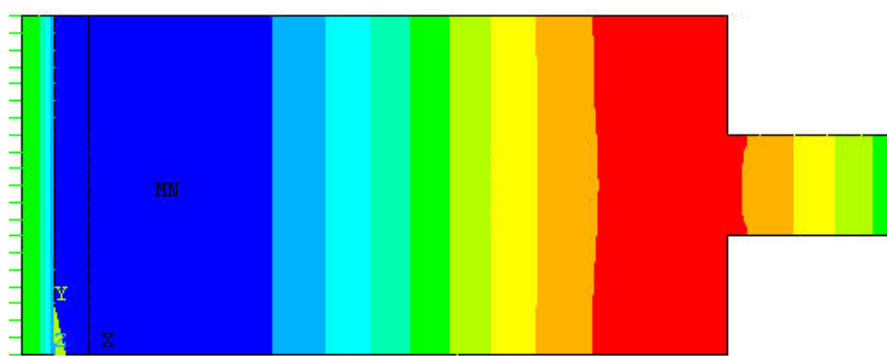


d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

Figura 7. Perfil longitudinal de pressões adimensionais $\bar{P}(x)$, do segundo modo acoplado de onda plana para as quatro relações de seção (σ).



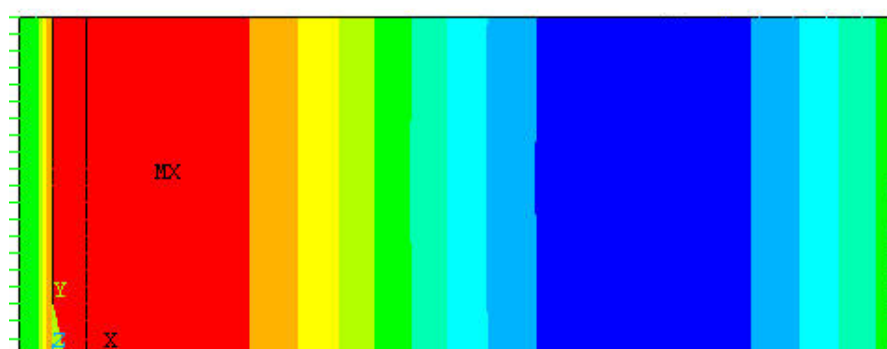
a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$

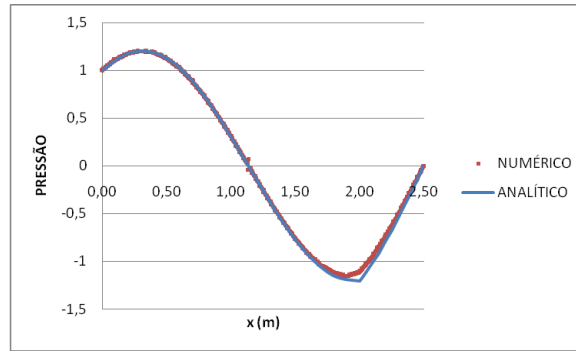


c) Relação de seção $\sigma = 0,5$

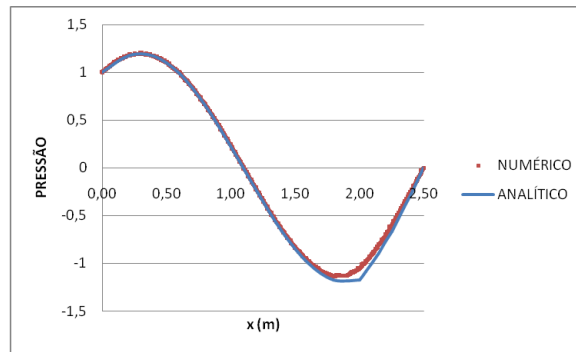


d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

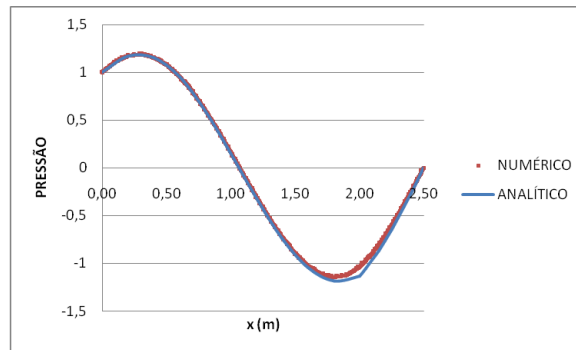
Figura 8. Terceiro modo numérico acoplado de onda plana - Modos compressíveis em ondas planas para as quatro relações de seção (σ).



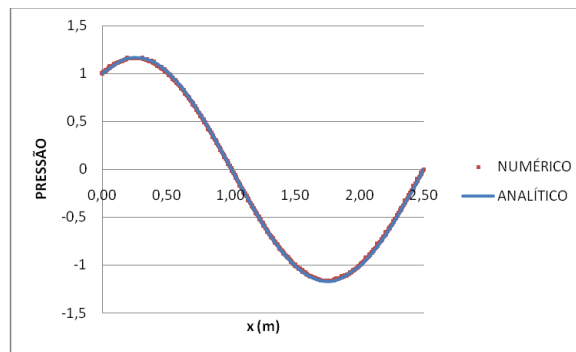
a) Relação de seção $\sigma = 0,1$



b) Relação de seção $\sigma = 0,3$



c) Relação de seção $\sigma = 0,5$



d) Relação de seção $\sigma = 1,0$

Figura 9. Perfil longitudinal de pressões adimensionais $\bar{P}(x)$, do terceiro modo acoplado de onda plana para as quatro relações de seção (σ).

A partir dos resultados apresentados em termos de frequências, deformadas modais (2D e perfil de pressões), algumas observações podem ser identificadas.

De forma geral o valor das frequências e deformadas modais no problema desacoplado e acoplado para os modos de ondas planas, apresentaram um bom acordo quando se compararam os resultados analíticos e numéricos, e as pequenas discrepâncias observadas podem ser facilmente explicadas, em parte aos efeitos bidimensionais capturados pelo modelo numérico 2D, não previsto na solução analítica (1D).

Os efeitos de ondas planas (raias retas) e as perturbações 2D na zona das constrições (raias distorcidas) podem ser observadas nas deformadas modais (2D) das Figuras 4, 6 e 8; em particular para os modos 1 e 2 acoplados, com relações de seção $\sigma < 1$.

Na Figura 5, analisando-se os perfis de pressão (cortes longitudinais da Figura 4) para o 1º modo acoplado (modo de massa adicional), percebe-se o perfil retilíneo das pressões, fato que caracteriza a incompressibilidade do fluido ($\partial^2 P / \partial x^2 = 0$). Nota-se duas inclinações de retas, que caracterizam a inércia das colunas de fluido. A inércia da coluna de fluido a partir de $\sigma = 1$, diminui nos trechos de montante à constrição, para as outras relações de seção (σ). Todavia, na região de jusante à constrição (duto menor) vemos que a inclinação das pressões aumenta à medida que σ diminui. Este efeito se caracteriza por um aumento da inclinação na coluna menor de fluido, aspecto originado pelo acréscimo dos efeitos inerciais, gerados pela constrição. Um estudo mais detalhado a respeito será elaborado na próxima seção.

A Figura 7 mostra cortes longitudinais da Figura 6, e representa o perfil de pressões associado ao 2º modo acoplado do sistema. Este modo se caracteriza por um modo de ressonância de Helmholtz, onde a cavidade maior é compressível ($\omega L/c \geq 1$), enquanto que a cavidade menor se comporta como uma massa (coluna incompressível, $\omega l/c \ll 1$), reproduzindo os efeitos inerciais no tubo menor, como comentado no modo anterior (Figuras 7 a, b e c).

Já na Figura 7 d, para $\sigma = 1$, a cavidade total tem a mesma seção, e um comprimento maior, fato que provoca o efeito de compressibilidade em todo o sistema ($\omega (L+l) / c > 1$).

A Figura 9 mostra cortes longitudinais da Figura 8, para um modo mais alto (3º modo de onda plana) onde as duas cavidades são compressíveis. Nela podemos observar o caráter ondulatório dos perfis de pressão, que caracteriza o efeito de compressibilidade nos dois dutos, sendo que no duto menor, há apenas um trecho curvo contínuo, sem oscilações. Todavia, na cavidade maior pode-se notar trechos de meias-ondas, associados ao número modal, das deformadas de pressão (no duto maior), onde ocorre a dita oscilação.

As deformadas modais, e os perfis de pressão para $\sigma = 1$, servem como padrão de referência esperado ao longo do sistema; todavia, o trecho final (duto 2) será mais ou menos reto ou curvo, em função do parâmetro de compressibilidade ($\omega l/c$) nesse trecho.

4. EFEITO DA SINGULARIDADE

Nos resultados acoplados dos modelos de conexão de tubos, verificou-se que as frequências de massa adicional para as diferentes relações de seções dos tubos (σ), são menores do que aquelas consideradas no cálculo das frequências reais, para as massas das cavidades acústicas (cavidade maior + cavidade menor). Como o perfil de pressão é constante (fluido

incompressível) este fato se caracteriza por uma massa adicional de valor superior a massa real de fluido contida nas cavidades. Isso pode ser atribuído aos efeitos inerciais oriundos da mudança brusca de seção ao nível das conexões entre os dutos, tal com já foi anteriormente mostrado na literatura por Pedroso *et al.* (1987, 1988, 1993, 1997) e Gibert (1988). Ou seja, há uma massa adicional no sistema, maior do que a massa real de fluido presente nas duas cavidades.

Como não há a adição de massa ao sistema, essa parcela da massa adicional é oriunda dos efeitos inerciais associados à aceleração do fluxo na zona da estricção. Como se conhece a massa real do fluido no sistema, pode - se avaliar esta parcela da massa adicional, associada aos efeitos inerciais da região da conexão, chamando de massa equivalente aos efeitos da singularidade (m_{eq}), que pode ser calculada a partir da redução das frequências pela expressão:

$$\omega^1 = \sqrt{\frac{K_e}{m_e + m_{cav.acustica} + m_{eq}}} \quad (24)$$

Onde:

$m_{cav.acustica}$ = massa total real de fluido nos dutos 1 e 2;

$$m_{cav.acustica} = m_{cav.acustica}^{Tubo-1} + m_{cav.acustica}^{Tubo-2} \quad (25)$$

m_{eq} = massa equivalente aos efeitos inerciais associados à singularidade (constricção) e

$\omega^1 = 1^a$ frequência acoplada para o modo de massa adicional.

Pela equação (24) é possível se calcular m_{eq} , e em consequência um comprimento equivalente (L_{eq}) associado a essa massa, que teria a mesma seção (S) do tubo de referência, existente quando $\sigma = 1$.

A Tabela 3 mostra as primeiras frequências analíticas acopladas (ω^1), considerando as várias relações de seções de tubos ($\sigma = s / S$), e estas em relação à 1ª frequência acoplada do duto de referência ($L = 2,5$ m), na 3ª coluna.

Tabela 3. Frequências acopladas analíticas

σ	ω^1 (rad/s)	$\omega^1/\omega_{\text{REF}}$
0,1	3,585	0,649
0,2	4,352	0,788
0,3	4,742	0,859
0,4	4,981	0,902
0,5	5,143	0,932
0,6	5,261	0,953
0,7	5,350	0,969
0,8	5,419	0,981
0,9	5,475	0,992
1,0	5,522	1,000

A Figura 10 ilustra graficamente as primeiras frequências acopladas de massa adicional (ω^1) em relação à frequência de referência (ω_{REF}). O eixo horizontal (σ) indica a relação entre as áreas dos tubos ($\sigma = s / S$). Quando $\sigma = 0,1$ m, a frequência de massa adicional apresenta aproximadamente 0,6 vez o valor da frequência de massa adicional do duto de referência. À medida que aumenta essa relação das áreas (s / S), ω^1 se aproxima do valor de ω_{REF} , de forma assintótica.

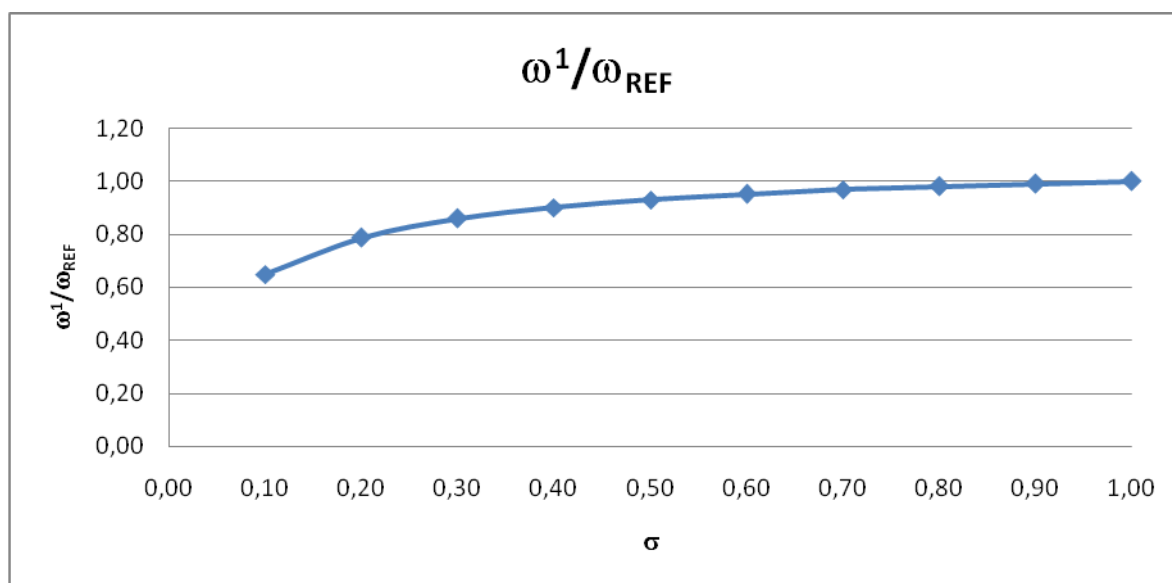


Figura 10. Primeira frequência acoplada do modo de massa adicional em relação à frequência do tubo de referência (nesse modo) em função de σ .

A Tabela 4 mostra as massas totais do sistema acoplado (m) relacionadas às primeiras frequências analíticas de massa adicional (ω^1), 2ª coluna, bem como a massa adicional total de fluido, a massa real da cavidade acústica correspondente ao tubo 1 e tubo 2 (equação 25) e as massas equivalentes aos efeitos inerciais da singularidade (m_{eq}), 5ª coluna.

Tabela 4. Massas totais acopladas e parcelas de massas que compõem a massa adicional de fluido

ω^1 (rad/s)	m (kg)	$m_{\text{adicional}}$ (kg)	$m_{\text{cav. acústica}}$ (kg)	m_{eq} (kg)
3,59	7780	7000	2050	4950
4,35	5280	4500	2100	2400
4,74	4447	3667	2150	1517
4,98	4030	3250	2200	1050
5,14	3780	3000	2250	750
5,26	3613	2833	2300	533
5,35	3494	2714	2350	364
5,42	3405	2625	2400	225
5,48	3336	2556	2450	106
5,52	3280	2500	2500	0

A Figura 11 mostra a relação entre as massas equivalentes aos efeitos inerciais da constrição (m_{eq}) em relação à massa de fluido do duto de referência (m_{REF}). Essa última consiste na massa real de fluido quando o tubo 2 apresenta $\sigma = 1$. O eixo horizontal (σ) indica a relação das áreas dos tubos (s / S).

Observa-se que quanto menor for a relação entre as áreas dos tubos (σ), maior será a massa equivalente. Quando $\sigma = 0,1$ m, a massa equivalente será 0,7 vez o valor da massa de referência.

Este gráfico é obtido a partir do cálculo analítico das frequências acopladas, fornecidas pela expressão (23). Para a frequência de massa adicional, considera - se a incompressibilidade do fluido contido nos dois dutos, aspecto traduzido pelos parâmetros de incompressibilidade associados a esses dois dutos: $\omega L / c \ll 1$ e $\omega l / c \ll 1$. Fazendo ainda $\alpha = \omega^2 L l / c \ll 1$ e levando estas expressões na equação (23), chega - se às expressões (26) e (27). Comparando as Equações (27) e (28), tem - se a expressão da massa equivalente aos efeitos inerciais da singularidade (m_{eq}), dada pela equação (30).

$$\omega^2 \left[m_e + \frac{\left(m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-1}} + m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-2}} \frac{1}{\sigma^2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\underbrace{\sigma}_{\approx 0}} \alpha \right)} \right] - K_s = 0 \quad (26)$$

$$\omega^2 \left[m_e + \left(m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-1}} + m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-2}} \frac{1}{\sigma^2} \right) \right] - K_s = 0 \quad (27)$$

$$\omega^2 [m_e + (m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-1}} + m_{\text{cav.acustica}}^{\text{Tubo-2}} + m_{\text{eq}})] - K_s = 0 \quad (28)$$

$$m_{cav.acustica}^{Tubo-2} \frac{1}{\sigma^2} = m_{cav.acustica}^{Tubo-2} + m_{eq}$$

$$m_{eq} = \left(\frac{1}{\sigma^2} - 1 \right) m_{cav.acustica}^{Tubo-2} \quad (29)$$

$$m_{eq} = \left(\frac{1}{\frac{s^2}{S^2}} - 1 \right) \rho_{fluido} l s$$

$$m_{eq} = \rho_{fluido} l \left(S^2 \frac{1}{s} - s \right) \quad (30)$$

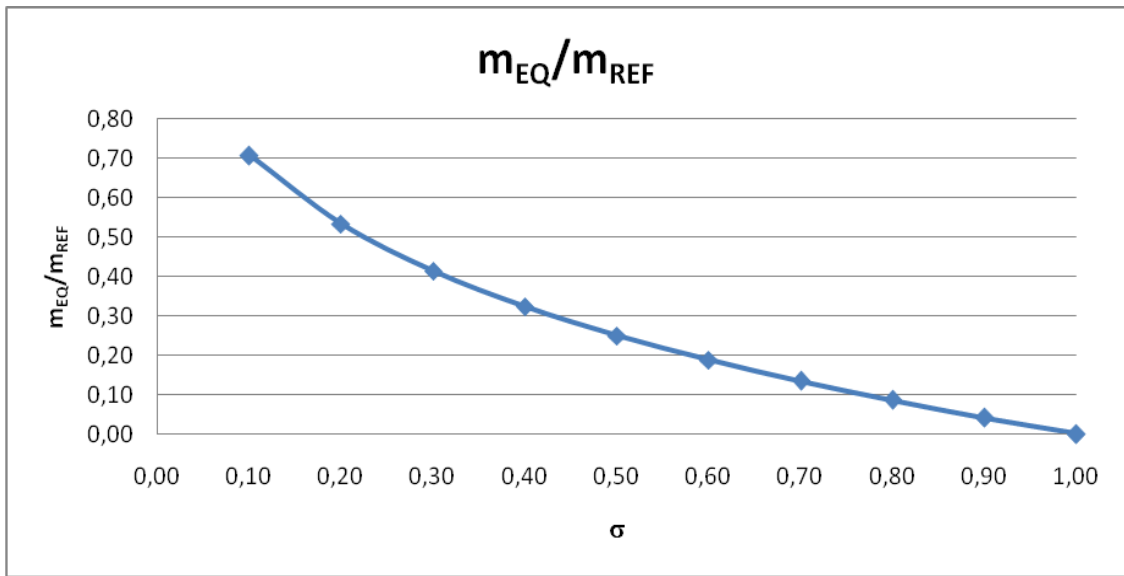


Figura 11. Massa equivalente versus σ .

A Figura 12 apresenta o quociente entre o comprimento equivalente aos efeitos inerciais da singularidade (L_{eq}), em relação ao comprimento total do tubo de referência para $\sigma = 1$, onde L_{eq} é calculado pela expressão (31), e traduz o comprimento de um tubo fictício que teria a mesma seção do tubo de referência. O gráfico mostra que à medida que σ tende para 1, L_{eq} tende para 0, fato que indica a inexistência de efeitos inerciais quando o sistema não possui constrição.

$$L_{eq} = \frac{m_{eq}}{\rho.S} \quad (31)$$

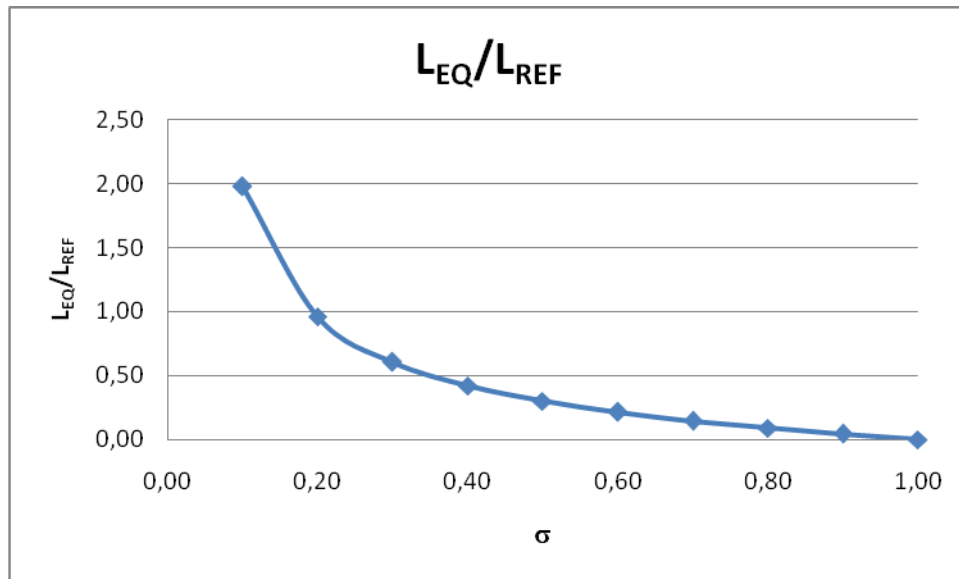


Figura 12. Comprimento equivalente versus σ .

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Em função dos resultados obtidos, algumas conclusões podem ser tiradas.

A formulação U - P do programa ANSYS apresenta uma alternativa interessante e confiável para o estudo de zonas singulares em cavidades acústicas 2D discretizadas por elementos finitos, já que reproduziu a contento as respostas previstas pela formulação teórica analítica baseada no método da matriz de transferência.

A formulação U - P pelo MEF via o programa ANSYS, e a formulação analítica apresentaram um excelente acordo em termos de frequências e deformadas modais acopladas, para os principais modos estudados, inclusive ambos reproduzindo os mesmos efeitos observados na zona singular.

Quanto aos fenômenos associados à presença da zona singular em termos de frequências, observa-se que para o modo de massa adicional (fluido incompressível) houve uma queda importante nas frequências naturais do sistema acoplado, em função do acréscimo de massa adicional, originado pelos efeitos inerciais na constrição.

Essa massa virtual (parcela da massa adicional) associada aos efeitos inerciais na zona singular, para a menor relação de seção chegou a 70% do valor da massa real do tubo de referência (duto total para $\sigma = 1$), fato que representa um aumento considerável de massa adicional incorporada à massa da estrutura, para justificar esta queda de frequência. Este fato também foi observado para as outras relações de seção na constrição, todavia com menor intensidade, à medida que σ aumentava.

Com efeito, essa massa virtual, traduz os efeitos inerciais associados ao campo de velocidades 3D (ou 2D) na zona singular, que nem sempre pode ser precisamente descrito pela malha de elementos finitos, tampouco representado pelo modelo analítico 1D, aspecto este que explica as pequenas discrepâncias observadas na zona da constrição.

Quanto às distorções das ondas planas (raias curvas na representação 2D) ao nível da constrição, estas se estendem por uma região da ordem de grandeza da altura da cavidade maior (diâmetro do duto maior), portanto um efeito bastante localizado.

Estudos complementares como uma modelização 3D na zona singular, com malhas mais refinadas estão em curso, para se caracterizar com maior precisão estes efeitos inerciais na região da constrição, assim como uma formulação analítica mais abrangente que possa descrever melhor estes fenômenos observados.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e CAPES pelos recursos materiais (equipamentos) e financeiros (bolsas) colocadas à disposição dessa pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- [1] ANSYS, 1995. Version 5.2. Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA, 1995.
- [2] Barbosa, A.N., 1998. Uma Formulação Potencial Simétrica para o Cálculo Estático e Dinâmico de Problemas de Interação Fluido-Estrutura. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/98, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília.
- [3] Barbosa, A.N., Souza, S.M., & Pedroso, L.J., 2006. Apresentação de casos envolvendo exemplos de acoplamento fluido-estrutura. XXXII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural; paper code: JOR0568; Prodeceeding CD-ROM, Campinas, Brasil.
- [4] Daniel, W.J.T., 1980. Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems. International Journal Methods in Engineering, vol. 15, 1161-1175.
- [5] Daniel, W.J.T., 1980. Performance of reduction methods for fluid-structure and acoustic eigenvalue problems. International Journal Methods in Engineering, vol.15, 1585-1594.
- [6] Gibert, R.J.-Vibrations Des Estruturas: Interactions avec les Fluides - Sources d'Excitation Aléatoires: CEA - EDF - INRIA :Eyrolles , Paris ,1988.
- [7] Müller, W.C., 1981. Simplified analysis of linear fluid-structure interaction. International Journal Methods in Engineering, vol.17,113-121.
- [8] Pedroso, L. J., 1985 - Effects des Interactions Fluide-Structure dans les Circuits Tubulaires des Reacteurs Nucleaires. Rapport Interne- Laboratoire de Vibrations et Séismes. DEMA/SMTS. Commissariat à L'Énergie Atomique (C.E.A.) - Centre D'Études Nucléaires de Saclay, France.
- [9] Pedroso,L.J. and Gibert, R.-J. - "Experimental study of the pressure drop of perforated plates in instead ducted flow"-9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT), Lausanne, Aug.17-21, 1987.
- [10] Pedroso,L.J. and Gibert,R.J. - Experimental Investigation of the pressure loss through perforated structures in unsteady flow.Jor.of Struc. Mechanics, V.T.T., Finland, vol 21, 1988 ,n° 1, pp. 42-54.
- [11] Pedroso,L.J.; Carvalho M.A. & De Macêdo A.P.- "Analytical Approach on Pressure Drop Sources and Wave Reflection in a Nuclear Reactor Due to Transients".-Transactions of the 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology - (12th SMIRT) - Aug.15-20/1993; University of Stuttgart - RFA;

Vol.A/Supplem.,E11/3,115-120.

- [12] Pedroso,L.J.; Morais, M.V.G.; Kossobudzki, S.D.L. & Ferreira, J.R. - " Estudo dos Efeitos Inerciais Provocados por um Orifício num Escoamento Variável ". - XVIII Congresso Íber o Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia-(XVIII CILAMCE)- Oct.29-31,1997; Brasília, Brasil; Vol.II pp.989-996.
- [13] Pedroso, L.J., 1998. Interação Fluido-Estrutura. Notas de Curso e Apostila Didática (Vs.1- 1998; Vs.2-2000; Vs.3-2003); UnB-FT/ENC, Brasília, DF.
- [14] Sandberg, G., 1995. A new strategy for solving fluid-structure problems. International Journal Methods in Engineering, vol.38, 357-370.
- [15] Sandberg, G., Hansson, P., & Gustavsson, M., 2001. Domain decomposition in acoustic and structure-acoustic analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.190, 2979-2988.
- [16] Sousa Jr, L.C., 2006. Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 197p.
- [17] Souza, S.M., 2007. Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura para Cavidades Acústicas de Paredes Flexíveis. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-004A/07.
- [18] Zienkiewicz, O.C. e Bettess, P., 1978. Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. International Journal Methods in Engineering, vol.13,1-16.
- [19] Zienkiewicz, O.C., Newton, R.E., 1969. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.