

## UM MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES E EXTERIORES BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA COM ESTRATÉGIAS DE EXTRAPOLAÇÃO CÚBICA E CONVERGÊNCIA GLOBAL.

R. B. N. Pinheiro<sup>1</sup>, A. R. Balbo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Bauru – FEB/UNESP, Bauru-SP (ribenopi@hotmail.com).

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências – FC/UNESP, Bauru-SP.

**Resumo.** *Neste trabalho apresentamos um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada com estratégias de extrapolação cúbica e convergência global (MPIBLMCG-EX). Na definição do algoritmo proposto, a função barreira logarítmica modificada existe e auxilia o método em sua inicialização com pontos inviáveis que pertencem à região de inviabilidade relaxada (ampliada). Porém, a inviabilidade pode ocorrer em pontos que não estão próximos à fronteira relaxada ou não pertençam a esta região, consequentemente, implicando na não existência da função barreira logarítmica modificada. Para suprir essa dificuldade uma extrapolação cúbica, que preserva as diferenciais de primeira e segunda ordem nas proximidades da fronteira, é aplicada ao método; no procedimento previsor, são realizadas atualizações do parâmetro de barreira nos resíduos das restrições de complementaridade, considerando aproximações de 1ª. ordem do sistema de direções de busca, enquanto que no procedimento corretor, incluímos os termos quadráticos não-lineares dos resíduos citados, que foram desprezados no procedimento previsor. Consideramos também a estratégia de convergência global para o método, a qual utiliza uma variante do método de Levenberg-Marquardt para atualizar a matriz dual normal da função lagrangiana caso esta não seja definida positiva. Neste caso, esta matriz é redefinida para restrições primais, de igualdade, desigualdade e variáveis canalizadas, incorporando variáveis duais e matrizes diagonais relativas às restrições de complementaridade. Uma implementação deste método, realizada em Matlab 6.1, mostrou-se eficiente quando aplicada em problemas de FPO, da área de Sistema Elétrico de Potência (SEP) em Engenharia Elétrica, cuja função objetivo e o conjunto de restrições são funções não-lineares e não-convexas. Neste trabalho apresentamos os resultados da aplicação do método em destaque para o sistema elétrico IEEE-118.*

**Palavras-chave:** *Método de ponto interior, extrapolação cúbica, convergência global.*

# 1 O MÉTODO PREVISOR-CORRETOR PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA (MPIBLM).

Para a definição do método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada (MPIBLM), consideramos o seguinte modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade, de desigualdades canalizadas e de variáveis canalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{l}_1 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{l}_2 \end{array} \right. ; \quad (1.1)$$

em que:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  são funções de classe  $C_2$  e a condição de qualificação de restrições é a aquela proposta por (Mangasarian, et al., 1976). O problema (1.1) é transformado em problema de otimização não-linear irrestrito e equivalente, de acordo com [1] a qual utiliza a função barreira modificada apresentada por [2], a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } L(\omega) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r (\delta_1)_i \ln(z_1^\diamond)_i - \mu \sum_{i=1}^r (\delta_2)_i \ln(z_2^\diamond)_i - \\ - \mu \sum_{j=1}^n (\delta_3)_j \ln(z_3^\diamond)_j - \mu \sum_{j=1}^n (\delta_4)_j \ln(z_4^\diamond)_j + \sum_{t=1}^m (\lambda_0)_t g_t(\mathbf{x}) + \\ + \sum_{i=1}^r \left[ (\lambda_1)_i (-h_i(\mathbf{x}) + (u_1)_i + (z_1)_i) + (\lambda_2)_i (h_i(\mathbf{x}) - (u_2)_i + (z_2)_i) \right] + \\ + \sum_{j=1}^n \left[ (\lambda_3)_j (-x_j + (l_1)_j + (z_3)_j) + (\lambda_4)_j (x_j - (l_2)_j + (z_4)_j) \right] \end{array} \right. ; \quad (1.2)$$

onde:  $\mu \in \mathbb{R}_*^+$  é o parâmetro de barreira;  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^r$  e  $\delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}_+^n$  são vetores estimadores dos multiplicadores de Lagrange;  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_*^m$  é o vetor de multiplicador de Lagrange referente às restrições de igualdade;  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^r$  são os vetores de multiplicadores de Lagrange referente às restrições funcionais canalizadas;  $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}_+^n$  são os vetores de multiplicadores de lagrange referente às variáveis canalizadas;  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^r$  e  $\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \in \mathbb{R}^n$  são variáveis de folga;  $(z_1^\diamond)_i = \left(1 + \frac{z_1}{\mu}\right)_i$ ,  $(z_2^\diamond)_i = \left(1 + \frac{z_2}{\mu}\right)_i$ ,  $(z_3^\diamond)_j = \left(1 + \frac{z_3}{\mu}\right)_j$  e  $(z_4^\diamond)_j = \left(1 + \frac{z_4}{\mu}\right)_j$  são as variáveis primais definidas pela relaxação das restrições de desigualdade de (1.1) em relação às variáveis de folga  $\mathbf{z}_1 > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}_2 > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}_3 > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{z}_4 > \mathbf{0}$  tais que:  $\mathbf{z}_1 > -\mu$ ,  $\mathbf{z}_2 > -\mu$ ,  $\mathbf{z}_3 > -\mu$  e  $\mathbf{z}_4 > -\mu$  ;

$\omega = (\mathbf{x}, \mathbf{z}_i, \lambda_0, \lambda_i)^T \in \mathbb{R}_*^{m+5n+4r}$  é o vetor de variáveis da função lagrangiana aumentada interior  $L(\omega)$ . As condições de KKT são recuperadas ao aplicarmos a condição necessária de otimalidade  $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$ . Essas condições são apresentadas a seguir:

$$\nabla L(\omega) = \begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_3 + \lambda_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_0} L = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_1} L = -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_2} L = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_3} L = -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_4} L = \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_1} L = \bar{Z}_1 \lambda_1 - \mu \delta_1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_2} L = \bar{Z}_2 \lambda_2 - \mu \delta_2 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_3} L = \bar{Z}_3 \lambda_3 - \mu \delta_3 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_4} L = \bar{Z}_4 \lambda_4 - \mu \delta_4 = \mathbf{0} \end{cases}; \quad (1.3)$$

onde:  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times n}$  são, respectivamente, as matrizes jacobianas dos funcionais  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  e  $\bar{Z}_i^{-1} = \text{diag}\left((\mu + z_i)^{-1}\right), i = 1, \dots, 4$ . Em cada equação do sistema não-linear  $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$  linearizaremos por um aproximante de Taylor de primeira ordem. Assim, temos o sistema linear a seguir:

$$A_k \mathbf{d}_{\omega}^k = \mathbf{b}^k \quad (1.4)$$

onde:

$$A_k = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T & -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & -I_n & I_n \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{1_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{2_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{2_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{3_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{3_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{4_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{4_k} \end{pmatrix}; \quad (1.5)$$

em que:  $K = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{t=1}^m \left[ (\lambda_0^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k) \right] + \sum_{i=1}^r \left[ (\lambda_2^k - \lambda_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k) \right]$ ;  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ ;  $I_r$  é a matriz identidade de ordem  $r$  e  $\Lambda_{i_k} = \text{diag}(\lambda_i^k)$ ;  $\mathbf{d}_\omega^k = (\mathbf{d}_x^k, \mathbf{d}_{z_i}^k, \mathbf{d}_{\lambda_0}^k, \mathbf{d}_{\lambda_i}^k)^T$ ,  $i = 1, \dots, 4$  e  $\mathbf{b}^k$  é o vetor residual definido por:

$$\mathbf{b}^k = \begin{pmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\lambda_2^k - \lambda_1^k) + \lambda_3^k - \lambda_4^k \\ \mathbf{t}_0^k : -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{t}_1^k : \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{t}_2^k : -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{t}_3^k : \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{t}_4^k : -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2 \\ -\bar{Z}_{1_k} \lambda_1^k + \mu \delta_1^k - D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^k \\ -\bar{Z}_{2_k} \lambda_2^k + \mu \delta_2^k - D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^k \\ -\bar{Z}_{3_k} \lambda_3^k + \mu \delta_3^k - D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^k \\ -\bar{Z}_{4_k} \lambda_4^k + \mu \delta_4^k - D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^k \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

em que:  $D_{z_i^k} = \text{diag}\left(d_{z_i^k}^k\right)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Para a definição do procedimento previsor, desprezamos os resíduos não-lineares  $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda_i}^k$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , isto é, a priori definimos esses resíduos como nulos, pois desconhecemos essas direções. Essa estratégia é uma variante do método previsor-corretor de [3], diferenciando-se do procedimento definido por esses autores, pois consideramos o parâmetro de barreira, definido nas condições de complementaridade apresentadas em (1.3), no procedimento previsor, para o cálculo das direções de busca. Assim, com procedimentos algébricos, definimos, a seguir, o quadro de direções primais e duais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu \boldsymbol{\varphi}^k\right) + \mathbf{t}_0^k\right) - \boldsymbol{\lambda}_0^k; \\
\mathbf{d}_x^k &= -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu \boldsymbol{\varphi}^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k\right); \\
\mathbf{d}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_1^k; \\
\mathbf{d}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_2^k; \\
\mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_3^k; \\
\mathbf{d}_{z_4}^k &= -\mathbf{d}_x^k + \mathbf{t}_4^k; \\
\mathbf{d}_{\lambda_1}^k &= -\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{d}_{z_1}^k + \mu \bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k - \boldsymbol{\lambda}_1^k; \\
\mathbf{d}_{\lambda_2}^k &= -\bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{d}_{z_2}^k + \mu \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k - \boldsymbol{\lambda}_2^k; \\
\mathbf{d}_{\lambda_3}^k &= -\bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{d}_{z_3}^k + \mu \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k - \boldsymbol{\lambda}_3^k; \\
\mathbf{d}_{\lambda_4}^k &= -\bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{d}_{z_4}^k + \mu \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k - \boldsymbol{\lambda}_4^k.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

onde:

$$\theta_k \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{K} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k}\right) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k}; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{c}^k \in \mathbb{R}^n : \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k\right) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k; \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^k \in \mathbb{R}^n : \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2^k\right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_3^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \boldsymbol{\delta}_4^k. \tag{1.10}$$

Com as direções do procedimento previsor calculadas, inicia-se o procedimento corretor considerando os resíduos não-lineares  $D_{z_i^k} \mathbf{d}_{\lambda_i}^k$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , pois agora conhecemos essas direções. O quadro de direções do procedimento corretor é análogo ao do procedimento previsor. A diferença está na complementação de expressões algébricas sobre o vetor  $\mathbf{c}^k$ , em que, para distingui-lo do procedimento previsor, o definiremos por  $\tilde{\mathbf{c}}^k$  apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{k}} = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^{\mathbf{T}} & \left( \bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^{\mathbf{k}} + \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k} \mathbf{d}_{\lambda_1}^{\mathbf{k}} - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^{\mathbf{k}} - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k} \mathbf{d}_{\lambda_2}^{\mathbf{k}} \right) + \\ & + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^{\mathbf{k}} + \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k} \mathbf{d}_{\lambda_3}^{\mathbf{k}} - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^{\mathbf{k}} - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k} \mathbf{d}_{\lambda_4}^{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Com as direções corrigidas  $\tilde{\mathbf{d}}_{\omega}^{\mathbf{k}} = \left( \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{d}}_{\mathbf{z}_i}^{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_i}^{\mathbf{k}} \right)^{\mathbf{T}}, i=1, \dots, 4$  calculadas, definimos o cálculo do tamanho do passo primal  $\bar{\alpha}_p$  e do passo dual  $\bar{\alpha}_d$  pela regra apresentada em [4]. Esta é apresentada a seguir:

$$\bar{\alpha}_p = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{(z_1)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_1)_i < 0} -\frac{(z_1)_i}{(\tilde{d}z_1)_i}, \min_{(z_2)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_2)_i < 0} -\frac{(z_2)_i}{(\tilde{d}z_2)_i}, \\ \min_{(z_3)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_3)_j < 0} -\frac{(z_3)_j}{(\tilde{d}z_3)_j}, \min_{(z_4)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_4)_j < 0} -\frac{(z_4)_j}{(\tilde{d}z_4)_j}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i=1, \dots, r; \\ j=1, \dots, n; \end{array} \quad (1.12)$$

$$\bar{\alpha}_d = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{(\lambda)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda)_i < 0} -\frac{(\lambda)_i}{(\tilde{d}\lambda)_i}, \min_{(\lambda_2)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_2)_i < 0} -\frac{(\lambda_2)_i}{(\tilde{d}\lambda_2)_i}, \\ \min_{(\lambda_3)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_3)_j < 0} -\frac{(\lambda_3)_j}{(\tilde{d}\lambda_3)_j}, \min_{(\lambda_4)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_4)_j < 0} -\frac{(\lambda_4)_j}{(\tilde{d}\lambda_4)_j}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i=1, \dots, r; \\ j=1, \dots, n. \end{array} \quad (1.13)$$

Então, a expressão que define  $\omega^{\mathbf{k}+1}$  é definida por:

$$\omega^{\mathbf{k}+1} = \omega^{\mathbf{k}} + \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{d}}_{\omega}^{\mathbf{k}}. \quad (1.14)$$

Dado um escalar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, verificamos se o critério de parada do MPIBLM é satisfeito se a seguinte condição está satisfeita:  $\|\nabla L(\omega^{\mathbf{k}+1})\|_{\infty} \leq \varepsilon$ . Caso o critério não seja satisfeito, atualizamos o parâmetro de barreira  $\mu^k$  por uma heurística definida por:

$$\mu^{k+1} = \alpha_{\mu} \mu^k; \quad (1.15)$$

em que  $\alpha_{\mu} \in (0,1) \subset \mathbb{R}$  é definido previamente; atualizamos os estimadores dos multiplicadores de Lagrange  $\delta_i^{\mathbf{k}}$  pela seguinte regra:

$$\delta_i^{\mathbf{k}+1} = \lambda_i^{\mathbf{k}+1}, \quad i=1, \dots, 4; \quad (1.16)$$

e reiniciamos o procedimento predictor-corrector.

## 2 A ESTRATÉGIA DE CONVERGÊNCIA GLOBAL.

Uma vez que  $\theta_k = \frac{\partial L(\mathbf{w}^k)}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}$  é simétrica e definida positiva, então a Decomposição de Cholesky (DC) é possível de ser realizada. Caso a DC não seja possível uma estratégia, que pode ser encontrada em [5] e em [6], é aplicada ao método. Essa estratégia é uma perturbação sobre a matriz  $\theta_k$  a qual é definida da seguinte maneira:

$$\hat{\theta}_k = \theta_k + \beta I_n; \quad (1.17)$$

onde  $\beta \in \mathbb{R}_+$  é denominado por parâmetro de *damping* ou parâmetro de amortecimento do método de Levenberg-Marquardt, o qual foi desenvolvido para a resolução de problemas de quadrados mínimos. Assim, enquanto a DC não for satisfeita, a perturbação (1.17) é aplicada, isto é, essa estratégia transforma o MPIBLM de tal forma a determinar e garantir uma sequência de direções de descida para a determinação de novos pontos, convertendo-o em um método primal-dual com estratégia de convergência global (CG), isto é, o MPIBLM transforma-se em MPIBLMCG. O parâmetro  $\beta$  influencia tanto na direção quanto no tamanho do passo, assim, o procedimento de Levenberg-Marquardt não necessita de uma busca linear para descobrir o tamanho do passo a ser dado em cada direção de busca em uma iteração qualquer. Seja  $lm$  o número de iterações necessárias para tornar a matriz  $\theta_k$  em definida positiva, então temos o processo iterativo definido a seguir:

$$\beta^{lm+1} = \beta^{lm} \left( \frac{\mu_1 + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \mu^2 + \mu_1^2}}{2\mu_1} \right); \quad (1.18)$$

em que  $\mu_1 = \mu^{k-1}$  e  $\beta^k$  é definido por  $\beta^k = \beta^{lm+1}$ . Para uma iteração que passa do procedimento corretor para o procedimento previsor, ou seja, para uma iteração  $k+1$ , podemos atualizar o valor de  $\beta$  de acordo com as definições a seguir, que propõe uma modificação na definição do parâmetro de amortecimento em relação àquela encontrada em [5]:

i) Se  $L(\mathbf{w}^k) - L(\mathbf{w}^{k+1}) < 0,25$ , então  $\beta$  é atualizado pela heurística:

$$\beta^{k+1} = \frac{\beta^k}{3} \quad (1.19)$$

ii) Se  $L(\mathbf{w}^k) - L(\mathbf{w}^{k+1}) > 0,25$ , então  $\beta$  é atualizado pela heurística (1.18); (1.20)

iii) Se  $0,25 \leq L(\mathbf{w}^k) - L(\mathbf{w}^{k+1}) \leq 0,75$ , então  $\beta$  não será alterado. (1.21)

### 3 A ESTRATÉGIA DE EXTRAPOLAÇÃO CÚBICA.

Na definição do algoritmo proposto, a penalização logarítmica modificada existe e auxilia o MPIBLMCG em seu procedimento com pontos inviáveis que pertencem à região de viabilidade relaxada (ampliada ou aumentada). Porém, a inviabilidade pode ocorrer em pontos que estão próximos ou que não pertençam à região relaxada, consequente, implicando na não-existência da função barreira logarítmica modificada. Para suprir essa dificuldade, uma extrapolação cúbica, que preserva as diferenciais de primeira e de segunda ordem, é aplicada ao MPIBLMCG. Essa extrapolação é uma variante do ajuste quadrático para funções barreiras modificadas que pode ser encontrado em [7] e, com mais detalhes, em [8]. Por simplicidade, definiremos por  $z$  uma componente qualquer dos vetores  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$  ou  $\mathbf{z}_4$ .

Seja  $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ : o parâmetro de proximidade da variável de folga  $z$  à fronteira interior relaxada. Se  $z \geq -\tau\mu$ , então a função barreira modificada  $\Psi(z)$  é definida por:  $\Psi(z) = \ln\left(1 + \frac{z}{\mu}\right)$ . Caso contrário, se  $z < -\tau\mu$ , uma extrapolação cúbica é definida pelo polinômio a seguir:

$$\Psi(z) = \frac{q_3}{6}z^3 + \frac{q_2}{2}z^2 + q_1z + q_0; \quad (1.22)$$

em que:

$$\begin{cases} q_0 &= \ln(1-\tau) + \frac{11\tau^3 - 15\tau^2 + 6\tau}{6(1-\tau)^3} \\ q_1 &= \frac{(3\tau^2 - 3\tau + 1)}{\mu(1-\tau)^3} \\ q_2 &= \frac{3\tau - 1}{\mu^2(1-\tau)^3} \\ q_3 &= \frac{2}{\mu^3(1-\tau)^3} \end{cases} \quad (1.23)$$

Quando há a necessidade de extrapolação, a matriz  $\bar{Z}^{-1}$  é definida por  $\Psi'(z) = \text{diag}\left(\frac{q_3}{2}z^2 + q_2z + q_1\right)$ .

O parâmetro de barreira  $\mu$  é atualizado, se  $\|\nabla L(\mathbf{w}^{k+1})\|_{\infty} > \varepsilon$ , da seguinte maneira:

$$\mu^{k+1} = 0,618\mu^k; \quad (1.24)$$

e faça-se o teste: se para todo  $z$  obtermos que  $z^{k+1} \geq -\tau\mu^{k+1}$ , a heurística (1.24) permanece. Caso contrário, se para algum  $z$  obtermos  $z^{k+1} < -\tau\mu^{k+1}$ ,  $\mu^{k+1}$  recebe o seguinte incremento:

$$\mu^{k+1} = 1,382\mu^k; \quad (1.25)$$



e reinicie o procedimento previsor-corretor.

Com a estratégia de extrapolação cúbica (EX) definida e aplicada sobre o método MPIBLMCG, temos o método MPIBLMCG-EX.

#### 4 O MPIBLMCG-EX APLICADO AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO.

Aplicamos, através de uma implementação construída em MATLAB 6.1, o MPIBLMCG-EX ao problema de fluxo de potência ótimo reativo (FPO-Reativo). O FPO-Reativo é um fenômeno observado e estudado no âmbito da engenharia elétrica em uma subárea denominada por sistemas de potências. Esse fenômeno é modelado matematicamente como um problema de otimização não-linear cuja região de viabilidade é não-convexa e o objetivo é o de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão e que atenda aos seguintes critérios:

- i) às leis de Kirchoff (restrições funcionais de igualdade);
- ii) aos geradores que contém o controle reativo (restrições funcionais de desigualdade);
- iii) às magnitudes dos fasores de tensão e ângulo em cada barra, em que a tensão é controlada por um limitante mínimo e máximo (variáveis canalizadas) e os ângulos são irrestritos.

O Modelo de um FPO-Reativo é definido, segundo [9], a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{NL} (g_{km})_i (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \text{s.a :} \\ \Delta P_{t_1} = P_k^{esp} - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) = 0 \\ \Delta Q_{t_2} = Q_k^{esp} + V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) = 0 \\ u_{1cr} \leq -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \leq u_{2cr} \\ l_{1bar} \leq V_{bar} \leq l_{2bar} \\ -\infty \leq \gamma_{bar} \leq \infty \end{array} \right. \quad (1.26) \quad ;$$

em que:  $f(\mathbf{x})$ : é a função objetivo, que representa as perdas de transmissão de potência ativa na transmissão na rede;  $NL$ : é o número de linhas de transmissão que compõe o sistema;  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{NB}$ : é o vetor de tensões, tal que,  $NB$  é o número de barras do sistema;  $\boldsymbol{\gamma} \in NB$ : Vetor de ângulos;  $V_k$ : é a tensão na barra  $k$  a conectar;  $\gamma_k$ : é o ângulo da tensão da barra  $k$  a conectar;  $V_m$ : é a tensão na barra  $m$  a ser conectada;  $\gamma_m$ : é o ângulo da tensão da barra  $m$  a ser conectada;  $(g_{km})_i$ : é a condutância da linha  $i$  a qual conecta as barras  $k$  e  $m$ ;  $\Delta P_{t_1}$ : é a equação de balanço

de potência ativa. O sistema contém  $(NB-1)$  equações;  $P_k^{esp}$  : é a diferença entre a Potência ativa gerada e a Potência ativa consumida na barra  $k$  ;  $\Delta Q_{t_2}$  : é a equação de balanço de potência reativa. O sistema contém  $NBC$  equações, onde  $NBC$  é o número de barras de carga;  $Q_k^{esp}$  : é a diferença entre a Potência reativa gerada e a Potência reativa consumida na barra  $k$  ;  $cr$  : é o número de barras de controle de reativos ( $NBCR$ ) ;  $bar$  : é o número de barras do sistema;  $\Omega$  : é o conjunto de todas as barras vizinhas à barra  $k$  ;  $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ ,  $j^2 = -1$  : é a matriz de Admitância das linhas as quais  $k$  conecta com  $m \in \Omega$ .

Neste trabalho, o ângulo da barra de referência, conhecida como barra *slack*, não será fixado em zero enquanto o MPIBLMCG-EX está em procedimento. Após o critério de convergência do MPIBLMCG-EX ser satisfeito, se definirmos por  $\gamma_{slack}$  ao ângulo correspondente à barra *slack*, cada componente  $\gamma_j, j=1,...,n$ , do vetor  $\gamma$  é redefinido com a operação  $\left[ (\gamma_j - \gamma_{slack}) \frac{180}{\pi} \right]^\circ$ , assim, o ângulo  $\gamma_j$  está defasado em relação ao ângulo zero definido pela barra *slack* e a grandeza é apresentada em graus; os *taps* dos transformadores são todos fixos e, na existência de *tap* em uma linha de transmissão, utilizamos o inverso numérico desse valor para a construção da matriz  $Y_{km}$ ; utilizamos a potência de base 100 *megawatts* (*MW*), isto é, 1 unidade (*p.u.*) equivale a 100*MW*.

## 2.1 Resultados para o sistema IEEE-118.

O banco de dados do sistema IEEE-118 barras pode ser encontrado em [10]. O sistema IEEE-118 barras contém 64 são barras de carga, 54 barras geradoras com controle de reativo e 186 linhas de transmissão. O sistema contém 181 restrições de igualdade, dentre as quais, 117 são do tipo  $\Delta P$  e 54 são do tipo  $\Delta Q$ , e 54 restrições de desigualdades canalizadas; em que as canalizações das tensões e ângulos são definidas respectivamente por  $0,95 \leq V \leq 1,1$  e  $-99 \leq \gamma \leq 99$ .

Iniciamos o método com  $V^0$  e  $\gamma^0$  definidos pelo banco de dados; cada componente dos vetores dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange  $\delta_i^0, i=1,...,4$ , é definida por  $0,1 p.u.$ ,  $\mu_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0,1$ ,  $\tau = 0,45$ . Utilizamos (1.3) para obtermos  $z_i^0$  e  $\lambda_j^0, i=1,...,4$ , e  $j=0,...,4$ . A dimensão do vetor  $\omega$  é 1577, isto é, esse contém 1577 variáveis. A precisão utilizada é  $\varepsilon = 10^{-11} p.u.$  para a verificação das condições de KKT é o critério de parada do método.

A matriz  $\hat{\theta}_k$  contém 55696 elementos, dentre os quais 3968 são não-nulos, isto é, a matriz contém 7,124% de elementos não-nulos. A matriz  $\nabla g(x^k) \hat{\theta}_k^{-1} \nabla g(x^k)^T$  contém 32761 elementos, dentre os quais 32761 são elementos não-nulos.

O método convergiu em 24 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em  $f(\mathbf{x}^*)=107,7019055916945 \text{ MW}$ , a imagem pela função lagrangiana está avaliada em  $L(\mathbf{w}^*)=107,7019055917007 \text{ MW}$ , as avaliações nas restrições de igualdades são avaliadas em:  $\max(\Delta P)=4,931166 \times 10^{-12} \text{ p.u.}$  e  $\max(\Delta Q)=6,661338 \times 10^{-13} \text{ p.u.}$ ; a avaliação do gap dual (condições de complementaridade) é avaliada em  $\max(\text{gap})=5,900168 \times 10^{-15} \text{ p.u.}$ ; a precisão da solução ótima é avaliada em  $\|\nabla L(\mathbf{w}^*)\|_{\infty}=4,931166 \times 10^{-12} \text{ p.u.}$ ; Os parâmetros  $\mu$  e  $\beta$  são avaliados em  $5,470932 \times 10^{-7}$  e  $0,007161$ , respectivamente. A tabela 1 apresenta os controles de reativos ótimos. Destacamos as barras 25, 34, 36, 62, 65, 66, 74, 85, 92 e 105, pois essas estão operando em seus limitantes inferiores ou superiores. Por serem restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$ , seus respectivos multiplicadores de Lagrange são não-nulos. Esses estão avaliados, em  $\text{p.u.}$ , respectivamente por: 0,00407967; 0,001667840; 0,000174008; 0,000279097; 0,001130367; 0,009576484; 0,000068488; 0,002131085; 0,0036185407 e 0,0006089243.

**Tabela 1:** Os controles de reativos ótimos para o sistema IEEE-118 obtidos pelo método MPIBLMCG-EX.

AVALIAÇÃO DOS CONTROLES DE REATIVOS (em p.u.)			
Barra $k$	$u_{1_k}$	$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$	$u_{2_k}$
1	-0,0500	0,09452465944197	0,1500
4	-3,0000	0,56432228737156	3,0000
6	-0,1300	0,11756591896316	0,5000
8	-3,0000	-0,79294318711358	3,0000
10	-1,4700	-1,02763757565558	2,0000
12	-0,3500	0,32566134231543	1,2000
15	-0,1000	-0,05564030692245	0,3000
18	-0,1600	-0,01315122236880	0,5000
19	-0,0800	0,00027055038528	0,2400
24	-3,0000	-0,07266303239871	3,0000
25	-0,4700	-0,47000000000000	1,4000
26	-10,0000	-0,30749784815070	10,0000
27	-3,0000	0,14191991299786	3,0000
31	-3,0000	0,00057491857410	3,0000
32	-0,1400	-0,00405381900876	0,4200
34	-0,0800	-0,08000000000003	0,2400
36	-0,0800	-0,08000000000001	0,2400
40	-3,0000	0,08043343248677	3,0000
42	-3,0000	0,10729968406639	3,0000
46	-1,0000	-0,16604335982632	1,0000
49	-0,8500	-0,10870287305296	2,1000
54	-3,0000	0,03403698368626	3,0000
55	-0,0800	-0,01270144021316	0,2300
56	-0,0800	0,00875291509913	0,1500

59	-0,6000	-0,06250394531306	1,8000
61	-1,0000	0,24845942085262	3,0000
62	-0,2000	-0,20000000000001	0,2000
65	-0,6700	-0,66999999999999	2,0000
66	-0,6700	-0,66999999999998	2,0000
69	-99,0000	-1,04059301668678	99,0000
70	-0,1000	-0,04952869404970	0,3200
72	-1,0000	-0,05730330608834	1,0000
73	-1,0000	-0,02378392933632	1,0000
74	-0,0600	-0,05999999999999	0,0900
76	-0,0800	0,12228074736253	0,2300
77	-0,2000	0,28035141772669	0,7000
80	-1,6500	-0,39608764437143	2,8000
85	-0,0800	0,23000000000000	0,2300
87	-1,0000	0,01166924045628	10,0000
89	-2,1000	-0,57420296361308	3,0000
90	-3,0000	0,05434519123311	3,0000
91	-1,0000	0,02588264112604	1,0000
92	-0,0300	0,09000000000001	0,0900
99	-1,0000	-0,03619363335351	1,0000
100	-0,5000	0,33209194465240	1,5500
103	-0,1500	0,01976219147427	0,4000
104	-0,0800	-0,00788005950646	0,2300
105	-0,0800	-0,08000000000000	0,2300
107	-2,0000	-0,08239741650467	2,0000
110	-0,0800	-0,04574083181187	0,2300
111	-1,0000	-0,00338931411819	10,0000
112	-1,0000	-0,00851631749361	10,0000
113	-1,0000	-0,07893380174018	2,0000
116	-10,0000	-0,34608185144089	10,0000

A figura 1 apresenta a sequência de soluções das tensões obtidas pelo método ao longo das iterações.

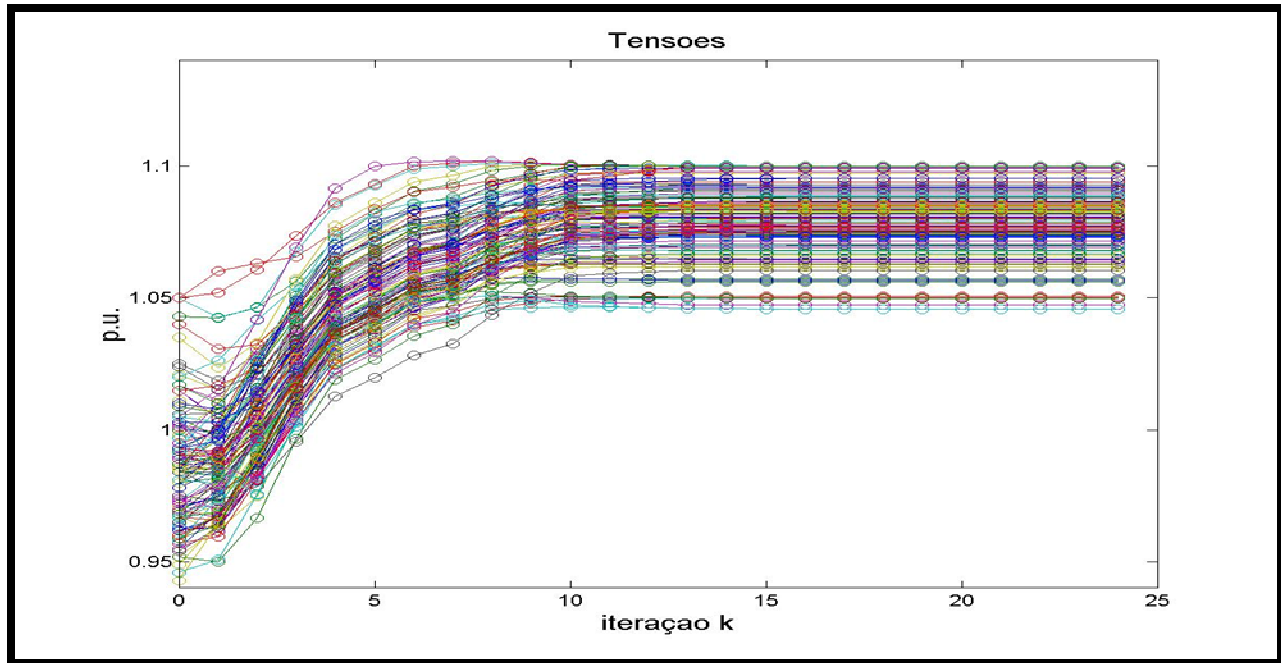


Figura 1: Sequência dos pontos  $\mathbf{v}^k$  obtidos pelo método MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

Notamos na figura 2 que as tensões  $V_4$ ,  $V_9$ ,  $V_{25}$ ,  $V_{37}$ ,  $V_{66}$ ,  $V_{69}$ ,  $V_{80}$ ,  $V_{87}$ ,  $V_{89}$  e  $V_{100}$  estão operando em seus limites máximos. Por serem restrições ativas em  $\mathbf{V}^*$ , seus respectivos multiplicadores de Lagrange são não-nulos. Esses estão avaliados, em *p.u.*, respectivamente por: 0,0320225; 0,1877409; 0,3438780; 0,0730942; 0,6053443; 0,2065799; 0,0592597; 0,0055223; 0,4864108 e 0,0546143.

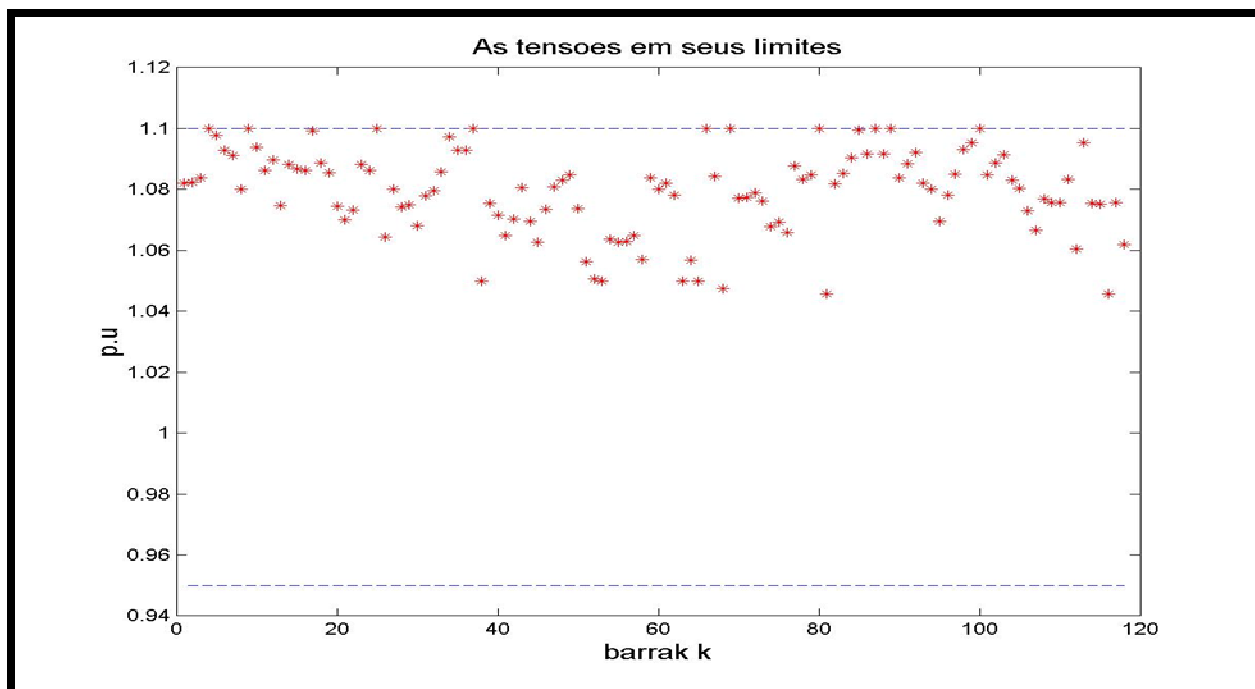


Figura 2: As tensões ótimas determinadas pelo MPIBLMCG-EX em seus limites de definição para o sistema IEEE-118.

A figura 3 apresenta  $\gamma^*$ , em graus:

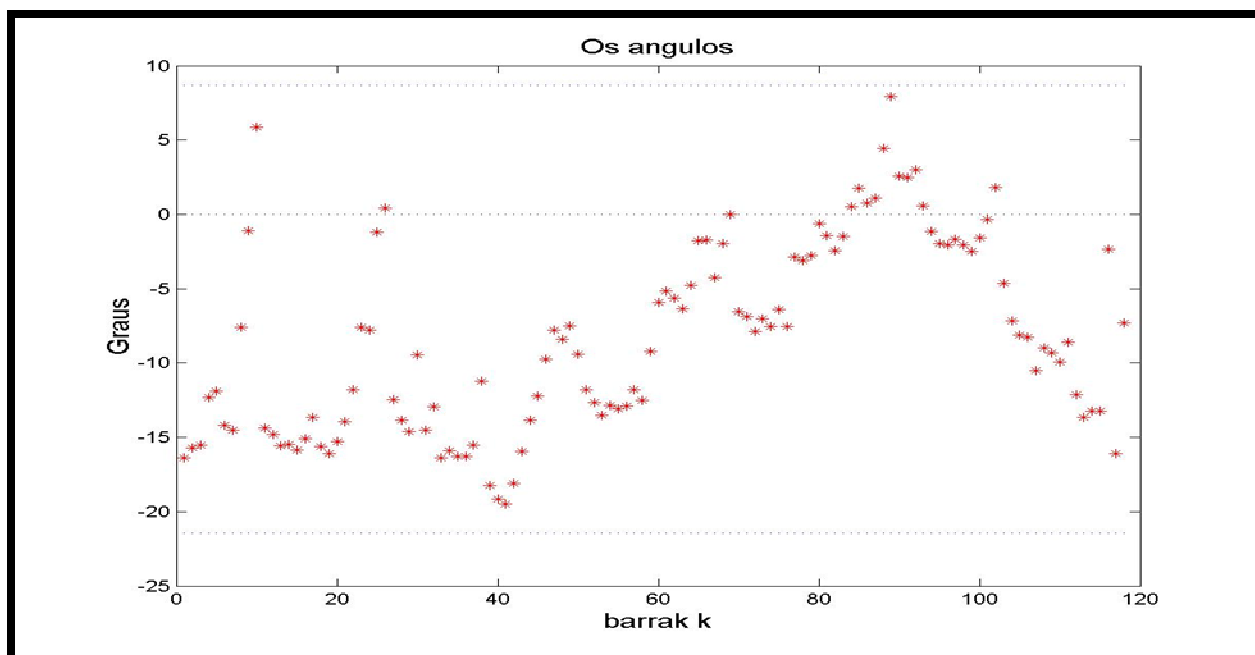


Figura 3: Os ângulos ótimos determinados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

A figura 4 apresenta a sequência de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_0^k$  gerados pelo método:

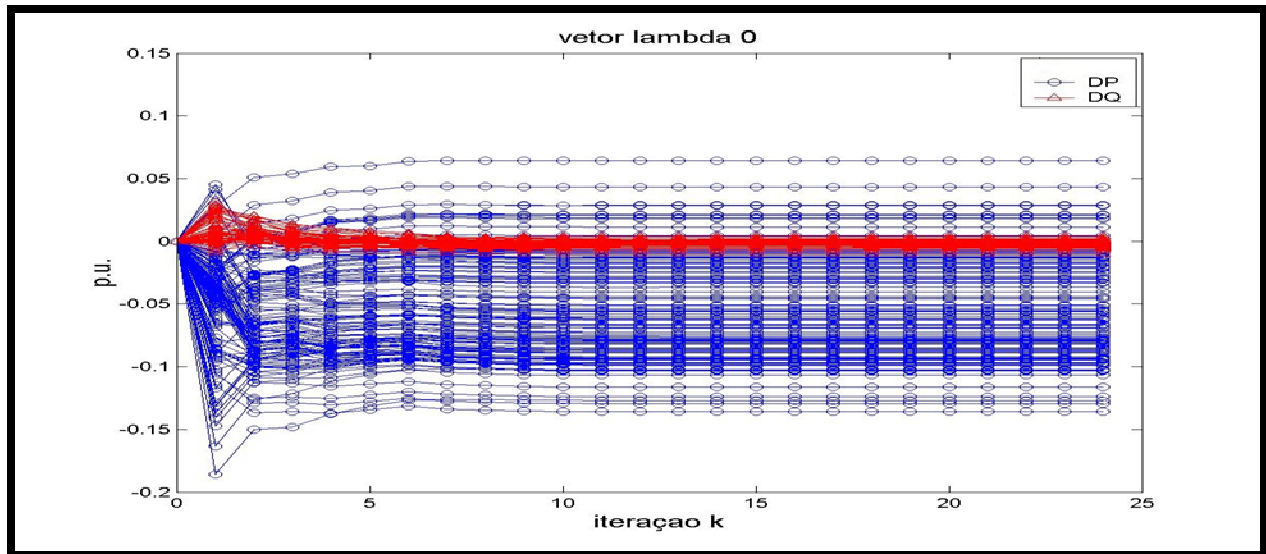


Figura 4: Sequências de pontos  $\lambda_0^k$  gerados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

A figura 5 apresenta a sequência de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i^k, i = 1, \dots, 4$ , geradas pelo método.

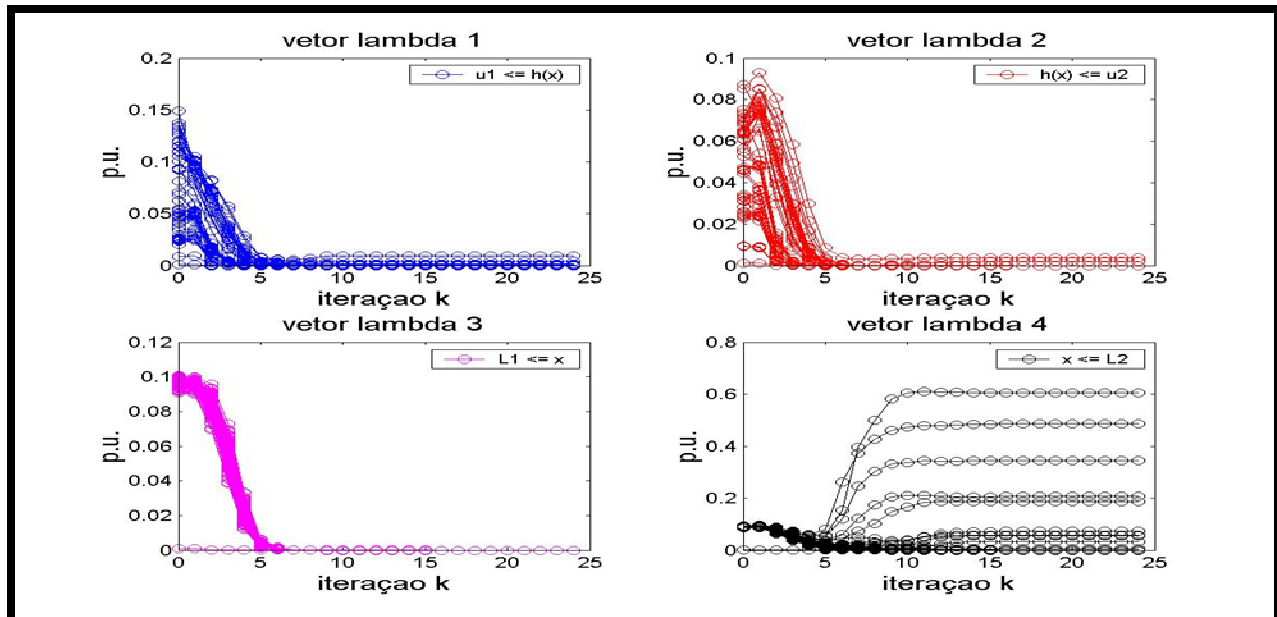


Figura 5: Sequências de pontos  $\lambda_i^k, i = 1, \dots, 4$ , geradas pelo método MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

A figura 6 apresenta a sequência de valores da função objetivo obtida pelo método em cada iteração.

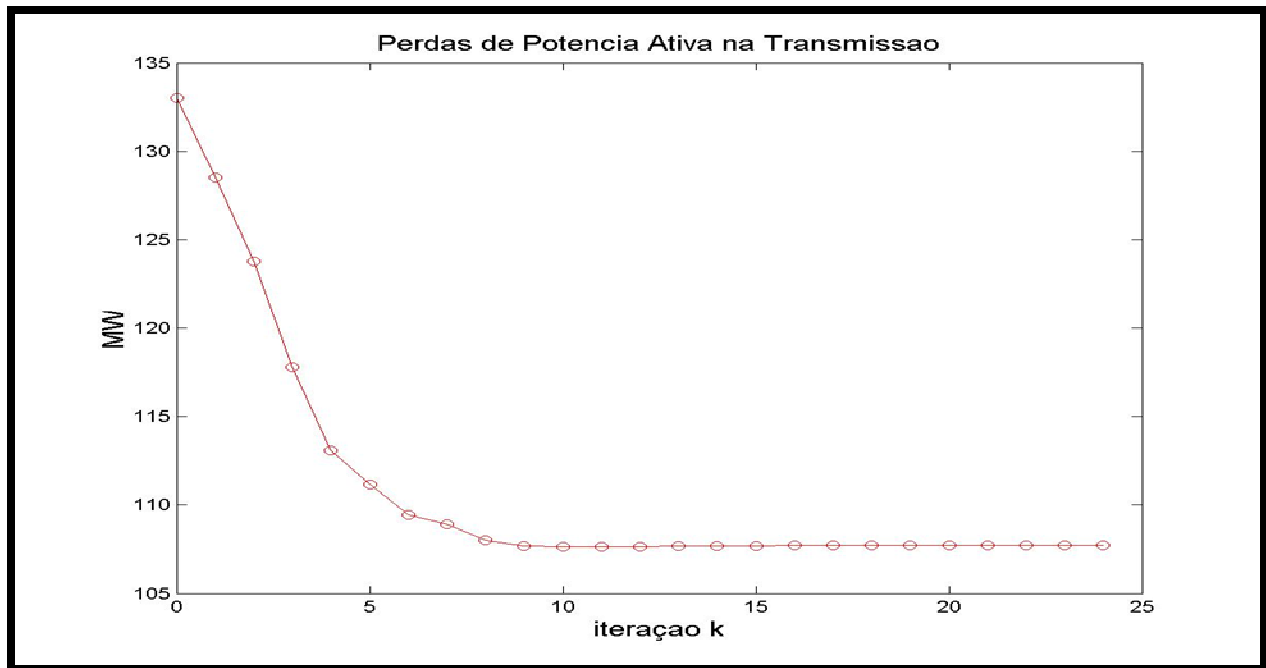


Figura 6: Sequência de valores da função objetivo gerados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

A figura 7 apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento  $\beta_k$  ao longo das iterações.



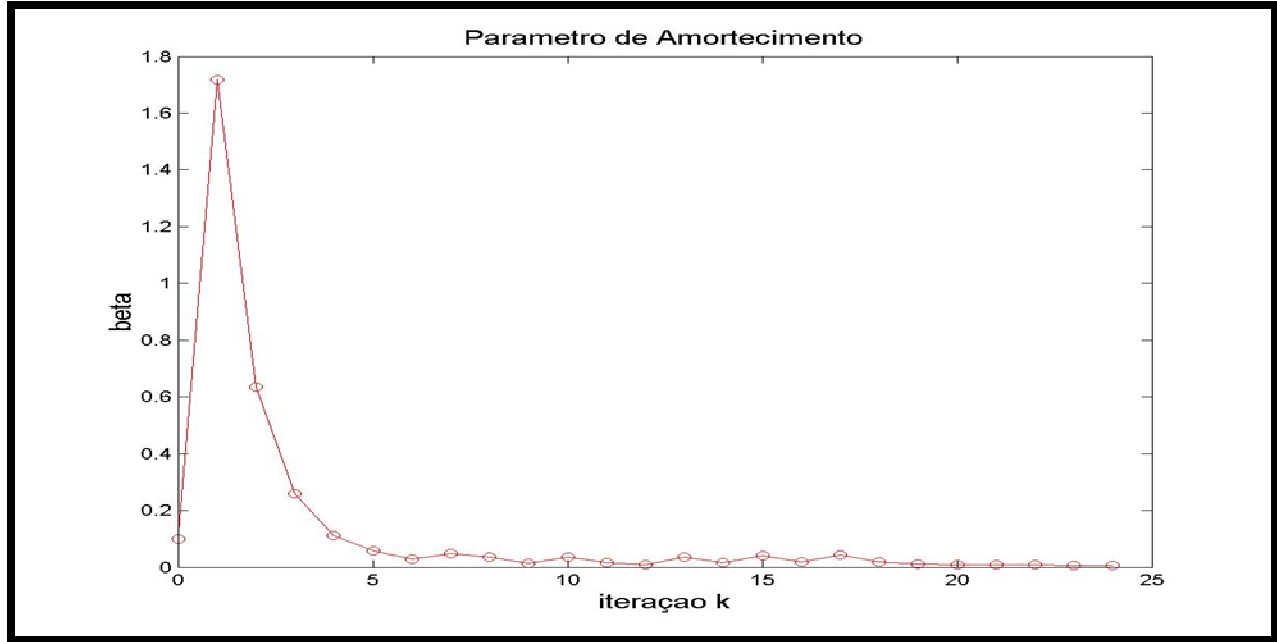


Figura 7: Evolução do parâmetro de amortecimento  $\beta_k$  gerado pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-118.

Na figura 7 observamos que a  $\theta_k$  necessitou de um salto no amortecimento para torná-la definida positiva, na 1ª iteração. O método, a partir dessa iteração, utilizando-se dos critérios apresentados em (1.19) a (1.21), gerou uma sequência decrescente para o parâmetro de amortecimento até a 5ª iteração. Esta sequência apresenta oscilações de baixa amplitude entre as iterações 6 a 18 até se estabilizar, em um valor finito em torno de 0,007161, a partir da 19ª iteração. Esse valor nos mostra quão mal condicionada ou quão instável é a matriz  $\theta_k$  para uma sutil mudança de direção de busca quando  $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$ , pois  $\beta^k$  não tende para zero, isto é, algum autovalor da matriz hessiana torna-se negativo e a Decomposição de Cholesky não é possível. O autovalor que causa essa instabilidade pertence à linha e coluna 120 da matriz  $\mathbf{D}$  de autovalores de  $\theta_k$  o qual é avaliado, segundo o comando “`eig( $\theta_k$ )`” do MATLAB, em  $-0,094588$ . Após a aplicação da estratégia global, apresentada na seção 2, esse autovalor é avaliado em  $17,163110$  e, assim, o MPIBLMCG-EX tem condições suficientes de gerar uma nova direção de descida.

## 5 CONCLUSÕES.

Neste trabalho apresentamos um método predictor-corretor primal dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada, com estratégias de extrapolação cúbica e de convergência global (MPIBLMCG-EX). O método foi eficiente devido aos seguintes aspectos:

i) ao procedimento predictor-corretor, por considerar todos os resíduos condizentes às viabilidades primal, dual e condição de complementaridade. Portanto, esse contribuiu ao

refinamento das direções de busca, ao tratamento da esparsidade da matriz dos coeficientes  $A_k$  do sistema (1.5) e também por explicitar as equações de cada uma das direções de busca;

ii) ao procedimento barreira logarítmica modificada, pois esse possibilita que convergência do método para pontos pertencentes à fronteira da região viável do problema (1.1) de forma exata e não-assintótica, enquanto que, no procedimento barreira logarítmica clássica de [11], a convergência, se ocorrer, é assintótica só possibilita a obtenção de pontos da fronteira de forma aproximada.

iii) à estratégia de convergência global, a qual é uma variante do método de Levenberg-Marquardt que ajusta os autovalores diagonais da matriz hessiana  $\theta_k$ , tornando-os positivos de tal forma que  $\theta_k$  torna-se diagonalmente dominante e é transformada em definida positiva. Essa estratégia é interessante, pois não utilizamos procedimento de busca linear para o cálculo do passo, mesmo que a região de viabilidade é não-convexa e por garantir que a matriz hessiana é não-singular a medida que  $\omega^k \rightarrow \omega^*$ , isto é, a estratégia também evitou a instabilidade numérica, se no critério de parada considerarmos  $\varepsilon > 0$  muito pequeno;

iv) à estratégia de extrapolação cúbica ou de ajuste cúbico, a qual auxiliou ao MPIBLMCG em ocasiões extremas em que uma variável de folga viesse a transpor a região de viabilidade relaxada ou não atender o critério de que  $z \geq -\tau\mu$ . Esta extrapolação é definida através de um polinômio que preserva as diferenciais de primeira e de segunda ordem do logaritmo no ponto  $z = -\tau\mu$ . Essa estratégia nos permitiu a aplicação de uma nova heurística para a atualização do parâmetro de barreira em problemas de programação não-linear e não-convexo, de tal forma a incrementar esse parâmetro na iterações em que o ajuste cúbico fosse necessário e reduzi-lo a uma taxa  $\alpha_\mu$  superior a 0,5. Observamos que, em problemas de FPO-Reativo, para  $\alpha_\mu > 0,15$  a possibilidade de que o logaritmo modificado não esteja definido para algum  $z < -\mu$ , numa iteração  $k$ .

Considerando-se aos aspectos apresentados acima, o MPIBLMCG-EX, o qual foi aplicado ao problema de FPO-Reativo, que é um problema de otimização não-linear e não-convexo, sobre o sistema elétrico de potência de 118 barras, mostrou-se robusto por resolvê-lo e eficiente pelo fato de que foram necessárias 24 iterações para obtermos a solução ótima do problema de maneira que o critério de parada fosse satisfeito em relação à precisão

$$\|\nabla L(\omega^{24})\|_\infty \leq 10^{-11}.$$

## 6 REFERÊNCIAS.

- [1] Sousa V. A., "Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada". Tese (Doutorado), São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.
- [2] Polyak, R., "Modified barrier functions." *Mathematical Programming*, vol. v.54, n. 2, p. 177 – 222, 1992.
- [3] Wu, Y., Debs, A. S., Marsten. R. E., "A Direct Nonlinear Predictor- Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flow," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, pp. 876-883, 1994.
- [4] Granville, S., "Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, pp. 136-146, 1994.
- [5] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3 ed., New Jersey: Wiley Interscience, 2006.
- [6] Benson, H. Y., Shanno, D. F., Vanderbei, R. J., "Interior-Point Methods for nonconvex nonlinear programming: Jamming and comparative numerical testing," *Operations Research and Financial Engineering*, 2000.
- [7] Pereira, A. A., "O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade." Dissertação (mestrado), São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.
- [8] Matioli, L., "Uma nova metodologia para construção de funções de penalização para algoritmos de lagrangeano aumentado". Tese (Doutorado), Florianópolis, Santa Catarina: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [9] Monticelli, A., "Fluxo de carga em redes de energia elétrica", São Paulo: Edgard Blücher , 1983.
- [10] University Washington Electrical Engineering. [Online]. Available: <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>. [Acesso em 26 Março 2012].
- [11] Frisch, K. R., "The Logarithmic Potential Method for Convex Programming," 1955.

}