

## ESTUDO NUMÉRICO DA FORMULAÇÃO ESTABILIZADA SUBMALHA DIFUSÃO DINÂMICA APLICADA ÀS EQUAÇÕES DE EULER COMPRESSÍVEIS

R. N. Mattos<sup>1</sup>, I. P. Santos<sup>1,2</sup>, L. Catabriga<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratório de Computação de Alto Desempenho, Universidade Federal do Espírito Santo, robertanmattos@yahoo.com.br e luciac@lcad.inf.ufes.br, <http://www.lcad.inf.ufes.br>

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Espírito Santo, Campus de São Mateus, isaac.santos@ufes.br, <http://www.ceunes.ufes.br>

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma implementação do método de elementos finitos para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis bidimensionais em variáveis conservativas, usando a formulação estabilizada submalha Difusão Dinâmica, considerando que as escalas submalhas sejam transientes. O método Difusão Dinâmica é baseado no formalismo multiescala e foi proposto para resolver problemas de transporte predominantemente convectivos. Um operador dissipativo não linear é acrescentado ao método de Galerkin adicionando uma viscosidade artificial não parametrizada em todas as escalas da discretização. Um algoritmo preditor multicorretor de segunda ordem é utilizado para a integração no tempo e os sistemas lineares resultantes em cada correção são resolvidos pelo método iterativo GMRES. São considerados um conjunto de experimentos clássicos tais como, choque normal, choque oblíquo e choque refletido para aferir a acuidade da solução aproximada encontrada. Os experimentos numéricos realizados demonstram que o método Difusão Dinâmica – com subescalas transientes – obtém soluções mais precisas do que o método estabilizado SUPG/CAU.*

**Palavras-Chave:** *Método Estabilizado Multiescala Difusão Dinâmica, Elementos Finitos, Equações de Euler, Submalhas Transientes.*

### 1. INTRODUÇÃO

As equações de Euler compressíveis formam um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem, proveniente das leis de conservação da massa, momento e energia. Essas equações descrevem o escoamento de fluidos na natureza, considerados não viscosos.

O método de estabilização submalha Difusão Dinâmica, introduzido por Arruda et al. [2] para a equação de convecção-difusão-reação consiste em adicionar à formulação de Galerkin um operador dissipativo não-linear, agindo isotropicamente em todas as escalas. A quantidade de difusão artificial é determinada pela solução na escala resolvida a nível do

elemento, sendo portanto um método auto-adaptativo e livre de parâmetros de estabilização. Werner et al. [15] aplicou o método Difusão Dinâmica no problema de escoamento miscível em meios porosos, considerando a hipótese de submalhas *quase-estáticas* [4, 8]. As soluções encontradas foram similares àquelas obtidas pela formulação SUPG/CAU.

Neste trabalho apresentamos uma implementação do método de elementos finitos para resolver as equações de Euler em variáveis conservativas, usando o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica, considerando que as submalhas sejam transientes. O algoritmo preditor multicorretor de segunda ordem descrito em [7] é utilizado para a integração no tempo e os sistemas lineares resultantes em cada correção são resolvidos pelo método iterativo GMRES [10]. São considerados um conjunto de experimentos clássicos tais como, choque normal, choque oblíquo e choque refletido para aferir a acuidade da solução aproximada encontrada. Experimentos numéricos são realizados e comparados com a formulação estabilizada SUPG/CAU (*Streamline Upwind Petrov Galerkin/ Consistent Approximate Upwind*)[1, 3].

O restante deste trabalho está organizado como a seguir. O modelo matemático do problema é apresentado na Seção 2. A formulação numérica é descrita na Seção 3. Na Seção 4 apresentamos os experimentos numéricos comparando as formulações estabilizadas Difusão Dinâmica e SUPG/CAU. A última seção contém as principais conclusões obtidas.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O sistema de Equações de Euler, usando variáveis conservativas definidas por  $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho e)$ , é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  é o campo de velocidades,  $e$  é a energia total por unidade de massa,  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$  são os fluxos de Euler,  $\Omega$  é um domínio convexo poligonal de  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\Gamma$ , e  $T$  é um número real positivo. As coordenadas espaciais e temporal são dadas por  $\mathbf{x} = (x, y) \in \overline{\Omega}$  e  $t \in [0, T]$ , onde  $\overline{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$ . A Eq. (1) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

onde

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{U}} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{U}}.$$

Um conjunto de condições de contorno e iniciais devem ser definidas de forma apropriada para a Eq. (2), completando a descrição do modelo.

## 3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Seja  $\mathcal{T}_h$  uma triangulação do domínio  $\Omega$  em  $nel$  elementos  $\Omega_e$ . A formulação SUPG/CAU para o sistema de equações de Euler em variáveis conservativas consiste em

achar  $\mathbf{U}^h \in \mathcal{U}^h$  tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \mathbf{A}_x^h + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \mathbf{A}_y^h \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \delta \left( \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\mathcal{U}^h$  é o espaço das funções testes e  $\mathcal{W}^h$  é o espaço das funções admissíveis, do método de Galerkin, formados por funções contínuas e lineares por partes em  $\Omega$ . Os parâmetros de estabilização adotados,  $\tau$  do método SUPG e  $\delta$  do operador de captura de descontinuidades CAU, podem ser encontrados em [3].

Para definição do método de estabilização Difusão Dinâmica, considere o seguinte enriquecimento dos espaços de aproximação  $\mathcal{U}^h$  e  $\mathcal{W}^h$ , dado por

$$\mathcal{U}^E = \mathcal{U}^h \oplus \mathcal{U}^B; \quad (4)$$

$$\mathcal{W}^E = \mathcal{W}^h \oplus \mathcal{W}^B, \quad (5)$$

onde  $\mathcal{U}^B$  e  $\mathcal{W}^B$  são, respectivamente, os espaços de funções testes e admissíveis, formados por funções bolhas [11] – ver Fig. 1. As funções enriquecidas  $\mathbf{U}^E \in \mathcal{U}^E$  e  $\mathbf{W}^E \in \mathcal{W}^E$  são decompostas unicamente da seguinte forma

$$\mathbf{U}^E = \mathbf{U}^h + \mathbf{U}^B, \quad \text{onde } \mathbf{U}^h \in \mathcal{U}^h \text{ e } \mathbf{U}^B \in \mathcal{U}^B; \quad (6)$$

$$\mathbf{W}^E = \mathbf{W}^h + \mathbf{W}^B, \quad \text{onde } \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \text{ e } \mathbf{W}^B \in \mathcal{W}^B. \quad (7)$$

No contexto dos métodos multiescala,  $\mathcal{U}^h$  e  $\mathcal{W}^h$  representam os espaços das escalas resolvidas (espaços macro), enquanto que  $\mathcal{U}^B$  e  $\mathcal{W}^B$  representam os espaços das escalas não resolvidas (espaços micro ou submalha) [11]. Em geral, os espaços  $\mathcal{U}^h$  e  $\mathcal{W}^h$  são formados por funções contínuas em  $\Omega$  e polinomiais em cada elemento  $\Omega_e \in \mathcal{T}_h$ . O método de estabilização submalha Difusão Dinâmica para a Eq. (2) consiste em achar  $\mathbf{U}^E \in \mathcal{U}^E$  tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^E \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^E}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^E}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}^E \in \mathcal{W}^E, \end{aligned} \quad (8)$$

onde

$$\xi_h = \xi_h(\mathbf{U}^h) = \begin{cases} \mu(h) \frac{\|R(\mathbf{U}^h)\|_{\tilde{A}_0^{-1}}}{\|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}}}, & \text{se } \|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}} < tol_{\xi}; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (9)$$

sendo  $\mu(h) = \sqrt{2A^e}$  o parâmetro característico submalha, com  $A^e$  a área do elemento  $\Omega_e$ ,  $tol_{\xi} = 10^{-10}$  neste trabalho,  $R(\mathbf{U}^h)$  é o resíduo da equação no interior de  $\Omega_e$ , denotado por

$$R(\mathbf{U}^h) = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y},$$

e

$$\|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}} = \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\tilde{A}_0^{-1}} + \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\tilde{A}_0^{-1}},$$

onde  $\tilde{A}_0$  é o tensor métrico riemanniano [13] e

$$\|\mathbf{v}\|_{\tilde{A}_0^{-1}} = \mathbf{v}^T \tilde{A}_0^{-1} \mathbf{v}.$$

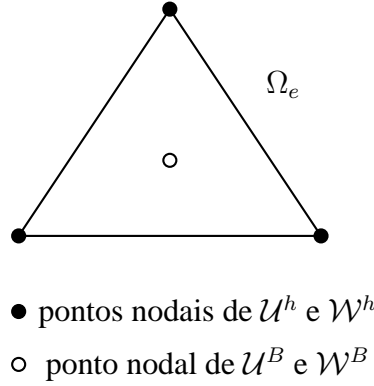


Figura 1. Representação dos espaços  $\mathcal{U}^E$  e  $\mathcal{W}^E$ .

A função bolha escalar utilizada em cada elemento  $\Omega_e$  é definida por

$$b^e(x, y) = 27 N_1(x, y) N_2(x, y) N_3(x, y), \quad (10)$$

onde  $N_i(x, y)$  representa a função de forma local do método de Galerkin associada ao ponto nodal  $i = 1, 2, 3$ . Para acelerar a convergência do processo iterativo, o cálculo de (9) no passo de tempo  $n + 1$  é determinado conforme em [12], isto é,

$$\xi_h^{n+1} = \frac{1}{2} (\xi_h^{n+1} + \xi_h^n).$$

A Eq. (8) pode ser particionada em duas outras equações, uma associada às escalas resolvidas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \\ & \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \end{aligned} \quad (11)$$

e a outra associada às escalas submalhas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^B \in \mathcal{W}^B. \end{aligned} \quad (12)$$

Em (11) e (12), os termos

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega$$

provenientes da formulação Difusão Dinâmica e o termo convectivo associada à micro escala

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \left( \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad (13)$$

foram omitidos, por serem nulos. As equações (11) e (12) são fortemente acopladas, dificultando o processo de condensação estática para eliminar a variável  $\mathbf{U}^B$  [14, 16]. Uma forma de simplificar a equação submalha, Eq. (12), é assumir a hipótese de escalas submalhas *quase-estáticas* [4, 8, 16], isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} \approx 0. \quad (14)$$

Essa abordagem foi utilizada por Werner [14] no método Difusão Dinâmica aplicado à problemas de escoamento miscível em meios porosos. Trabalhos recentes considerando escalas submalhas *transientes* (ou dinâmicas) são apresentados em [5, 6, 9]. Nos testes preliminares realizados considerando a hipótese (14) para as equações de Euler, o método Difusão Dinâmica não apresentou resultados satisfatórios. Neste trabalho, é apresentado um esquema numérico para resolver (11)-(12) considerando que as escalas submalhas sejam transientes.

As equações (11) e (12) resultam em um sistema local de equações diferenciais ordinárias fortemente acoplado da forma

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & M_{hB} \\ M_{Bh} & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_h \\ \dot{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hB} \\ K_{Bh} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_h \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_h \\ 0_B \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde

- $\mathbf{U}_h$  e  $\mathbf{U}_B$  são os vetores que representam as soluções  $\mathbf{U}_h$  e  $\mathbf{U}_B$  nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento  $\Omega_e$ . Analogamente,  $\dot{\mathbf{U}}_h$  e  $\dot{\mathbf{U}}_B$  são vetores que representam  $\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \mathbf{U}_B}{\partial t}$  nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento  $\Omega_e$ ;
- $M_{hh}$ ,  $M_{hB}$ ,  $M_{Bh}$  e  $M_{BB}$  são matrizes locais de massa associadas, respectivamente, aos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega;$$

- $K_{hh}$  é a matriz local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \left( \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega$$

- $K_{hB}$  e  $K_{Bh}$  são matrizes locais de rigidez associadas aos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \left( \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \left( \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega,$$

respectivamente;

- $K_{BB}$  é a matriz local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \left( \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega.$$

O sistema (15) resulta em duas equações:

$$M_{hh} \dot{\mathbf{U}}_h + M_{hB} \dot{\mathbf{U}}_B + K_{hh} \mathbf{U}_h + K_{hB} \mathbf{U}_B = 0_h \quad (16)$$

e

$$M_{Bh} \dot{\mathbf{U}}_h + M_{BB} \dot{\mathbf{U}}_B + K_{Bh} \mathbf{U}_h + K_{BB} \mathbf{U}_B = 0_B. \quad (17)$$

Considerando uma aproximação por diferenças finitas de primeira ordem para a derivada temporal na escala submalha, no passo de tempo  $n + 1$ ,

$$\dot{\mathbf{U}}_B^{n+1} \cong \frac{\mathbf{U}_B^{n+1} - \mathbf{U}_B^n}{\Delta t}, \quad (18)$$

onde  $\Delta t > 0$  é o passo no tempo e substituindo este resultado na Eq. (17), associada à micro escala, obtemos

$$\mathbf{U}_B^{n+1} = (M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} \left[ M_{BB} \mathbf{U}_B^n - \Delta t \left( M_{Bh} \dot{\mathbf{U}}_h^{n+1} + K_{Bh} \mathbf{U}_h^{n+1} \right) \right], \quad (19)$$

onde  $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$  é uma matriz local  $4 \times 4$  inversível (ver Lema 3.1).

**Lema 3.1.** *A matriz local  $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$  é inversível.*

*Demonstração.* De fato,

$$M_{BB} = \left( \frac{81A^e}{280} \right) I_4 \quad \text{e} \quad K_{BB} = \beta I_4,$$

onde  $I_4$  é a matriz identidade de ordem 4 e

$$\beta = \begin{cases} \frac{81\xi_h}{40A^e} \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) \right] > 0, & \text{se } \xi_h > 0; \\ 0, & \text{se } \xi_h = 0, \end{cases}$$

sendo  $x_i$  e  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  as coordenadas espaciais dos pontos nodais do elemento  $\Omega_e$ . Portanto,

$$\det(M_{BB} + \Delta t K_{BB}) = \left( \frac{81A^e}{280} + \Delta t \beta \right)^4 \neq 0$$

e  $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$  é inversível. ■

Usando (18) e (19) em (16), obtemos o sistema

$$\widehat{M} \dot{\mathbf{U}}_h^{n+1} + \widehat{K} \mathbf{U}_h^{n+1} = \widehat{N} \mathbf{U}_h^n, \quad (20)$$

onde

$$\begin{aligned}\widehat{M} &= \left[ M_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{Bh} \right]; \\ \widehat{K} &= \left[ K_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} K_{Bh} \right]; \\ \widehat{N} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ M_{hB} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{BB} \right].\end{aligned}$$

Através da Equação (20) obtemos  $U_h^{n+1}$  e  $\dot{U}_h^{n+1}$ . O vetor  $U_B^{n+1}$  é atualizado usando (19). O problema global associado é resolvido usando o algoritmo preditor multicorretor, apresentado em [7]. Os sistemas lineares são resolvidos utilizando o método GMRES com um pré-condicionador bloco diagonal nodal [3].

#### 4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os experimentos numéricos considerando três exemplos padrão de escoamentos regidos pela equação de Euler: Choque Normal Unidimensional, Choque Oblíquo Bidimensional e Choque Refletido Bidimensional. Os resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas e com as soluções obtidas pela formulação SUPG/CAU. Em todos os exemplos são considerados gases compressíveis com expoente adiabático ( $\gamma = 1.4$  e  $c_v = 716.5$ ). No algoritmo de avanço no tempo o número de multicorreções foi fixado em 3, o número de vetores para o *restart* do método GMRES adotado é igual a 5 e a tolerância fixada em  $10^{-1}$ .

##### 4.1. Choque Normal Unidimensional

Este problema consiste de um escoamento através de duas regiões separadas por um choque normal. A velocidade inicial do escoamento apresenta uma descontinuidade, que é propagada para o domínio temporal. Considera-se uma malha com  $39 \times 2$  células, sendo 2 elementos triangulares em cada célula, distribuídos no domínio retangular  $\Omega = ]0, 39[ \times ] -0.5, 0.5[$  conforme a Fig. (2). O choque ocorre em  $x = 20$  e as condições iniciais, em um sistema de unidades compatível, são dadas por

$$x < 20 \quad \begin{cases} M = 2.0; \\ \rho = 1.0; \\ v_x = 1.0; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.17857, \end{cases} \quad x > 20 \quad \begin{cases} M = 0.57735; \\ \rho = 2.66667; \\ v_x = 0.37500; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.80357, \end{cases}$$

onde  $M$  é o número de Mach e  $p$  é a pressão.

A Fig. 3(a) mostra os perfis de densidade da solução exata e das soluções numéricas obtidas pelos métodos Difusão Dinâmica e SUPG/CAU. Considerando  $\Delta t = 10^{-2}$  nas duas formulações, observa-se que a solução obtida via Difusão Dinâmica está mais próxima da solução exata do que a obtida pela formulação SUPG/CAU. As Figs. 3(b) e 3(c) mostram, respectivamente, o comportamento dos resíduos das formulações analisadas. Ambos decaem

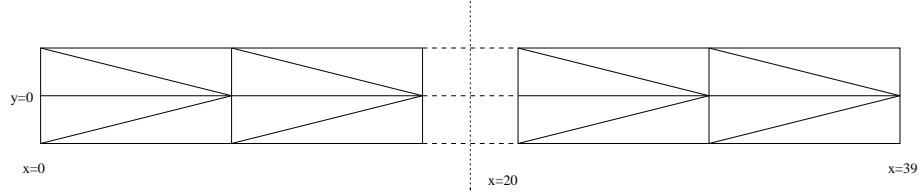


Figura 2. Formato da Malha – Choque Normal Unidimensional.

à medida que o tempo avança, porém, a magnitude do resíduo do método SUPG/CAU é maior do que a do método Difusão Dinâmica.

A Tabela 1 apresenta o desempenho computacional das implementações realizadas. O método Difusão Dinâmica realizou 1174 iterações GMRES a menos do que o método SUPG/CAU. Entretanto, na montagem das matrizes, onde se encontra o maior esforço computacional, o tempo obtido pelo método Difusão Dinâmica é um pouco mais elevado.

Tabela 1. Desempenho Computacional – Choque Normal Unidimensional.

<i>Método</i>	<i>Iter<sub>GMRES</sub></i>	<i>Tempo<sub>CPU</sub> (s)</i>		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	2199	23.996	0.986	26.821
Difusão Dinâmica	1025	28.066	0.669	30.569

#### 4.2. Choque Oblíquo Bidimensional

Este problema consiste em um escoamento bidimensional supersônico – número de Mach  $M = 2$  – de um fluido invíscido sobre uma cunha, fazendo um ângulo de  $-10^\circ$  em relação à malha, conforme mostrado na Fig. 4. Pode-se determinar analiticamente a formação de um choque oblíquo a  $29.3^\circ$  com a parede. O domínio  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  considerado é discretizado em  $20 \times 20$  células com dois elementos triangulares em cada célula. Considerando um sistema de unidades compatível, as condições de contorno prescritas na entrada e no topo de  $\Omega$  são dadas por

$$\begin{cases} M = 2.0; \\ \rho = 1.0; \\ v_x = \cos 10^\circ; \\ v_y = -\sin 10^\circ; \\ p = 0.17857. \end{cases}$$

Além disso, a velocidade  $v_y$  é nula na parede inferior, não sendo imposta nenhuma condição na saída. As condições iniciais são consideradas como de escoamento livre. A solução exata na saída abaixo do choque é dada por

$$\begin{cases} M = 1.64052; \\ \rho = 1.45843; \\ v_x = 0.88731; \\ v_y = 0; \\ p = 0.30475. \end{cases}$$



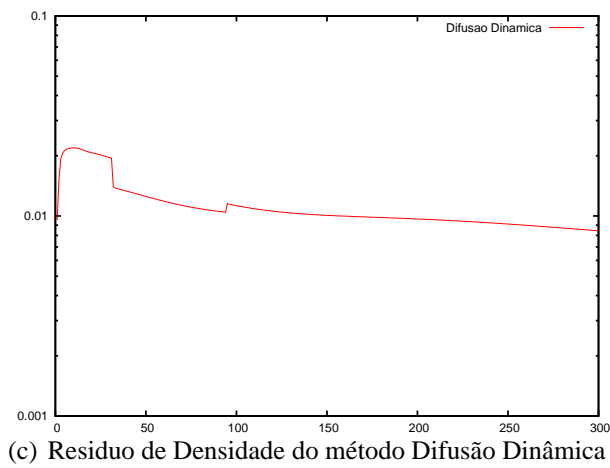
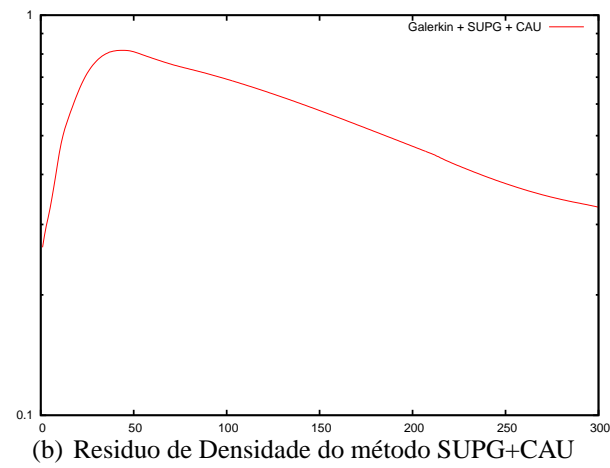
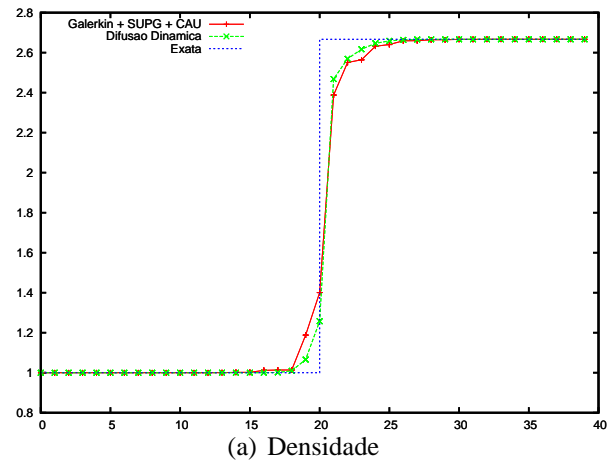


Figura 3. Perfis e Resíduos de Densidade das formulações numéricas – Choque Normal Unidimensional

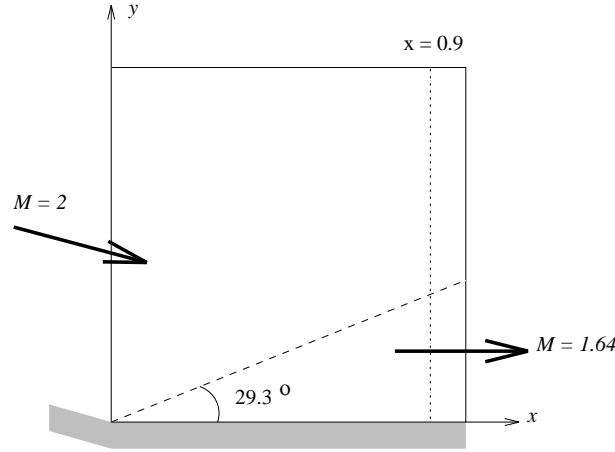


Figura 4. Esquema do Problema - Choque Bidimensional Oblíquo.

A Fig. 5 apresenta as isocurvas da densidade para as formulações SUPG/CAU e Difusão Dinâmica, usando uma malha  $20 \times 20$ . Observa-se que o método Difusão Dinâmica apresenta uma solução menos difusiva na região do choque. A Fig. 6 mostra os perfis de densidade no ponto  $x = 0.9$  para ambas formulações, considerando três malhas ( $10 \times 10$ ,  $16 \times 16$  e  $20 \times 20$ ) com respectivos passos de tempo. As soluções obtidas com o método Difusão Dinâmica representam melhor o choque do que àquelas obtidas pelo método SUPG/CAU, que possui um comportamento mais difusivo.

A dependência do método Difusão Dinâmica em relação ao parâmetro  $\Delta t$  é mostrada na Fig. 7, usando uma malha  $20 \times 20$ . Note que a solução aproximada oscila na região do choque quando  $\Delta t = 10^{-2}$ . Para  $\Delta t = 10^{-3}$  ou  $\Delta t = 10^{-4}$ , o comportamento da solução é praticamente o mesmo, apresentando apenas uma pequena oscilação na parte inferior do choque. A melhor solução é obtida quando  $\Delta t = 10^{-5}$ .

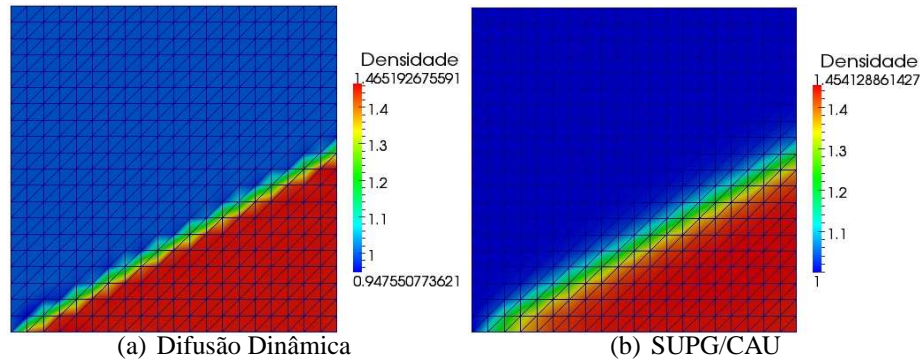
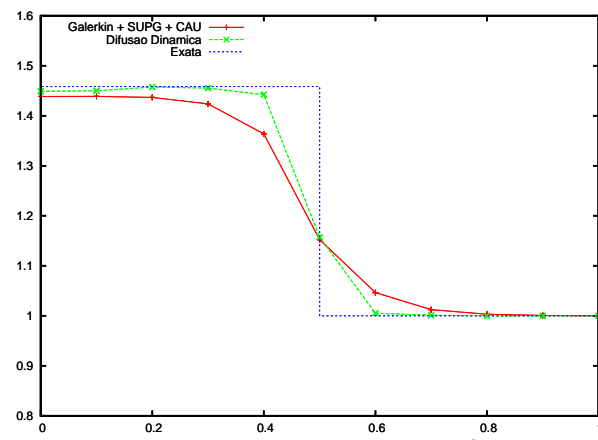


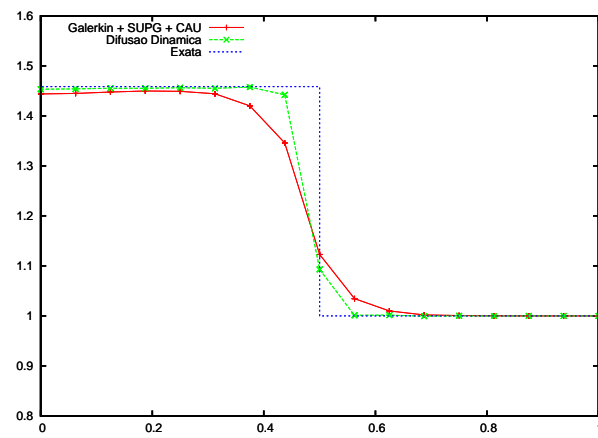
Figura 5. Isocurvas de Densidade – malha  $20 \times 20$  – Choque Oblíquo Bidimensional.

A Fig. 8 mostra que o resíduo das duas metodologias avaliadas decaem com o tempo. Mais uma vez, a magnitude do resíduo do método SUPG/CAU é maior do que a do método Difusão Dinâmica.

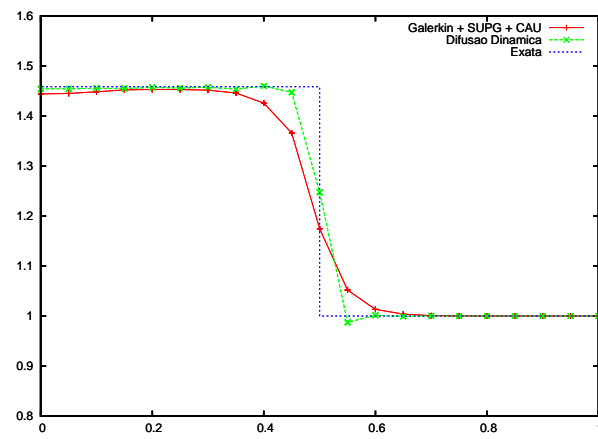
O tempo de processamento e o número de iterações dos métodos analisados são mostrados na Tabela 2. Na resolução dos sistemas lineares, o método Difusão Dinâmica executou menos de um terço do número de iterações GMRES obtido pelo método



(a) Malha  $10 \times 10$  e  $\Delta t = 10^{-2}$



(b) Malha  $16 \times 16$  e  $\Delta t = 10^{-3}$



(c) Malha  $20 \times 20$  e  $\Delta t = 10^{-3}$

Figura 6. Perfis de Densidade – Choque Oblíquo Bidimensional

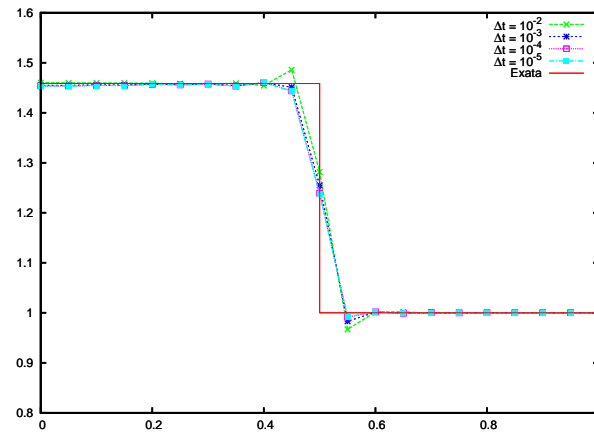


Figura 7. Perfis de Densidade – Método Difusão Dinâmica – malha  $20 \times 20$  – Choque Oblíquo Bidimensional.

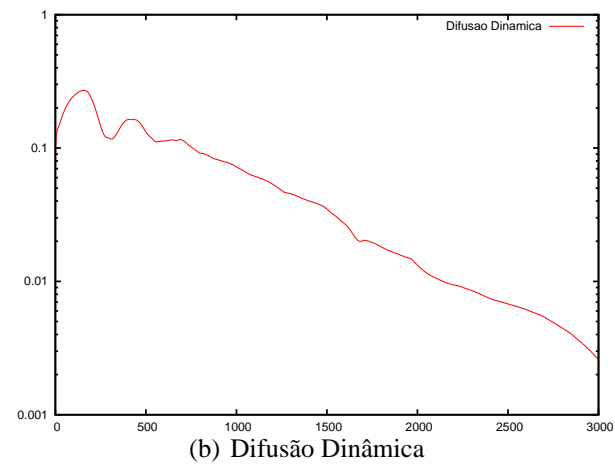
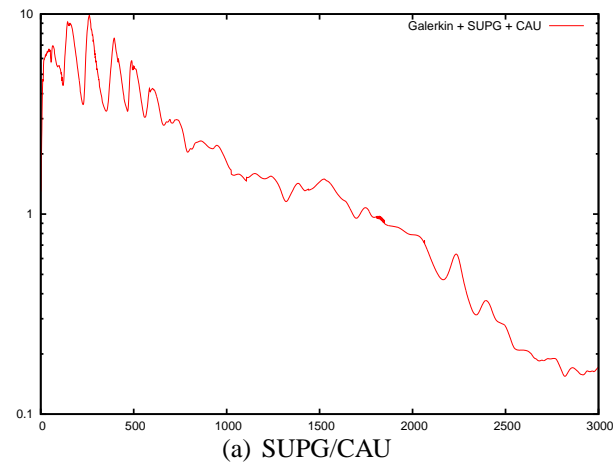


Figura 8. Resíduo de Densidade - malha  $20 \times 20$  e  $\Delta t = 10^{-3}$  - Choque Oblíquo Bidimensional

SUPG/CAU. No entanto, o maior esforço computacional do método Difusão Dinâmica encontra-se na estrutura utilizada para montagem das matrizes, tornando o tempo total de processamento deste método maior em relação ao tempo obtido pelo SUPG/CAU.

Tabela 2. Desempenho Computacional – malha  $20 \times 20$  – Choque Oblíquo Bidimensional.

Método	$Iter_{GMRES}$	$Tempo_{CPU} (s)$		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	30389	1161.509	64.252	1268.125
Difusão Dinâmica	9006	1383.513	29.948	1456.456

### 4.3. Choque Refletido Bidimensional

Este problema consiste de três regiões de escoamento separadas por um choque oblíquo e sua reflexão ao longo de uma parede, conforme Fig. 9. O domínio  $\Omega = ]0, 4.1[ \times ]0, 1[$  é particionado em  $60 \times 20$  células com 2 elementos triangulares em cada célula. Condições de contorno de Dirichlet são prescritas no contorno de entrada e no topo de  $\Omega$ . Não são impostas condições de contorno na fronteira à direita do domínio. Na fronteira inferior, a componente horizontal do campo de velocidades é prescrita com valor nulo, ou seja,  $v_x = 0$ . As condições iniciais são de escoamento livre. Considerando um sistema de unidades compatível, os dados na entrada do domínio (parede à esquerda - região 1) são

$$\text{Região 1: } \begin{cases} M = 2.9; \\ \rho = 1.0; \\ v_x = 2.9; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.714286. \end{cases}$$

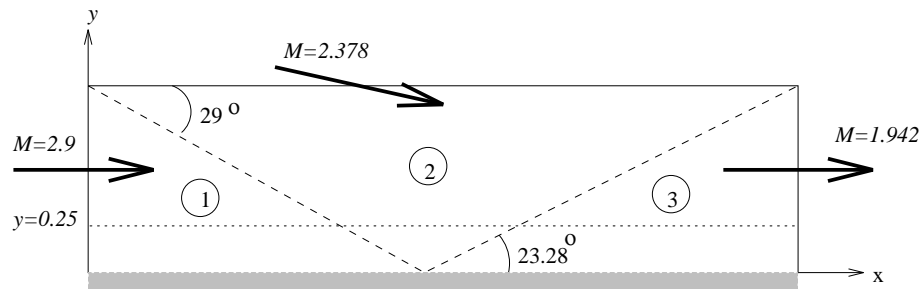


Figura 9. Esquema do Problema - Choque Refletido Bidimensional.

Considerando que a incidência do choque faz um ângulo de  $29^\circ$ , a solução exata nas regiões 2 e 3 são dadas por

$$\text{Região 2: } \begin{cases} M = 2.3781; \\ \rho = 1.7; \\ v_x = 2.61934; \\ v_y = 0.50632; \\ p = 1.52819 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Região 3: } \begin{cases} M = 1.94235; \\ \rho = 2.68728; \\ v_x = 2.40140; \\ v_y = 0.0; \\ p = 2.93407. \end{cases}$$

A Fig. 10 apresenta as isocurvas de densidade, considerando uma malha  $60 \times 20$ . Observa-se que a solução obtida pelo método Difusão Dinâmica é mais precisa do que àquela obtida pelo método SUPG/CAU. A Fig. 11(a) exibe os perfis de densidade para as duas formulações avaliadas, usando uma malha  $60 \times 20$  e  $\Delta t = 10^{-3}$ . Podemos observar que as soluções obtidas pelo método Difusão Dinâmica representam melhor os choques. A Fig. 11(b) mostra a dependência do método Difusão Dinâmica em relação ao tamanho do passo de tempo  $\Delta t$ . Quando  $\Delta t = 10^{-2}$ , pequenas oscilações aparecem nas regiões dos choques. Soluções melhores são obtidas quando  $\Delta t = 10^{-3}$  ou  $\Delta t = 10^{-4}$ .

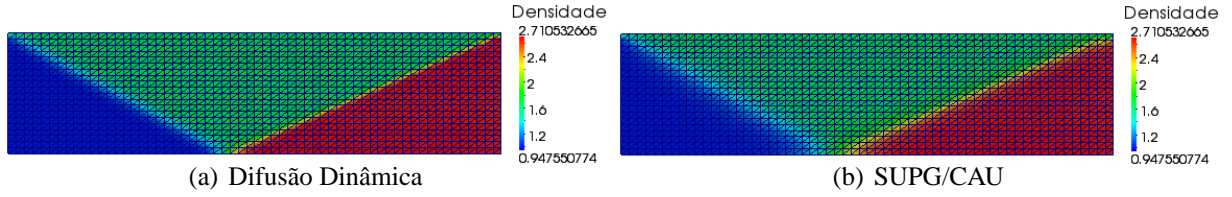


Figura 10. Isocurvas de Densidade – malha  $60 \times 20$  – Choque Refletido Bidimensional.

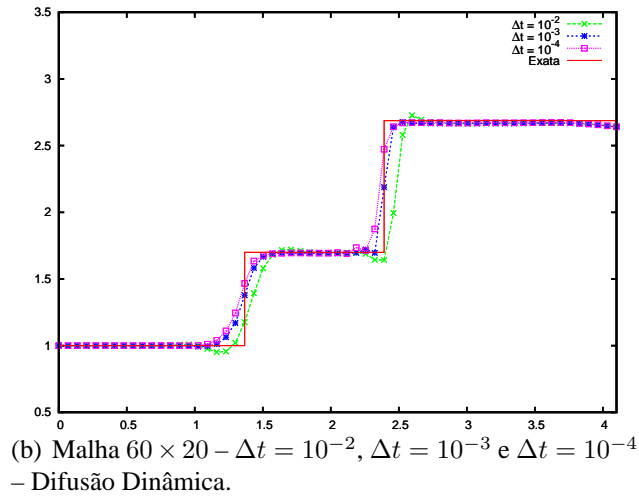
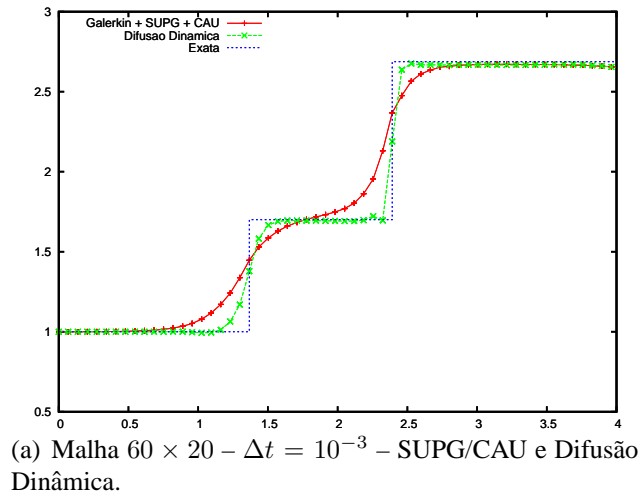


Figura 11. Perfis de Densidade – Choque Refletido Bidimensional

O comportamento dos resíduos é mostrado na Figura 12. Podemos observar que eles decaem com o tempo, diferenciando somente na magnitude dos mesmos. A Tabela 3

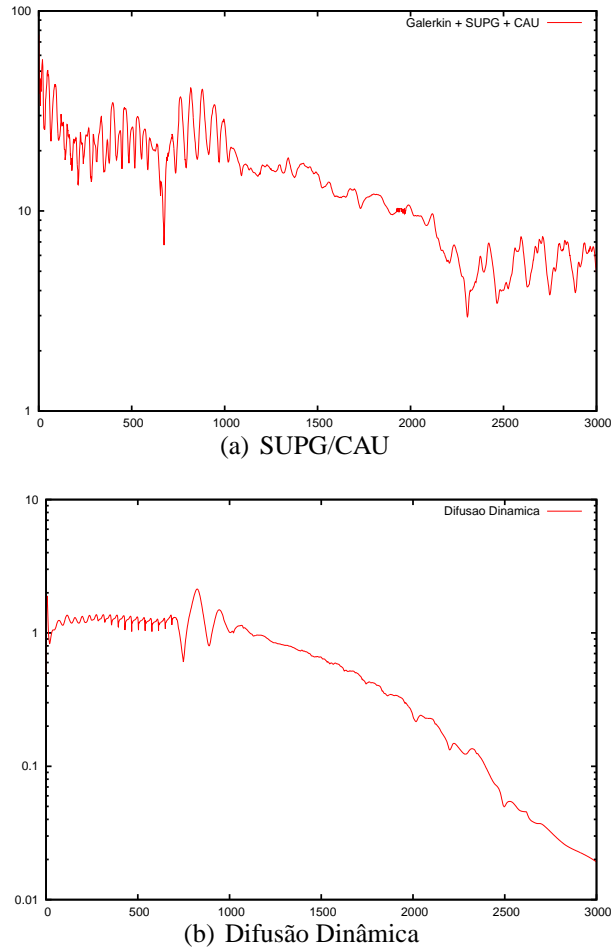


Figura 12. Resíduo de Densidade – malha  $60 \times 20$  e  $\Delta t = 10^{-3}$  – Choque Refletido Bidimensional.

mostra que o método SUPG/CAU executou quase quatro vezes mais iterações GMRES, nas soluções dos sistemas lineares, do que o método Difusão Dinâmica. Mas devido o custo computacional necessário na montagem das matrizes, o método Difusão Dinâmica obteve maior tempo computacional total.

Tabela 3. Desempenho Computacional – malha  $60 \times 20$  – Choque Refletido Bidimensional.

Método	$Iter_{GMRES}$	$Tempo_{CPU} (s)$		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	34869	3852.336	223.332	4173.264
Difusão Dinâmica	9006	4408.701	91.422	4593.458

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma implementação do método de elementos finitos para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis utilizando a formulação estabilizada submalha Difusão Dinâmica, considerando que as escalas submalhas sejam transientes. Para a integração no tempo foi utilizado um método preditor multicorretor de segunda ordem e os sistemas lineares resultantes em cada correção foram resolvidos pelo método iterativo GMRES, com um pré-condicionador bloco diagonal nodal.

Um conjunto de experimentos, incluindo choques normal, oblíquo e reflexivo, foi considerado e as soluções obtidas pelo método Difusão Dinâmica com escalas submalhas transientes foram comparadas com a solução exata e a solução obtida pela formulação estabilizada SUPG/CAU. O método Difusão Dinâmica obteve resultados mais precisos e com menor número de iterações GMRES, comparado com o SUPG/CAU. No entanto, para os três problemas testados, o tempo total de processamento obtido pelo método SUPG/CAU foi menor, devido ao esforço computacional utilizado na montagem das matrizes do método Difusão Dinâmica. Foi observado também um comportamento condicionalmente estável do método Difusão Dinâmica para os choques oblíquo e reflexivo.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Regina C. Almeida - LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica) pelas valiosas discussões e ao apoio recebido dentro do escopo dos projetos: PRONEX-FAPES/CNPq 48511579/2009, CNPq 309172/2009-8 e CNPq 552630/2011-0.

## Referências

- [1] R. C. Almeida and A. C. Galeão. An adaptive Petrov-Galerkin formulations for the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:157–176, 1996.
- [2] N. C. B. Arruda, R. C. Almeida, and E. G. D. do Carmo. Dynamic viscosity formulations for advection dominated transport problems. in preparation for *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010.
- [3] L. Catabriga and A.L.G.A Coutinho. Implicit SUPG solution of Euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(32):3477–3490, 2002.
- [4] R. Codina and J. Blasco. Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. *Computing and Visualization in Science*, 4:167–174, 2002.
- [5] R. Codina, J. Principe, O. Guasch, and S. Badia. Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2413–2430, 2007.



- [6] P. Gamnitzer, V. Gravemeier, and W. A. Wall. Time-dependent subgrid scales in residual-based large eddy simulation of turbulent channel flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:819–827, 2010.
- [7] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45:217–284, 1984.
- [8] R. Juanes. *Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media*. Phd thesis, Engineering - Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2003.
- [9] V. Nassehi and M. Parvazinia. A multiscale finite element space-time discretization method for transient transport phenomena using bubble functions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45:315–323, 2009.
- [10] Y. Saad and H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM. J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- [11] I. P. Santos. *Nonlinear Subgrid Methods for Convection-Diffusion-Reaction Problem*. Phd thesis (in portuguese), Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCT, 2007.
- [12] I. P. Santos and R. C. Almeida. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4771–4778, 2007.
- [13] F. Shakib. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Stanford University, Palo Alto, California, USA, 1988.
- [14] S. L. Werner. Método de estabilização submalha difusão dinâmica aplicado na simulação de escoamentos miscíveis em meios porosos. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Informática/UFES, Vitória, ES, Fevereiro 2011.
- [15] S. L. Werner, L. Catabriga, and I. P. Santos. Método de estabilização submalha difusão dinâmica aplicado na simulação de escoamento miscível. In *XXXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Buenos Aires, Argentina, 2010.
- [16] C. Yang and J. Samper. A subgrid-scale stabilized finite element method for multicomponent reactive transport through porous media. *Transp Porous Media*, 78:101–126, 2009.