

EXPLICIT STIFFNESS MATRIX FOR PARABOLIC PRISMATIC TRIANGULAR ELEMENT

**Marcelo R. de Matos Pedreiro^a, Rogério de O. Rodrigues^b, Maicon Marino Albertini^c
e Jefferson S. Camacho^b**

^a *Universidade Camilo Castelo Branco, Campus VII, Estrada Projetada F1, s/n, Fazenda Santa Rita, 15600-000, Fernandópolis, SP, Brasil, marcelo.pedreiro@bol.com.br
<http://www.unicastelo.br>*

^b *Núcleo de Ensino e Pesquisa de Alvenaria Estrutural, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Avenida Brasil Centro, 56, Ilha Solteira, SP, Brasil,
nepae@dec.feis.unesp
<http://www.feis.unesp.br>*

^c *Universidade Camilo Castelo Branco, Campus VII, Estrada Projetada F1, s/n, Fazenda Santa Rita, 15600-000, Fernandópolis, SP, Brasil, maicon.albertini@unicastelo.br
<http://www.unicastelo.br>*

Keywords: Structural Mechanics, Finite Element Method, Volumetric Element.

Resumo. *O presente trabalho tem como objetivo principal explicitar a matriz de rigidez para o elemento finito prismático triangular parabólico (Wedge-15 / W15), contendo quinze nós onde se consideram como graus de liberdade somente as translações em cada uma das três direções do espaço. Para facilitar a integração analítica, o elemento foi tratado com um mapeamento isoparamétrico com domínio em coordenadas naturais, cujas funções aproximadoras contêm quinze monômios extraídos do polinômio algébrico quadrático completo em x , y e z . Ao longo da dedução analítica se faz necessário mudar o domínio e os limites de integração através da transformação de coordenadas utilizando-se a matriz Jacobiana. Compete também a este trabalho explicitar as matrizes de forças nodais equivalentes para aplicação de carregamentos superficiais no elemento. A validação da matriz de rigidez explícita é feita através de exemplos onde sejam aplicáveis as equações provenientes da teoria de Resistência dos Materiais, sendo os resultados observados comparados com os obtidos utilizando-se modelos discretizados com o elemento desenvolvido, aplicando-se diferentes formas de discretização e carregamento. A obtenção de tal matriz permitirá a análise estática ou dinâmica de sistemas estruturais em geral, seja linear ou não-linear, de forma mais eficiente quando comparada com a utilização de matriz obtida numericamente.*

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos - MEF foi idealizado com os trabalhos de Argyris e Kelsey (1954, apud RODRIGUES 1997, p.1 [5]) e de Turner et al (1956, apud RODRIGUES 1997, p.1 [5]). Com isso os pesquisadores passaram a ter uma ferramenta poderosa que permite a modelagem numérica dos fenômenos envolvidos na análise estrutural. O MEF baseia-se na discretização do sistema estrutural, onde seus componentes são divididos em pequenas regiões, chamadas de elementos finitos, sendo essas interconectadas entre si por meio de nós para formar o conjunto estrutural, conforme visto em [6]. O processo de discretização é a base do conceito MEF garantindo uma melhor convergência dos resultados para a resposta real do modelo.

Nesse contexto, a utilização de elementos finitos volumétricos permite uma análise mais precisa do comportamento de estruturas diversas, como exemplo alvenaria estrutural conforme visto em [1], desprezando as hipóteses das teorias simplificadoras que são necessárias para uma discretização com elementos finitos lineares e laminares.

2. ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO TRIANGULAR PARABÓLICO

O elemento finito prismático triangular parabólico de quinze nós, denominado Wedge 15 – W15, ilustrado na Figura 1, apresenta variação quadrática de deslocamentos ao longo de suas arestas, sendo que para cada nó são consideradas as três translações como graus de liberdade.

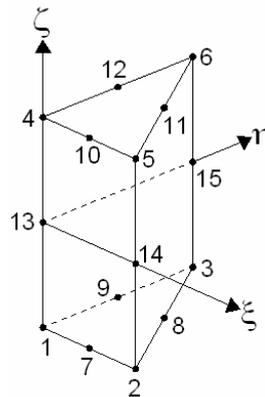


Figura 1 – Elemento finito W15 com quinze nós. Fonte: Pedreiro (2011)

A formulação do elemento é feita utilizando-se coordenadas homogêneas, o que torna a solução do problema mais simples, uma vez que os polinômios aproximadores ficam em função de coordenadas adimensionais. A definição das coordenadas homogêneas para o domínio triangular do elemento são apresentadas na íntegra no trabalho de PEDREIRO (2011) [4], aonde se chega à relação geral dada pela equação (1).

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + m_i x + n_i y) \quad (1)$$

As funções aproximadoras desse elemento contêm quinze monômios extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em x, y e z. Nesse caso, para garantir a continuidade com os deslocamentos dos elementos adjacentes, a função deslocamento deve variar parabolicamente ao longo dos lados. Sendo assim, para um sistema de coordenadas adimensionais, com origem no centro do lado 1-4 do pentaedro, e usando-se a relação encontrada na equação (1), pode-se escrever com base na Figura 1 que:

$$\xi = \xi_2 \quad \text{e} \quad \eta = \xi_3 \quad (2)$$

e aplicando-se ao elemento em questão, pode-se escrever que:

$$\xi = \frac{1}{2A}(a_2 + m_2x + n_2y) ; \quad \eta = \frac{1}{2A}(a_3 + m_3x + n_3y) \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{z}{c} \quad (3)$$

As funções interpoladoras para os deslocamentos u, v e w, são dadas pelas equações (4), (5) e (6), respectivamente, todos extraídos da pirâmide de Pascal, conforme visto em [2].

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta + \alpha_4\eta\xi + \alpha_5\xi\zeta + \alpha_6\xi\eta + \alpha_7\xi^2 + \alpha_8\eta^2 + \alpha_9\zeta^2 + \alpha_{10}\eta\zeta^2 + \alpha_{11}\eta^2\zeta + \alpha_{12}\xi^2\zeta + \alpha_{13}\xi\zeta^2 + \alpha_{14}\xi\eta\zeta \quad (4)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta + \beta_4\eta\xi + \beta_5\xi\zeta + \beta_6\xi\eta + \beta_7\xi^2 + \beta_8\eta^2 + \beta_9\zeta^2 + \beta_{10}\eta\zeta^2 + \beta_{11}\eta^2\zeta + \beta_{12}\xi^2\zeta + \beta_{13}\xi\zeta^2 + \beta_{14}\xi\eta\zeta \quad (5)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta + \gamma_4\eta\xi + \gamma_5\xi\zeta + \gamma_6\xi\eta + \gamma_7\xi^2 + \gamma_8\eta^2 + \gamma_9\zeta^2 + \gamma_{10}\eta\zeta^2 + \gamma_{11}\eta^2\zeta + \gamma_{12}\xi^2\zeta + \gamma_{13}\xi\zeta^2 + \gamma_{14}\xi\eta\zeta \quad (6)$$

Na forma matricial, estas equações são dadas por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{\alpha} \quad (7)$$

sendo:

$$\underset{\sim}{u} = \{u \quad v \quad w\} \quad (8)$$

$$\underset{\sim}{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_I & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\varphi_I = \left[1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \eta\xi \quad \xi\xi \quad \xi\eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \quad \eta\xi^2 \quad \eta^2\xi \quad \xi^2\xi \quad \xi\xi^2 \quad \xi\eta\xi \right] \quad (10)$$

$$\alpha^T = \{ \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14} \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{13} \quad \beta_{14} \quad \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{14} \} \quad (11)$$

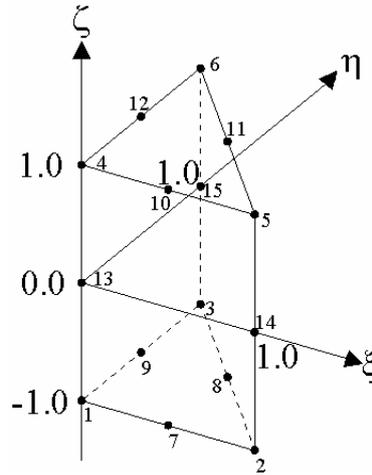


Figura 2 - Valores para as coordenadas nodais – W15. Fonte: Pedreiro (2011)

Particularizando-se para os valores das coordenadas em cada nó na matriz φ , de acordo com a Figura 2, tem-se para o Nó 1 ($\xi = 0; \eta = 0; \zeta = -1$), portanto:

$$\varphi_I = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (12)$$

De maneira análoga os vetores φ podem ser montados para todos os nós do elemento, conforme demonstrado em PEDREIRO (2011) [4].

Considerando-se conjuntamente os quinze nós do elemento, obtém-se a matriz de coordenadas nodais do elemento apresentada pela equação (13), sendo:

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} \quad (13)$$

onde $\underline{\underline{d}}$ é dada por:

$$\underline{\underline{d}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_{i+1} \quad v_{i+1} \quad w_{i+1} \quad \dots \quad u_{15} \quad v_{15} \quad w_{15}] \quad (14)$$

sendo $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}}^T = \left[\begin{array}{cccccccc} \varphi_{NÓ01} & \varphi_{NÓ02} & \varphi_{NÓ03} & \varphi_{NÓ04} & \varphi_{NÓ05} & \varphi_{NÓ06} & \varphi_{NÓ07} & \varphi_{NÓ08} \dots \\ \dots & \varphi_{NÓ09} & \varphi_{NÓ10} & \varphi_{NÓ11} & \varphi_{NÓ12} & \varphi_{NÓ13} & \varphi_{NÓ14} & \varphi_{NÓ15} \end{array} \right] \quad (15)$$

Da equação (13) obtém-se a matriz $\underline{\underline{\alpha}}$, em função da matriz dos deslocamentos $\underline{\underline{d}}$, como mostra a equação (16).

$$\underline{\alpha} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{d} \quad (16)$$

Generalizando-se os deslocamentos em função das coordenadas da estrutura, os deslocamentos \underline{u} do elemento finito podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais \underline{d} , por meio da utilização de funções de forma apropriadas, conforme relação definida pela equação (17).

$$\underline{u} = \underline{\phi} \cdot \underline{d} \quad (17)$$

Substituindo-se a equação (16) na (7) e comparando-se com a equação (17) obtém-se a matriz das funções de forma $\underline{\phi}$ para o elemento finito W15 com quinze nós, que é dada pela equação (18).

$$\underline{\phi} = \underline{\varphi} \cdot \underline{A}^{-1} \quad (18)$$

Explicitamente, a matriz $\underline{\phi}$ é dada pela equação (19).

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{i+1} & 0 & 0 & \dots & N_{15} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{i+1} & 0 & \dots & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{i+1} & \dots & 0 & 0 & N_{15} \end{bmatrix} \quad (19)$$

As funções de forma (N_i) são apresentadas em um sistema de coordenadas naturais dadas pelas equações de (20) a (34).

$$N_1 = -\frac{(1-\xi-\eta)(1-\zeta)(2\xi+2\eta+\zeta)}{2} \quad (20)$$

$$N_2 = \frac{\xi(1-\zeta)(2\xi-\zeta-2)}{2} \quad (21)$$

$$N_3 = \frac{\eta(1-\zeta)(2\eta-\zeta-2)}{2} \quad (22)$$

$$N_4 = -\frac{(1-\xi-\eta)(1+\zeta)(2\xi+2\eta-\zeta)}{2} \quad (23)$$

$$N_5 = \frac{\xi(1+\zeta)(2\xi+\zeta-2)}{2} \quad (24)$$

$$N_6 = \frac{\eta(1+\zeta)(2\eta+\zeta-2)}{2} \quad (25)$$

$$N_7 = 2\xi(1-\xi-\eta)(1-\zeta) \quad (26)$$

$$N_8 = 2\xi\eta(1-\zeta) \quad (27)$$

$$N_9 = 2\eta(1-\xi-\eta)(1-\zeta) \quad (28)$$

$$N_{10} = 2\xi(1-\xi-\eta)(1+\zeta) \quad (29)$$

$$N_{11} = 2\xi\eta(1+\zeta) \quad (30)$$

$$N_{12} = 2\eta(1-\xi-\eta)(1+\zeta) \quad (31)$$

$$N_{13} = (1-\xi-\eta)(1-\zeta^2) \quad (32)$$

$$N_{14} = \xi(1-\zeta^2) \quad (33)$$

$$N_{15} = \eta(1-\zeta^2) \quad (34)$$

A matriz de rigidez de um elemento finito qualquer pode ser deduzida pela equação (35):

$$\underset{\sim}{k}_S = \int_{V_e} \left(\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \right) dV_e \quad (35)$$

onde para elementos sólidos tridimensionais com comportamento elástico linear tem-se:

$$\tilde{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Como a dedução do elemento é feita com a utilização de coordenadas naturais, é necessário mudar o domínio e os limites de integração. Isso é feito através da matriz Jacobiana \tilde{J} de transformação de coordenadas, que relaciona um elemento infinitesimal do domínio real a um elemento infinitesimal no domínio de coordenadas naturais. A matriz dada pela equação (37) num mapeamento isoparamétrico é chamada de matriz Jacobiana e seu determinante é chamado de Jacobiano, conforme visto em [3].

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial \xi} x^e & \frac{\partial N^e}{\partial \eta} x^e & \frac{\partial N^e}{\partial \zeta} x^e \\ \frac{\partial N^e}{\partial \xi} y^e & \frac{\partial N^e}{\partial \eta} y^e & \frac{\partial N^e}{\partial \zeta} y^e \\ \frac{\partial N^e}{\partial \xi} z^e & \frac{\partial N^e}{\partial \eta} z^e & \frac{\partial N^e}{\partial \zeta} z^e \end{bmatrix} \quad (37)$$

Assim a integral para obtenção da matriz de rigidez explícita do elemento apresentado para o domínio de coordenadas naturais fica definida por:

$$\tilde{k}_S = \int_V f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \left(\tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} \right) \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (38)$$

sendo:

$$\tilde{B} = \tilde{L} \cdot \tilde{\phi} \quad (39)$$

onde $\tilde{\phi}$ é a matriz explicitada em (19) e \tilde{L} é a matriz de operadores de derivação dada pela equação (40).

$$\tilde{L}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (40)$$

Fazendo-se as devidas substituições em (39), resulta a equação (41).

$$\tilde{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{15}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial z} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} \end{array} \right] \quad (41)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_2} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_i \ i \rightarrow 3..14} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_{15}}$

Como as funções de forma do elemento dadas em termos das coordenadas ξ, η e ζ , o problema na montagem da matriz \tilde{B} é que esta contém derivadas das funções de forma com as respectivas coordenadas x, y e z . Para obter as derivadas com relação à x, y e z na linhagem da matriz, a regra da cadeia da diferenciação parcial deve ser utilizada, sendo expressa na forma matricial pela equação (42):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (42)$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = (J^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (43)$$

onde J é a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas dada num mapeamento isoparamétrico pela equação (37).

No procedimento para obtenção da matriz Jacobiana foram montadas duas matrizes, uma denominada matriz D que contém a primeira derivada das funções de forma do elemento, dadas em termos das coordenadas ξ, η e ζ , e uma matriz t com as coordenadas nodais expressas em x, y e z , conforme mostrado pela equação (44).

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{14}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{15}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{14}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{15}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{14}}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_{15}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad t = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{15} & y_{15} & z_{15} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Com base na geometria do elemento, as posições em x e y para os nós 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6, 7 e 10, 8 e 11, 9 e 12 são coincidentes tendo variação somente na direção z , e os nós 13, 14 e 15 podem ser obtidos em função dos vértices extremos aos lados em que eles estão inseridos, sendo que a variação para esses nós se dá somente na direção de z .

Com as considerações feitas e sabendo-se que a variação do sistema de coordenadas no eixo z do elemento é definida de -1 até 1 , sendo que o valor da altura do elemento foi estabelecido como $2c$, portanto pode-se redefinir a matriz t^T conforme equação (45):

$$t^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & x_3 & \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} & \frac{x_3}{2} + \frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} & \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} & \frac{x_3}{2} + \frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 & y_3 & \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} & \frac{y_3}{2} + \frac{y_2}{2} & \frac{y_1}{2} + \frac{y_3}{2} & \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} & \frac{y_3}{2} + \frac{y_2}{2} & \frac{y_1}{2} + \frac{y_3}{2} & y_1 & y_2 & y_3 \\ -c & -c & -c & c & c & c & -c & -c & -c & c & c & c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Os termos que compõem a matriz N com a primeira derivada das funções de forma do elemento, dadas em termos das coordenadas ξ, η e ζ , as equações 46 a 48 apresentam essas derivadas para o nó 1, sendo que as derivadas para os demais nós podem ser encontradas em PEDREIRO (2011) [4].

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 2\xi + 2\eta + \frac{3\zeta}{2} - 2\zeta\xi - 2\zeta\eta - \frac{\zeta^2}{2} - 1 \quad (46)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = 2\xi + 2\eta + \frac{3\zeta}{2} - 2\zeta\xi - 2\zeta\eta - \frac{\zeta^2}{2} - 1 \quad (47)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = \frac{3\xi}{2} + \frac{3\eta}{2} + \zeta - \xi^2 - 2\xi\eta - \zeta\xi - \eta^2 - \zeta\eta - \frac{1}{2} \quad (48)$$

Realizando-se as multiplicações matriciais e fazendo-se a transposição da matriz obtida, obtém-se a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas, dada por:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 0 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (49)$$

sendo o seu determinante:

$$\text{Det } \tilde{J} = -cx_1y_3 - cx_2y_1 + cx_2y_3 + cy_1x_3 + cx_1y_2 - cx_3y_2 = 2\text{Area}.c \quad (50)$$

onde:

Area é a área de a superfície triangular do elemento finito e *c* é a metade de sua altura, sendo a inversa da equação (49) dada pela equação (51).

$$\tilde{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_2}{2\text{Area}} & \frac{m_3}{2\text{Area}} & 0 \\ \frac{n_2}{2\text{Area}} & \frac{n_3}{2\text{Area}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Realizando-se a multiplicação matricial dada pela equação (43), obtém-se as derivadas em função de *x*, *y* e *z* que compõem $\underline{\tilde{B}}$, sendo apresentadas para *NI* conforme equações 52 a 54, sendo que as demais derivadas podem ser encontradas em PEDREIRO (2011) [4].

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{(-4\xi - 4\eta - 3\zeta + 4\zeta\xi + 4\zeta\eta + \zeta^2 + 2)(m_2 + m_3)}{4\text{Area}} \quad (52)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{(-4\xi - 4\eta - 3\zeta + 4\zeta\xi + 4\zeta\eta + \zeta^2 + 2)(n_2 + n_3)}{4Area} \quad (53)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} = -\frac{(-3\xi - 3\eta - 2\zeta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\zeta\xi + 2\eta^2 + 2\zeta\eta + 1)}{2c} \quad (54)$$

Conhecendo-se os coeficientes da matriz $\underline{\underline{B}}$ é possível obter a matriz de rigidez do elemento finito W15, com base na equação (38).

$$\underline{\underline{K}}_s = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot 2 \cdot Area \cdot c \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{1,1} & \underline{\underline{K}}_{1,2} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1,17} & \underline{\underline{K}}_{1,18} \\ \underline{\underline{K}}_{2,2} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2,17} & \underline{\underline{K}}_{2,18} & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \\ sim. & & \underline{\underline{K}}_{17,17} & \underline{\underline{K}}_{17,18} & \\ & & \underline{\underline{K}}_{18,17} & \underline{\underline{K}}_{18,18} & \end{bmatrix} \quad (55)$$

O coeficiente $\underline{\underline{K}}_{1,1}$ interno a matriz (55) é apresentado pela equação (56), sendo que os demais termos da matriz de rigidez podem ser encontrados em PEDREIRO (2011) [4], conforme Anexo II.

$$\underline{\underline{K}}_{1,1} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{1}{c^2 Area^2} \cdot \begin{pmatrix} -Area^2 + 2 \cdot Area^2 \nu - 4c^2 m_2^2 + 4c^2 m_2^2 \nu - 8c^2 m_2 m_3 \\ +8c^2 m_2 m_3 \nu - 4c^2 m_3^2 + 4c^2 m_3^2 \nu - 2c^2 n_2^2 + 4c^2 n_2^2 \nu \\ -4c^2 n_2 n_3 + 8c^2 n_2 n_3 \nu - 2c^2 n_3^2 + 4c^2 n_3^2 \nu \end{pmatrix} \quad (56)$$

3. CARREGAMENTO NODAL EQUIVALENTE – FORÇAS SUPERFICIAIS

Para expressar a distribuição de uma força uniformemente distribuída aplicada na superfície triangular do elemento finito W15 e obter o vetor de forças nodais equivalentes, define-se:

$$f_E = \int_{S_e} \underline{\underline{N}}_i^T dS_e p_{S_e} \quad (57)$$

onde

$\underline{\underline{N}}_i$ - são as funções de forma do elemento em termos de x, y e z;

S_e - é a superfície do elemento;

p_{S_e} - é o vetor de força superficial.

Considera-se inicialmente uma força uniformemente distribuída na superfície triangular do elemento, conforme Figura 3, apresentando valor da coordenada adimensional na direção $\zeta = 1$.

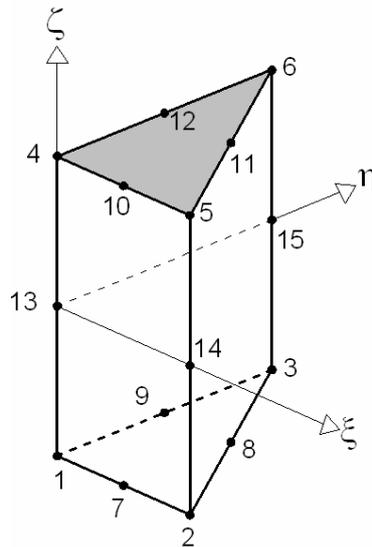


Figura 3 – Superfície a ser carregada

Como as funções de forma são obtidas em função de coordenadas adimensionais, faz-se necessário atribuir uma transformação do sistema de coordenadas para cálculo do vetor de forças equivalentes, portanto a expressão para cálculo do vetor de forças fica na forma:

$$f_E = \int_0^{1-\xi} \int_0^1 N_e^T \underline{p}_{S_e} |a \ x \ b| |d\xi| |d\eta| \quad (58)$$

onde:

- N_e - são as funções de forma do elemento em termos de ξ, η e ζ ;
- a - é a primeira coluna da matriz Jacobiana;
- b - é a segunda coluna na matriz Jacobiana.

Considerando-se um carregamento na superfície triangular superior do elemento, conforme mostrado na Figura 4 (a), sabendo-se que para essa superfície $\zeta = 1$, a força distribuída na superfície do elemento é dada por:

$$F = \frac{q_z}{Area} \quad (59)$$

O vetor das forças nodais equivalentes para a situação apresentada na Figura 4 (a) pode ser dado pela equação (60), ficando distribuído como na Figura 4 (b).

Para testar a eficiência do elemento finito W15 com carregamento para esforço normal, foi escolhida aleatoriamente uma força axial de 12 kN aplicada na extremidade livre e distribuída nos nós da estrutura de acordo com a contribuição de cada nó, conforme Figura 4.

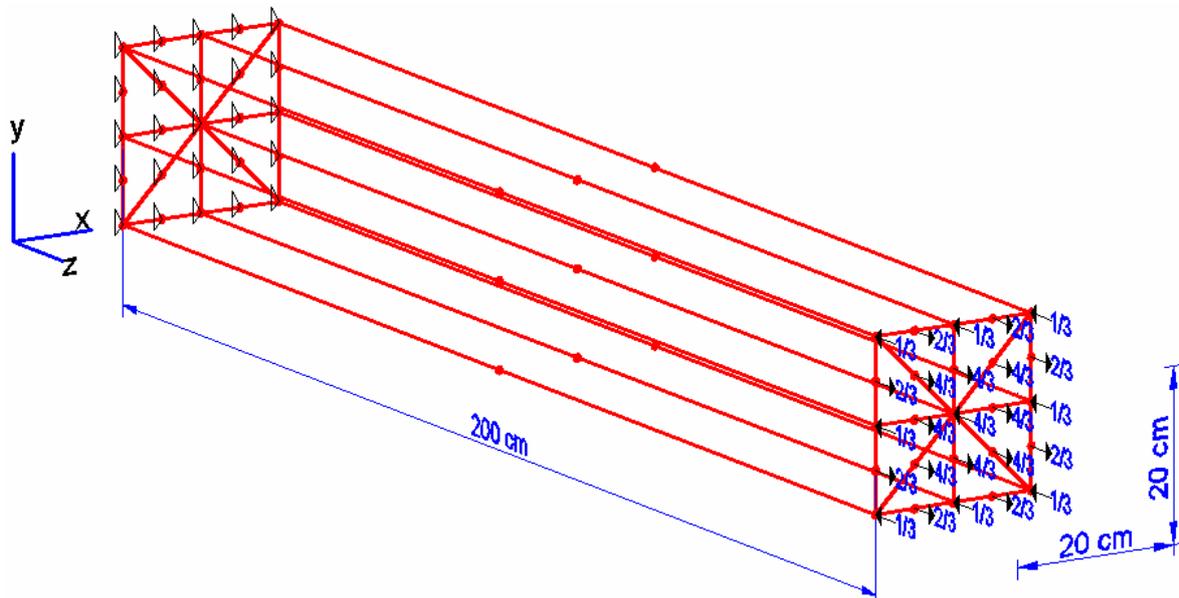


Figura 4 - Discretização da viga com carregamento axial (KN) em z e 8 elementos W15.
Fonte: Pedreiro (2011) [4]

Utilizando-se a teoria da Resistência dos Materiais, o deslocamento da extremidade livre de uma barra engastada, submetida a um esforço axial é calculado conforme a equação (62):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{12.200}{20000.400} = 0,0003 \text{ cm} \quad (62)$$

onde:

- N – Esforço normal atuante na barra;
- l – Comprimento da barra;
- E – Módulo de elasticidade do material;
- A – Área da seção transversal da barra.

A Figura 5 mostra o resultado final dos deslocamentos (cm), na direção z da extremidade livre, obtido pelo código computacional após a execução do exemplo.

Nó	X	Y	Z
36	0	0	0,00015
37	0	0	0
38	0	0	0,0003
39	0	0	0
40	0	0	0
41	0	0	0,0003
42	0	0	0,0003
43	0	0	0,00015
44	0	0	0
45	0	0	0,0003
46	0	0	0
47	0	0	0
48	0	0	0,0003
49	0	0	0,0003
50	0	0	0,00015
51	0	0	0
52	0	0	0,0003
53	0	0	0
54	0	0	0
55	0	0	0,0003
56	0	0	0,0003
57	0	0	0,00015
58	0	0	0
59	0	0	0,0003

Figura 5 – Resultados dos deslocamentos nodais (cm) para discretização com 8 elementos W15 e carregamento axial. Fonte: Pedreiro (2011) [4]

Pode-se observar que os deslocamentos dos nós da extremidade livre, na direção z, após a aplicação do carregamento, são iguais a 0,003 cm, que corresponde exatamente ao resultado apresentado na equação (62).

4.2. Viga com oito elementos W15 e força perpendicular ao eixo

Neste segundo exemplo foi testada a eficiência do elemento W15 submetido à flexão, com carregamento perpendicular ao eixo com magnitude de 12 kN, escolhido aleatoriamente, distribuído de acordo com a contribuição de cada nó da estrutura, aplicado na extremidade livre, conforme Figura 6.

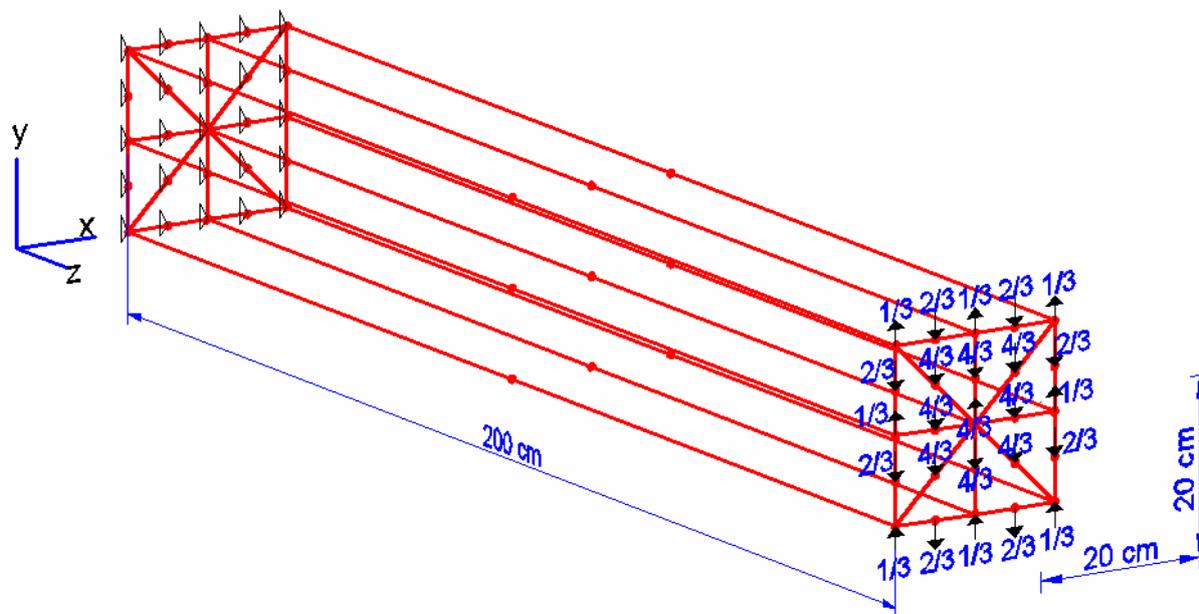


Figura 6 – Discretização da viga com carregamento perpendicular ao eixo (KN) e 8 elementos W15. Fonte: Pedreiro (2011) [4]

De acordo com a teoria da Resistência dos Materiais, o deslocamento máximo de uma viga engastada, submetida a carregamento perpendicular ao seu eixo e aplicado na extremidade livre, é calculado conforme a equação (63):

$$v = \frac{p.l^3}{3EI} = \frac{-12.200^3}{3.20000.13333,33} = -0,12 \text{ cm} \quad (63)$$

onde:

p – Esforço perpendicular ao eixo atuante na barra;

l – Comprimento da barra;

E – Módulo de elasticidade do material;

I – Momento de Inércia da seção transversal.

A Figura 7 mostra o resultado final dos deslocamentos (cm), na direção y, dos nós na extremidade livre obtidos pelo código computacional após a execução do exemplo.

Nó	X	Y	Z
36	0	-0,02418	0,00471
37	0	0	0
38	0	-0,09342	0,00902
39	0	0	0
40	0	0	0
41	0	-0,09341	0,0045
42	0	-0,09342	0,00901
43	0	-0,02418	0,00471
44	0	0	0
45	0	-0,09341	0,009
46	0	0	0
47	0	0	0
48	0	-0,09342	0,00901
49	0	-0,09341	0,00449
50	0	-0,02418	0,00471
51	0	0	0
52	0	-0,09341	0
53	0	0	0
54	0	0	0
55	0	-0,09341	0
56	0	-0,09341	0,00449
57	0	-0,02418	0
58	0	0	0
59	0	-0,09341	-0,00448

Figura 7 – Resultados dos deslocamentos nodais (cm) para discretização com 8 elementos W15 e carregamento (KN) perpendicular ao eixo. Fonte: Pedreiro (2011) [4]

Pode-se observar que os deslocamentos dos nós da extremidade livre, na direção y, após a aplicação do carregamento, são aproximadamente iguais a -0,09341 cm. Conclui-se que a discretização foi razoavelmente suficiente para o tipo de esforço aplicado.

4.3 Viga com dezesseis elementos W15 e força perpendicular ao eixo

Com o intuito de melhorar os resultados, optou-se então por realizar uma discretização maior na direção do eixo longitudinal da estrutura (eixo z). A Figura 8 mostra a viga discretizada com duas camadas, utilizando oito elementos W15 por camada.

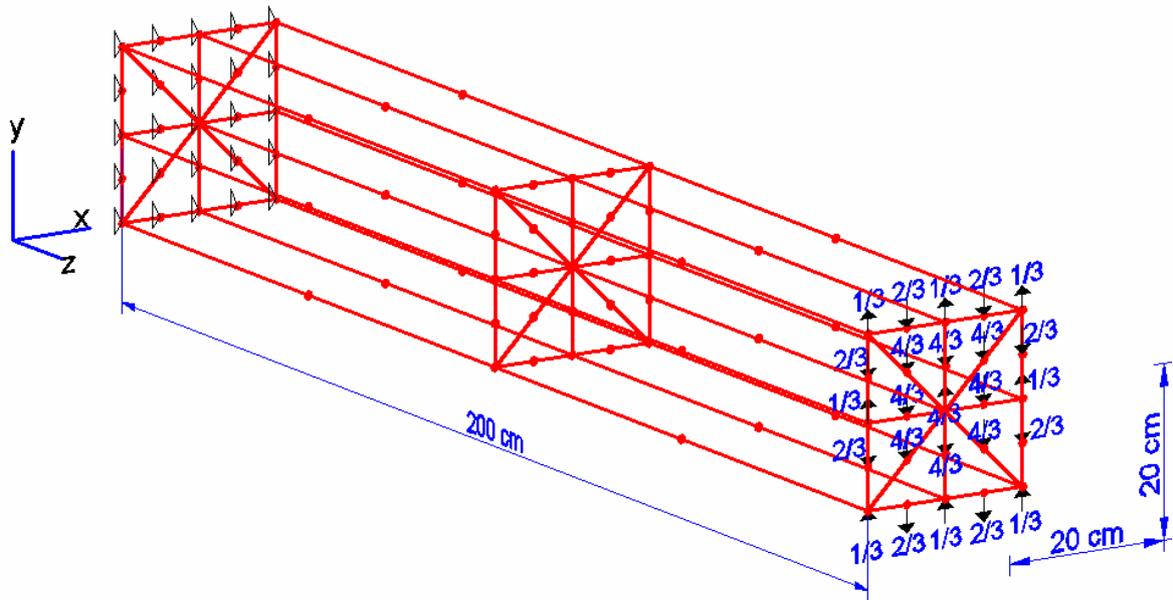


Figura 8 – Discretização da viga com carregamento perpendicular ao eixo (KN) e 16 elementos W15. Fonte: Pedreiro (2011) [4]

A Figura 9 mostra o resultado final dos deslocamentos (cm), na direção y, na extremidade livre obtidos pelo código após a execução do exemplo com 2 camadas de 8 elementos W15.

Nó	X	Y	Z
70	0	-0,11535	-0,009
71	0	-0,11535	-0,00448
72	0	-0,07244	-0,00804
73	0	-0,11535	0
74	0	-0,11535	0
75	0	-0,11535	-0,00448
76	0	-0,07244	0
77	0	-0,11535	0,009
78	0	-0,11535	0,00449
79	0	-0,11535	0,00449
80	0	-0,07244	0,00805
81	0	-0,11535	0,00902
82	0	-0,11535	0,0045
83	0	-0,11535	0,00901
84	0	-0,07244	0,00804
85	0	-0,11535	0,009
86	0	-0,11535	0,00901
87	0	-0,11535	0,00449
88	0	-0,07244	0,00805
89	0	-0,11535	0
90	0	-0,11535	0
91	0	-0,11535	0,00449
92	0	-0,07244	0
93	0	-0,11535	-0,00448

Figura 9 - Resultados dos deslocamentos nodais (cm) para discretização com 16 elementos W15 e carregamento (KN) perpendicular ao eixo. Fonte: Pedreiro (2011) [4]

Pode-se observar que os deslocamentos dos nós da extremidade livre, na direção y , após a aplicação do carregamento, são iguais a $-0,11535$ cm. Com essa discretização os resultados mostraram-se muito satisfatórios, uma vez que convergem para a resposta obtida pela equação (63).

5. CONCLUSÃO

O trabalho apresentou a dedução da matriz de rigidez explícita do elemento finito W15, bem como a dedução do vetor de forças nodais equivalentes explícito para esforços uniformemente distribuídos e aplicados na superfície triangular. Os exemplos simulados numericamente e submetidos a forças axiais, com modelo discretizado pelo elemento proposto, apresentaram resultados idênticos quando comparados com os deslocamentos obtidos pela teoria clássica de Resistência dos Materiais. Já os exemplos simulados numericamente e submetidos a esforços perpendiculares ao eixo da viga apresentaram resultados muito bons, pois somente com a discretização de um elemento na direção do eixo da viga os valores obtidos foram bem razoáveis. Na continuidade, com a discretização de dois elementos na direção do eixo da viga os valores obtidos foram excelentes, apresentando excelente convergência. Com base no exposto, pode-se validar a matriz de rigidez explícita obtida e o vetor de forças nodais equivalentes com base nas comparações efetuadas com as equações clássicas da teoria de Resistência dos Materiais, podendo-se utilizar o elemento W15 explícito na discretização dos mais diversos modelos.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Albertini, M. M. *Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico*. 2009. 214f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita”, Ilha Solteira, 2009.
- [2] Bathe, K. *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1982. New Jersey. United States of America.
- [3] Cook, R.D. *Finite element modeling for stress analysis*. John Wiley & Sons, INC, 1995. Unites States of America.
- [4] Pedreiro, M. R. M. *Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural submetidos a ações verticais utilizando elementos finitos volumétricos*. 2011. 209f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita”, Ilha Solteira, 2011.
- [5] Rodrigues, R. O. *Análise Dinâmica Bidimensional Não-Linear Física e Geométrica de Treliças de Aço e Pórticos de Concreto Armado*. 1997. 298f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- [6] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. *The finite element method*. 5^a ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 3v.