

Reyolando M. L. R. F. Brasil

CHAPAS, PLACAS E CASCAS

na engenharia aeroespacial



REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL

CHAPAS, PLACAS E CASCAS na engenharia aeroespacial

2020

Chapas, placas e cascas: na engenharia aeroespacial

© 2020 Reyolando M. L. R. F. Brasil

Editora Edgard Blücher Ltda.

Diagramação: Laércio Flenic Fernandes

Revisão: Samira Panini

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer
meios, sem autorização escrita da Editora.

Todos os direitos reservados pela Editora
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Chapas, placas e cascas: na engenharia aeroespacial /
Reyolando M. L. R. F. Brasil. - 1. ed. - São Paulo: Blucher
Open Access, 2020.
164p.

Bibliografia
ISBN 978-65-5550-022-6 (impresso)
ISBN 978-65-5550-023-3 (eletrônico)

Open Access

1. Engenharia aeroespacial. I. Título.

20-0410

CDD 629.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Engenharia aeroespacial

*À lembrança de meus queridos pais,
Yolanda e Miguel René.
Saudades.*

PREFÁCIO

Este livro pretende estudar a estática, estabilidade e dinâmica de estruturas civis, mecânicas, navais, de petróleo, eólicas e aeroespaciais do tipo folhas, isto é, sólidos de pequena espessura em relação às outras duas dimensões, tais como chapas, placas e cascas, de comportamento linear. A intenção é abordar as bases teóricas e os processos numéricos de solução, em particular o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas, e suas implementações computacionais.

Chapas, placas e cascas estão presentes em várias áreas de aplicação na engenharia estrutural. Na Engenharia Civil tem-se as lajes de concreto armado e protendido, as chapas e cascas das estruturas metálicas, as coberturas em cúpulas etc. Nas engenharias mecânica, naval e aeroespacial, veículos terrestres, navios, aeronaves e espaçonaves são, em sua maior parte, constituídos de chapas, placas e cascas metálicas, devido à leveza e resistência que deles se espera. Na engenharia de petróleo, dutos, raisers, reservatórios e outros equipamentos são estruturas dessa família.

Este livro é pensado não só como um possível texto básico para um curso a nível de graduação ou pós-graduação, conforme a ênfase, mas também como um manual para o engenheiro estrutural praticante.

O texto se restringe a abordar modelos de comportamento linear, material e geométrico, deixando os problemas não lineares para um estudo mais aprofundado, mais indicado para programas adiantados de pós-graduação. Mesmo assim, o problema essencialmente não linear importante da estabilidade de estruturas muito esbeltas, como são as folhas, é tratado. Por um viés de formação do autor, também as bases da dinâmica, isto é, vibrações, desse tipo de estruturas, são apresentadas.

Agradecimentos pela ajuda de meus alunos Santiago, Adson, Omar e Sara.

O autor faz aqui uma homenagem ao maior professor de engenharia estrutural da história, Stephen P. Timoshenko, por trás de tudo que está neste livro.

Valeu!

Reyolando Brasil

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO E SIMBOLOGIA	11
1. INTRODUÇÃO	11
2. SIMBOLOGIA DA TEORIA DA ELASTICIDADE	15
2.1 TENSÕES	15
2.2 DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES	16
3. COORDENADAS POLARES E SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS	16
4. SIMBOLOGIA DE VETORES E MATRIZES	17
PARTE 1: CHAPAS	19
1. GENERALIDADES.....	19
2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM 2D	20
2.1 TENSÕES (INTENSIDADE DE FORÇA POR UNIDADE DE ÁREA).....	20
2.2 DEFORMAÇÕES.....	21
2.3 LEI DE HOOKE.....	23
2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO	24
3. FUNÇÃO DE TENSÃO DE AIRY	25
4. CHAPAS EM COORDENADAS CARTESIANAS.....	26
4.1 CALCULANDO DESLOCAMENTOS.....	28
4.2 VIGA BIAPOIADA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	33
4.3 EXEMPLOS PROPOSTOS	36
4.4 SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS.....	37
5. CHAPAS EM COORDENADAS POLARES.....	53
5.1 TENSÕES EM COORDENADAS POLARES	53
5.2 DEFORMAÇÕES EM COORDENADAS POLARES.....	55
5.3 RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS POLARES E CARTESIANAS	56

5.4 TENSÕES EM UM TUBO DE PAREDES GROSSAS	57
5.5 SOLUÇÃO GERAL PARA SIMETRIA POLAR.....	58
5.6 O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS.....	59
5.7 DESLOCAMENTOS EM COORDENADAS POLARES.....	62
5.8 OUTRAS APLICAÇÕES EM COORDENADAS POLARES.....	63
5.8.1 SEGMENTO DE COROA CIRCULAR SOB FLEXÃO PURA	63
5.8.2 CUNHA CARREGADA RADIALMENTE NO VÉRTICE	64
5.8.3 CUNHA CARREGADA TRANSVERSALMENTE NO VÉRTICE	64
6. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM CHAPAS.....	65
6.1 IDEIA E HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	67
6.2 RESUMO DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS EM 2D, EM FORMA MATRICIAL..	68
6.3 APROXIMAÇÃO DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS PELO MEF	70
6.4 EQUAÇÕES DE LAGRANGE, EM UM ELEMENTO	71
6.5 ELEMENTO TRIANGULAR DE CHAPA COM 3 NÓS NO SLR (SISTEMA LOCAL DE REFERÊNCIA).....	73
6.6 TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA LOCAL PARA O SISTEMA GLOBAL DA ESTRUTURA	75
6.7 "ESPALHAMENTO"	76
6.8 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	76
6.9 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO FINITO RETANGULAR EM ESTADO PLANO DE TENSÃO (ARGYRIS, 1954).....	77
6.9.1 VETOR DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO 8X1	77
6.9.2 VETOR DESLOCAMENTO NO INTERIOR DO ELEMENTO 2X1	77
6.9.3 MATRIZ DE FUNÇÕES DE FORMA.....	78
6.9.4 VETOR DEFORMAÇÕES 3X1	78
6.9.5 VETOR TENSÕES 3X1.....	78
6.9.6 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	79
6.9.7 FORÇAS ELÁSTICAS	79
6.9.8 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO RETANGULAR.....	79
6.9.9 MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO RETANGULAR	80

7. EXEMPLOS RESOLVIDOS	80
7.1 ELEMENTOS TRIANGULARES.....	80
7.2 ELEMENTOS RETANGULARES.....	82
7.2.1 ELEMENTOS RETANGULARES, ESTÁTICA.....	82
7.2.2 ELEMENTOS RETANGULARES, FREQUÊNCIAS	83
PARTE 2: PLACAS	85
1. GENERALIDADES.....	85
1.1 DERIVANDO A EQUAÇÃO DE SOPHIE-GERMAIN E LAGRANGE.....	85
1.2 CINEMÁTICA.....	87
1.3 LEI DE HOOKE.....	88
1.4 EQUILÍBRIO	91
1.5 SOLUÇÃO	93
2. DINÂMICA EM PLACAS.....	94
2.1 CARREGAMENTO GENÉRICO	94
2.2 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS.....	94
3. ESTABILIDADE: EQUAÇÃO DE SAINT-VENANT	97
4. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM PLACAS.....	100
4.1 GENERALIDADES	100
4.2 EXEMPLO BÁSICO.....	101
4.3 EXEMPLO MAIS COMPLETO.....	103
4.4 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS.....	105
PARTE 3: CASCAS	109
1. GENERALIDADES.....	109
2. CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARGA AXISSIMÉTRICA.....	109
2.1 TEORIA DE MEMBRANA.....	111
2.1.1 TEORIA.....	111
3. EXEMPLOS	114
3.1 BALÃO ESFÉRICO.....	114
3.2 CASCA CILÍNDRICA (FUSELAGEM DE AERONAVE OU TUBULAÇÃO, PRESSURIZADA).....	114

3.3 CASCA CÔNICA.....	115
3.4 PARABOLOIDE.....	116
3.5 DIRIGÍVEL ELÍPTICO OU EXTREMIDADE DE VASO DE PRESSÃO CILÍNDRICO.....	116
4. TEORIA FLEXIONAL PARA CASCAS CILÍNDRICAS.....	118
4.1 EXEMPLOS	121
4.1.1 CASCA CILÍNDRICA.....	121
4.1.2 MOMENTO E FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDOS NA BORDA DE UMA CASCA CILÍNDRICA	121
5. ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO.....	122
5.1 MECÂNICA DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS	123
5.1.1 DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES	123
5.1.2 TENSÕES.....	125
5.1.3 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA	125
5.2 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	131
ANEXO: PROGRAMAS EM MATLAB.....	133
A.1 CHAPAS: ELEMENTO FINITO TRIANGULAR FUNÇÕES LINEARES	134
A.2 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR (ARGYRIS), ESTÁTICA.....	140
A.3 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR, FREQUÊNCIAS E MODOS.....	148
A.4 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, ESTÁTICA.....	154
A.5 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, FREQUÊNCIAS	158
SOBRE O AUTOR	163

INTRODUÇÃO E SIMBOLOGIA

1. INTRODUÇÃO

Na nomenclatura da Engenharia de Estruturas usualmente aceita no Brasil, peças estruturais com uma dimensão, a espessura e , muito menor que as outras duas, são classificadas em conjunto como folhas. Se dividem em folhas planas e não planas. No primeiro grupo tem-se as chapas, quando os carregamentos estão contidos no plano da folha, gerando apenas esforços de tração, compressão ou tangenciais (cisalhamento), e as placas quando o carregamento é perpendicular ao plano da folha, gerando esforços de flexão, além dos tangenciais (cisalhamento). As peças não planas e as carregadas de outra forma, são em geral classificadas como cascas.

É óbvio que em qualquer caso se trata de peças tridimensionais. Mas o fato de terem pequena espessura relativa permite adoção de teorias estruturais simplificadas ad hoc, as teorias de chapas, placas e cascas, que serão abordadas neste livro.

As aplicações na prática da Engenharia são inúmeras. Seguem-se alguns exemplos nas várias especialidades.

Na Engenharia Civil, tem-se as chapas de união das peças em estruturas metálicas, as lajes de concreto armado e protendido, que são placas, as assim chamadas estruturas espaciais, como as cúpulas de templos religiosos construídos desde os romanos, com seu Panteão, até os dias de hoje, passando pelas grandes estruturas medievais e do Renascimento, como as do Vaticano, em Roma e da Hagia Sofia, em Istambul.

Na Engenharia Mecânica e Naval, tem-se os vasos de pressão, os reservatórios de fluidos, as estruturas autoportantes de veículos terrestres e navais, todos exemplos de cascas.

Neste livro, uma ênfase maior será dada às Estruturas Aeroespaciais, nas quais o autor, Engenheiro Civil de formação, hoje atua. Essa especialidade é um subconjunto da Engenharia Mecânica que trata das aeronaves e veículos espaciais e seus equipamentos. Esses objetos têm que necessariamente ser muito leves, por várias razões óbvias que aqui não se repetem. Mas tem que manter formas que permitam espaço interno para uso de suas cargas úteis e, no caso das aeronaves, provenham as formas aerodinâmicas necessárias à sua sustentação e controle.

Inspira-se, aqui, na natureza, que em muitos casos se vale dos exoesqueletos, como nos crustáceos e insetos. *Aí* a estrutura é a própria periferia externa do ser vivo. A mesma solução é adotada na Engenharia Aeroespacial, em que as superfícies externas dos veículos são parte de suas estruturas, em geral de muito pequena espessura. Como exemplo, apresentam-se as fotos das Figuras 1 a 5, obtidas em site gratuito da Internet, o <https://picryl.com/>, isentas de direitos autorais.



Figura 1: partes de espaçonaves da NASA



Figura 2: casca externa de foguete em montagem



Figura 3: espaçonave em manutenção em órbita



Figura 4: montagem de fuselagem de aeronave

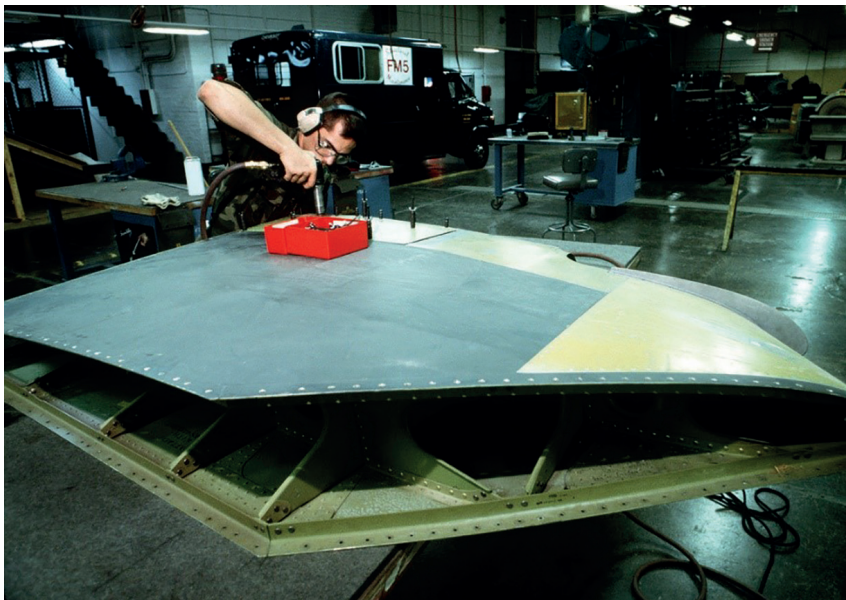


Figura 5: montagem de superfície de controle de aeronave

2. SIMBOLOGIA DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Neste trabalho, adota-se a simbologia introduzida por Timoshenko para a Teoria da Elasticidade Linear, um subconjunto da Mecânica dos Contínuos.

Considera-se um sólido referenciado a um sistema cartesiano de coordenadas ortogonais levogiro xyz .

O corpo em questão está solicitado por ações (carregamentos) aplicadas à sua superfície externa $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \left(\frac{N}{m^2}\right)$ e ações à distância aplicadas sobre sua massa (tal como a gravidade) $x, y, z, \left(\frac{N}{m^3}\right)$.

2.1 Tensões

Devido às ações externas aplicadas sobre o corpo em questão, um elemento extraído de seu interior terá suas faces sob efeito de uma intensidade de força por unidade de área denominada tensão ($Pa = \frac{N}{m^2}$), um vetor com intensidade, direção e sentido.

Considerando-se esse elemento um cubo de faces normais aos eixos coordenados, o vetor tensão em uma delas pode ser decomposto nas 3 direções do espaço.

Pode-se ter, assim, componentes normais às faces, designadas como tensões normais, simbolizadas pela letra grega minúscula σ (sigma), com um subscrito indicando a direção do respectivo eixo, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Essas componentes serão positivas se seus sentidos concordarem com o sentido dos eixos coordenados em uma face de normal positiva. Caso contrário serão negativas. Obviamente, serão também positivas se seus sentidos discordarem do sentido dos eixos coordenados em uma face de normal negativa e negativas caso contrário. Nessa convenção de sinais, tensões de tração resultam positivas e de compressão negativas.

Também se pode ter componentes tangenciais às faces, designadas por tensões tangenciais, ou de cisalhamento, simbolizadas pela letra grega minúscula τ (tau), com dois subscritos, o primeiro indicando o eixo normal àquela superfície e o segundo a direção do eixo a que é paralela, $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Novamente, essas componentes de tensão serão positivas se seus sentidos concordarem com o dos eixos coordenados em uma face de normal positiva. Caso contrário serão negativas. Obviamente, serão também positivas se seus sentidos discordarem do sentido dos eixos coordenados em uma face de normal negativa e negativas caso contrário. Nessa convenção, o vetor momento das forças devidas a tensões tangenciais positivas (multiplicadas pela área a que estão aplicadas) com relação aos eixos coordenados tem sentido positivo.

É importante ter consciência de que essas tensões são funções das coordenadas x, y e z e do tempo t , ou seja, seu valor, no caso geral, varia ponto a ponto e instante a instante.

2.2 Deslocamentos e deformações

Devido às ações atuantes sobre o corpo, um ponto genérico em seu interior, designado por P , pode se deslocar nas três direções do espaço. As funções que fornecem esses deslocamentos são, respectivamente, $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ e $w(x,y,z,t)$.

Entretanto, o interesse na Engenharia é nas mudanças de dimensões e de formas que o corpo sofre, denominadas deformações, e não nos deslocamentos em si. Para se medir essas deformações, é necessário determinar as variações dos deslocamentos de pontos infinitesimalmente próximos.

A razão entre uma distância infinitesimal na direção de um dos eixos coordenados mudou e seu comprimento original é designado pela letra grega minúscula (*épsilon*), com um subscrito definindo sua direção, $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. É positiva se expressar um aumento de comprimento e negativa uma diminuição.

A variação do ângulo reto originalmente existente entre duas direções paralelas aos eixos coordenados é designada pela letra grega minúscula γ (gama), com dois subscritos indicando essas duas direções, $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

3.COORDENADAS POLARES E SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS

Em alguns modelos matemáticos de sólidos, condições de simetria geométrica e/ou de carregamentos com relação a um polo ou um eixo podem ser mais facilmente tratadas por um sistema de referência diferente das já mencionadas coordenadas cartesianas ortogonais.

No caso de alguns modelos de chapas, tais como discos, coroas e cunhas, coordenadas polares podem ser mais convenientes, ou seja, o raio r com relação a um polo e um ângulo θ . Nesses casos, as expressões para tensões, deslocamentos e deformações podem ser referenciadas a essas coordenadas e serão identificadas na seção correspondente.

No caso de alguns modelos de cascas, tais como vasos de pressão (fuselagens) e tubos, resultantes de rotação de linhas ou áreas em torno de um eixo, com carregamentos simétricos em relação a esse eixo, temos o caso de sólidos axisimétricos. Neles, um ganho considerável de simplicidade na modelagem matemática é conseguido pelo uso de coordenadas tais como o raio r com relação ao eixo de simetria, um ângulo θ , e uma coordenada z longitudinal. Nesses casos, as

expressões para tensões, deslocamentos e deformações podem ser referenciadas a essas coordenadas e serão identificadas na seção correspondente.

4. SIMBOLOGIA DE VETORES E MATRIZES

Em geral, neste texto, matrizes são representadas por letras maiúsculas entre colchetes e vetores por letras minúsculas entre chaves.

A letra T sobrescrita à direita de uma matriz indica sua transposta, isto é, permutação de linhas por colunas. Um expoente -1 à direita de uma matriz indica sua inversa.

PARTE 1: CHAPAS

1. GENERALIDADES

Chapas são peças estruturais em que uma dimensão, a espessura e , é muito menor que as outras duas, são planas, e os carregamentos são supostamente contidos nesse plano. É o caso, por exemplo, dos painéis de fechamento de fuselagens de aeronaves, em que as pressões internas ou externas podem ser negligenciadas por serem de uma ordem de grandeza muito menor que as tensões que se desenvolvem em seu próprio plano.

Aqui serão analisadas soluções para problemas bidimensionais de elasticidade linear, apenas. Consideram-se chapas infinitesimalmente finas contidas em um plano xy , com as forças externas aplicadas também contidas nesse plano. Isso implica que as únicas componentes de tensão de interesse são $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$. Este é o chamado *estado plano de tensões*, **EPT**.

2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM 2D

2.1 Tensões (intensidade de força por unidade de área)

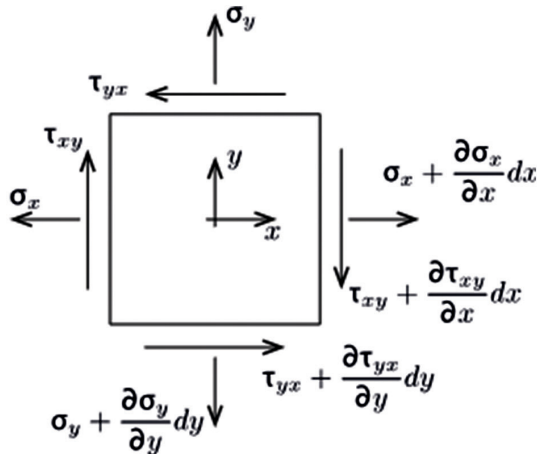


Figura 1.1

Pode-se derivar a equação de equilíbrio em 2D de maneira simples, somando as forças resultantes do produto das tensões (em $\rho a = \frac{N}{m^2}$) pelas áreas em que atuam em um pequeno elemento de chapa $dx \times dy$ e pequena espessura e , representado na Fig. 1.1. Na direção x as forças resultantes das tensões normais, representadas pela letra grega minúscula σ , e tangenciais (de cisalhamento), representadas pela letra grega minúscula τ , devem se equilibrar, considerando-se, ainda, a presença de forças de massa X (em $\frac{N}{m^2}$) e a força de inércia dada pelo produto da densidade do material ρ ($\frac{kg}{m^3}$) pela aceleração \ddot{u} , em que u é a função deslocamento de um ponto da chapa na direção x e pontos superpostos indicam derivações sucessivas no tempo.

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx + X dx dy = \rho \ddot{u} dx dy \quad (1.1)$$

Na direção y , considerando-se forças de massa Y (em $\frac{N}{m^2}$) e aceleração \ddot{v} , em que v é a função deslocamento de um ponto da chapa na direção y , tem-se

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy - \sigma_y \right) dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - \tau_{xy} \right) dy + Y dx dy = \rho \ddot{v} dx dy \quad (1.2)$$

No limite, para os lados da pequena área tendendo a zero, tem-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = \rho \ddot{u} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = \rho \ddot{v}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Derivando a 1ª equação em x e a 2ª em y e somando, para acelerações desprezíveis, tem-se

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

2.2 Deformações

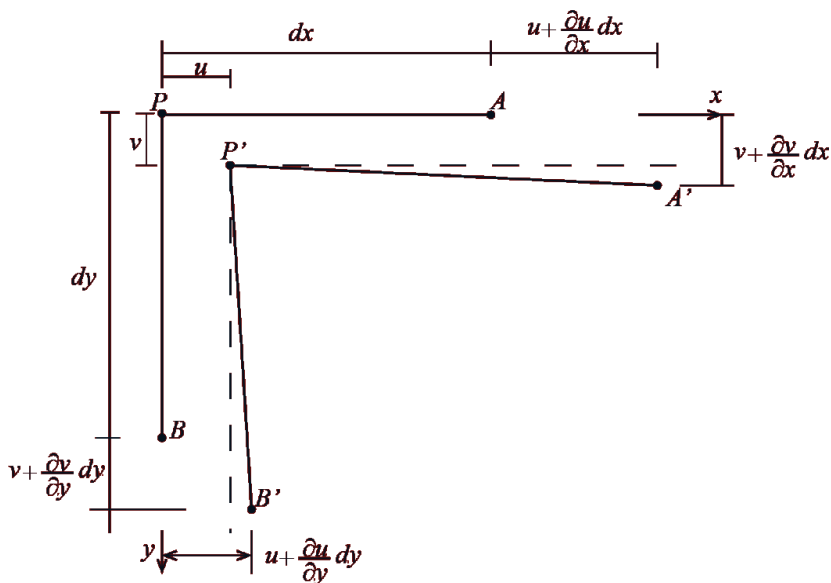


Figura 1.2

O efeito das tensões sobre um corpo deformável é mudar sua forma. Essa mudança é descrita em termos do vetor deslocamento, cujas componentes são u e v , de um ponto P , i.e., o ponto P move-se de sua posição original para essa nova posição P' . A pergunta que se coloca é: para onde se deslocam os pontos

adjacentes A e B da Fig. 1.2? O deslocamento de A na direção x e y , e de B , nessas 2 direções, são, respectivamente,

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (1.5)$$

E também há interesse na deformação longitudinal definido por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

um número puro, sem unidades. Na outra direção tem-se

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

Mais ainda, as tensões aplicadas podem distorcer o corpo de outras formas, também. Em particular, direções no corpo que estavam a 90° entre si antes da aplicação das tensões de cisalhamento não mais formarão esse mesmo ângulo. Considerem-se os pontos A e B que ficam ao longo das direções x e y a partir de P , inicialmente em ângulo reto, pode-se mostrar (vide Fig. 1.2) que esse ângulo decresce pelo valor

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.8)$$

Este resultado é a *distorção*. Dessa forma, em problemas 2D, tem-se 3 componentes de deformação:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.9)$$

Diferenciando essas equações, a primeira delas duas vezes com respeito a y , a segunda duas vezes com relação a x , e a terceira uma vez com relação a x e uma vez com relação a y , e combinando, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} \quad (1.10)$$

A chamada equação de compatibilidade.

2.3 Lei de Hooke

A Eq. (1.10) dá uma outra equação para ser resolvida, mas para isso é necessário reescrever a equação de compatibilidade em termos de tensões. A relação entre essas grandezas é uma propriedade do material. Adota-se, aqui, uma relação linear, a lei de Hooke. Para o estado plano de tensões, ela pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{1.11}$$

em que,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

No caso do **EPT**, substituindo a lei de Hooke (1.11) na equação de compatibilidade (1.10) encontra-se

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{1.12}$$

Impondo-se o equilíbrio, eliminando o lado direito das Eqs. (1.12) usando a Eq.(1.4) obtém-se, para o **EPT**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{1.13}$$

Se as forças de massa derivarem de um potencial ,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}\tag{1.14}$$

têm-se, para **EPT**, a equação diferencial que governa o problema

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \nabla^2 V\tag{1.15}$$

2.4 Condições de contorno

Em (1.15) foi obtida a equação diferencial que governa o modelo matemático de chapas de comportamento linear, tudo em *termos de tensões*.

A solução dessa equação depende das forças aplicadas no corpo em questão, i.e., as *condições de contorno*. As componentes de tensão na superfície do corpo devem estar em equilíbrio com as forças externas impostas.

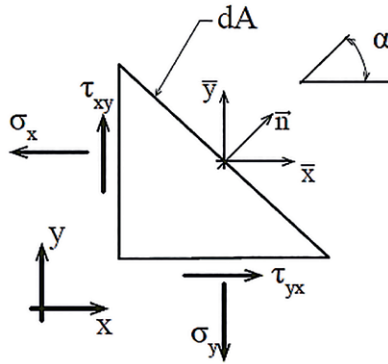


Figura 1.3

Considere-se as forças aplicadas no pequeno triângulo da Fig. 1.3. A hipotenusa desse triângulo corresponde à projeção de uma área infinitesimal dA de normal \vec{n} , recortada da superfície de contorno do corpo. Seja α o ângulo entre a normal dA e a direção x . O equilíbrio de forças na direção x é:

$$\sigma_x dA \cos \alpha + \tau_{xy} dA \sin \alpha = F_x \quad (1.16)$$

onde F_x é a componente da força imposta nessa direção. Dividindo tudo por dA e chamando de \bar{x} a força por unidade de área nessa direção, tem-se

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (1.17)$$

Pelo mesmo raciocínio, na direção y

$$\bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (1.18)$$

Na notação de Timoshenko os cossenos diretores são

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.19)$$

3. FUNÇÃO DE TENSÃO DE AIRY

Resolver 3 equações diferenciais parciais torna-se, às vezes, inviável. Fica mais fácil se for introduzida uma nova função ϕ , chamada *função de tensão* (ou *função de Airy*, astrônomo e matemático inglês do século XIX) satisfazendo as equações de equilíbrio. Desconsiderando as forças de massa, define-se

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + X, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Substituindo-se (1.20) em (1.14) obtém-se, para **EPT**

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)\tag{1.21}$$

Introduzindo o operador laplaciano,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

e admitindo-se forças de massa nulas, chega-se a

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0\tag{1.22}$$

assim, as funções biharmônicas se prestam a essa solução. Para chapas modeladas como longas fitas retangulares, verifica-se, por simples substituição, que o polinômio de 2º grau a seguir é uma solução:

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$$

As componentes de tensão são

$$\begin{aligned}\sigma_x &= c_2, \\ \sigma_y &= a_2, \\ \tau_{xy} &= -b_2\end{aligned}$$

assim, essa é a solução para uma longa fita sob tensões uniformes. Por outro lado, devem ser obedecidas as condições de contorno, que no caso seriam tração uniforme ou cisalhamento uniforme. Pode-se reverter o processo começando de um valor de tensão dado. Por exemplo, se a fita retangular está sob uma tração uniforme de 4 N/m^2 na direção x em uma extremidade e o mesmo valor na direção $-x$ na outra extremidade, então tem-se

$$\sigma_x = c_2 = \frac{4N}{m^2}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

e a função de tensão é

$$\varphi = 2y^2$$

4. CHAPAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

A solução das equações da elasticidade para uma dada condição de contorno é frequentemente muito difícil de ser obtida da forma direta, resolvendo a equação biarmônica e impondo as condições de contorno. Muitas vezes é usada uma técnica conhecida como o *método inverso*, o qual começa por “supor” a solução e mostrando que ela atende à equação biarmônica, e verificando quais as condições de contorno que são satisfeitas por essa solução.

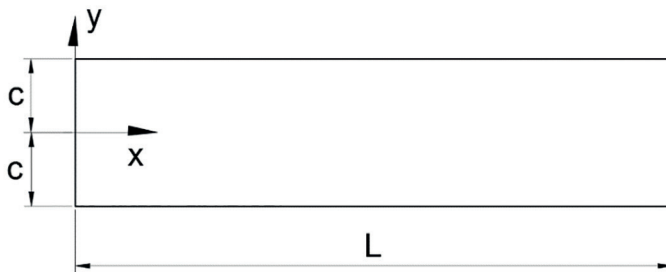


Figura 1.4

Como exemplo, considere-se a função

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) - \frac{P}{4c} y^2$$

Essa é uma função válida? Tem-se que:

$$H = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2c^3}xy - \frac{P}{2c}$$

e, assim,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

provando que essa solução atende a $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, sendo, portanto, uma função de tensão válida. Agora se deve determinar o problema para o qual essa é a solução, calculando as tensões no domínio mostrado na Fig. 1.4. Da função de tensão tem-se:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2c^3}xy - \frac{P}{2c}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Determinando essas tensões ao longo de $y = \pm c$, $\tau_{xy} = 0$, verifica-se que essas fibras extremas podem representar as faces superior e inferior de uma viga sem carga aplicada. Ao longo de $x = 0$,

$$\sigma_x = -\frac{P}{2c},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

equivalente à aplicação de uma força normal de compressão P e uma força cortante F na extremidade de uma viga em balanço, conforme a Fig. 1.5.

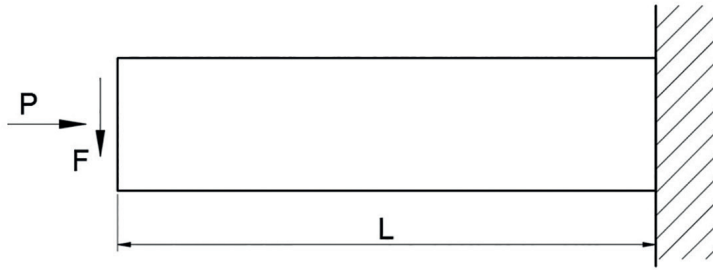


Figura 1.5

Devem ser notados os seguintes pontos:

1. a carga aplicada poderia ser considerada separadamente como uma compressão e uma força cortante; a solução é a *superposição* de duas funções que são separadamente soluções do problema; este é um exemplo do *princípio da superposição*, válido para a Teoria da Elasticidade Linear;
2. a força cortante tem uma distribuição parabólica na extremidade da viga; entretanto, devido ao *princípio de Saint-Venant*, a exata distribuição da força não é importante a uma certa distância do ponto de aplicação; assim, a solução a partir de uma pequena distância da extremidade da viga será a mesma, independentemente da verdadeira distribuição da força aplicada.

4.1 Calculando deslocamentos

Primeiro, procura-se uma função de tensão $\varphi(x, y)$ e determinam-se as tensões. A seguir, como as deformações são relacionadas com os deslocamentos, e as tensões são relacionadas com as deformações pela lei de Hooke, tem-se um caminho para se obter os deslocamentos. No caso de tensões planas tem-se a equação (1.9), da qual pode-se tirar, por exemplo, $\varepsilon_x(x, y)$, que proporciona o deslocamento u , que é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (1.23)$$

que integrado dá:

$$u(x, y) = \int \varepsilon_x dx + A(y) \quad (1.24)$$

Nota-se que a “constante de integração” não é de fato constante, mas uma função somente da variável y . A razão disso é que ao diferenciar (1.24) com respeito a x para voltar a (1.23) a função $A(y)$ desaparecerá (realiza-se uma derivação parcial), e, portanto, deve-se cuidar para permitir todas as possibilidades.

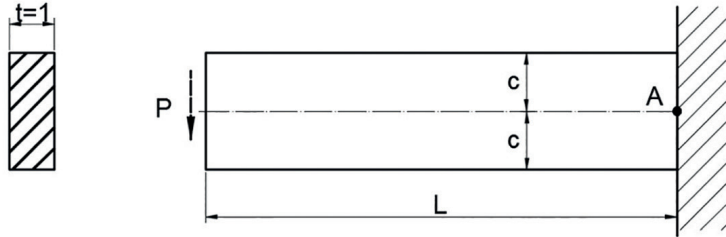


Figura 1.6

Um exemplo para esclarecer. A Fig. 1.6 mostra uma viga em balanço com uma força vertical P aplicada na extremidade livre. A função de tensão para este caso é

$$\varphi = \frac{3P}{4c}xy - \frac{1}{4} \frac{P}{c^3}xy^3$$

a qual fornece as tensões

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3}xy = -\frac{P}{I}xy,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = -\frac{P}{I} \frac{(c^2 - y^2)}{2},$$

$$\sigma_y = 0$$

Aplicando a lei de Hooke, tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}$$

que integrada dá

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y)$$

da mesma forma, tem-se

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = \frac{\nu P x y}{EI}$$

dando

$$v = -\frac{\nu P x y^2}{2EI} + g(x)$$

Mas a lei de Hooke também dá

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Substituindo as expressões já derivadas para u e v nesta última equação, tem-se

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P y^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

Reunindo-se todos os termos envolvendo x em um termo $G(x)$ e todos os termos envolvendo y em um termo $F(y)$, pode-se escrever

$$F(y) + G(x) = K$$

onde

$$G(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx},$$

$$F(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P y^2}{2EI} - \frac{P}{2GI}y^2$$

Agora, pode-se considerar x constante e variar y . Isso equivale a dizer que $G(x)$ e K seriam constantes, implicando que $F(y)$ deve ser uma constante também

$$F(y) = e$$

Essa equação pode ser integrada para obter uma expressão para $f(y)$. Da mesma forma, podemos manter y constante e variar x , $F(y)$ e K são constantes, assim

$$G(x) = d$$

que pode ser integrada para se ter uma expressão para $g(x)$. A outra constante é

$$e + d = K = -\frac{Pc^2}{2IG}$$

Rearranjando, tem-se

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d,$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{P}{2GI}y^2 + e$$

Integrando

$$g(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h,$$

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + i$$

Os deslocamentos serão, então,

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + i$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h$$

Finalmente, condições de contorno nos deslocamentos u e v podem ser introduzidas para eliminar constantes de integração não definidas. Para $x = L$ $y = 0$, implicando em $u = v = 0$, $i = 0$ e $h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dL$.

Para efeito de comparação com a Resistência dos Materiais, escrevemos a **linha elástica** como:

$$v(y = 0) = -\frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Px^3}{6EI} + d(L - x)$$

Neste exemplo, a extremidade engastada da viga não se move nem roda, e a viga em si não se move como um corpo rígido. Para impor a condição de rotação nula no engaste temos 2 caminhos. O primeiro, ilustrado na Fig. 1.7 é dado por

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{em } x = L \text{ e } y = 0$$

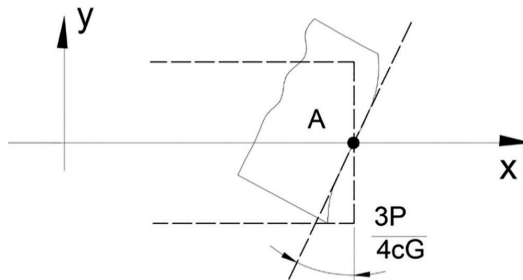


Figura 1.7

implicando em que

$$d = -\frac{PL^2}{2EI} \quad e \quad e = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

levando à expressão da linha elástica na forma

$$v(y = 0) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

a qual fornece a flecha máxima na extremidade da viga com seu valor conhecido

$$v(x = 0, y = 0) = \frac{PL^3}{3EI}$$

O segundo caminho, ilustrado na Fig. 1.8, é dado por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{em } x = L \text{ e } y = 0$$

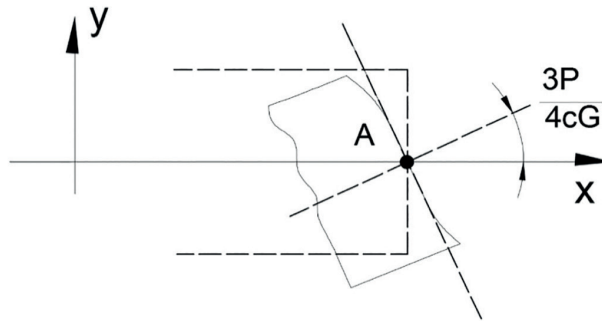


Figura 1.8

implicando em que

$$d = -\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \quad e \quad e = \frac{PL^2}{2EI}$$

levando à expressão da linha elástica na forma

$$v(y = 0) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(L - x)$$

a qual fornece a flecha máxima na extremidade da viga com seu valor corrigido pelo efeito da força cortante

$$v(x = 0, y = 0) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2L}{2IG}$$

4.2 Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída

Para a chapa retangular longa biapoiada da Figura 1.9, de espessura unitária, altura $2c$, vão $2L$, sob carregamento distribuído uniforme q , considerada em estado plano de tensões, determinar o campo de tensões, deformações e deslocamentos (inclusive a flecha máxima). Desprezar peso próprio. Comentar os resultados.

Sugestão: partir da função de tensões (função de Airy)

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{2I} \left[-\frac{c^3}{3} x^2 + \frac{c^2}{2} x^2 y - \frac{x^2 y^3}{6} + \left(\frac{L^2}{6} - \frac{c^2}{15} \right) y^3 + \frac{y^5}{30} \right]$$

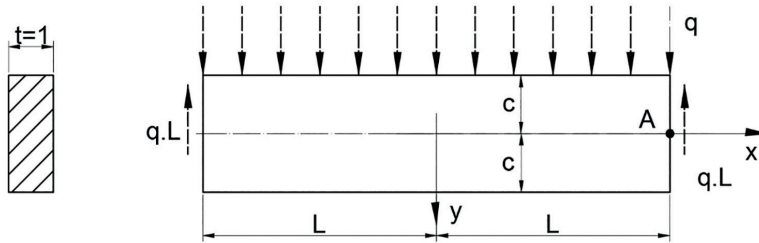


Figura 1.9

a) Cálculo das tensões

A função sugerida satisfaz $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, levando a

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{q}{2I} \left[(L^2 - x^2)y + \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2)x \end{aligned}$$

funções que satisfazem as condições de contorno na face superior e inferior

$$\tau_{xy}(y = \pm c) = 0 \quad \sigma_y(y = +c) = 0 \quad \sigma_y(y = -c) = -q$$

e nas extremidades $x = \pm L$

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp qL \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0 \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Nota-se que σ_x tem duas parcelas, a primeira, a mesma que a obtida na Resistência dos Materiais e a segunda, uma correção que é pequena para vigas longas em relação à altura da seção. Também se deve notar que as forças aplicadas nas

extremidades devem ser distribuídas conforme as funções obtidas. Essa condição pode ser relaxada tendo em vista o Princípio de Saint-Venant.

b) Cálculo dos deslocamentos

Os deslocamentos u e v podem ser calculados aplicando a lei Hooke para obter as deformações e integrá-las. Levando em conta que no eixo da seção no meio da viga ($x=0, y=0$) o deslocamento horizontal é nulo, por simetria, e o deslocamento vertical é a flecha δ no meio do vão, obtém-se

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(L^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + vx \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right]$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + v \left[(L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\}$$

$$-\frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right] + \delta$$

Desta última expressão encontra-se a linha elástica:

$$v(y=0) = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right]$$

Considerando os deslocamentos verticais nas extremidades nulos (viga biapoiada) encontra-se a flecha máxima:

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$

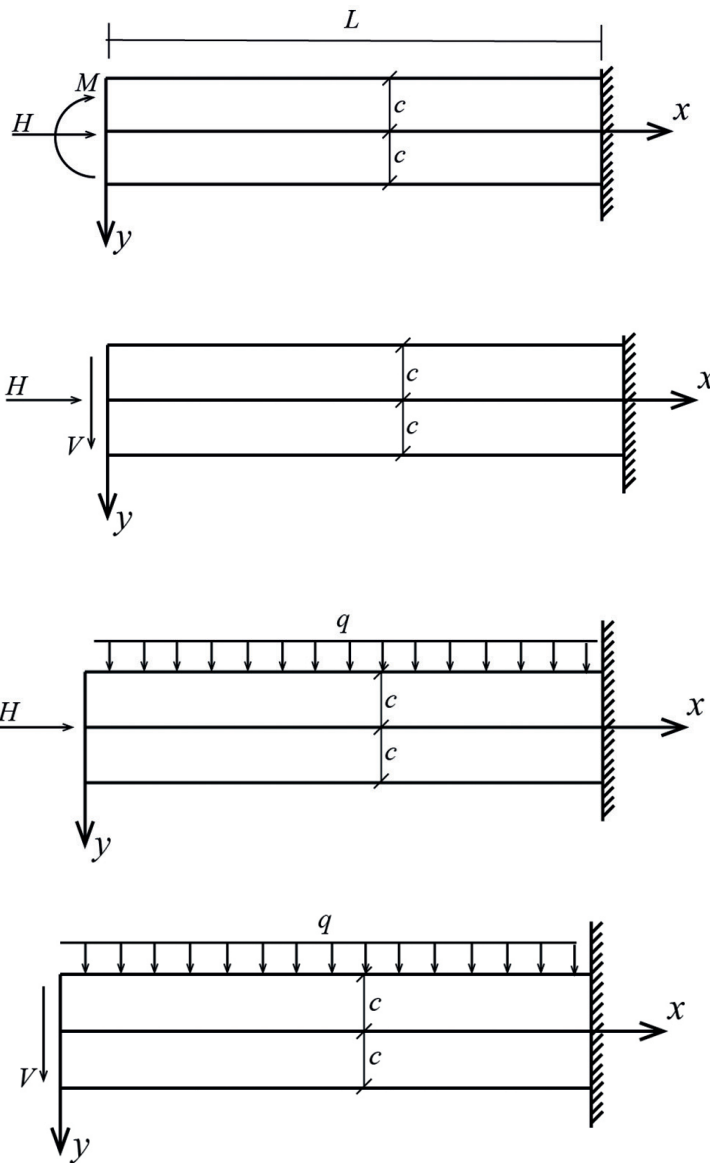
O fator à frente do colchete é a flecha usual da Resistência dos Materiais e o colchete em si é a correção devida à força cortante. Derivando a equação da linha elástica duas vezes em x , encontramos a expressão da curvatura:

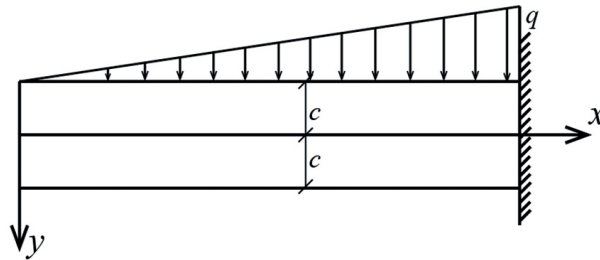
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} |_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$

a qual não é exatamente proporcional ao momento fletor $\frac{q(L^2 - x^2)}{2}$ como deveria ser pela Resistência dos Materiais. Há uma correção.

4.3 Exemplos propostos

As cinco figuras a seguir representam chapas retangulares de espessura unitária, comprimento L , altura $2c$, módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν .





Determinar, para cada uma, os campos de tensões e de deslocamentos, usando Funções de Airy em forma de polinômios.

4.4 Solução dos exercícios propostos

Nesta seção apresenta-se a resolução dos problemas propostos com base na metodologia semi-inversa, que consiste na resolução dos exercícios a partir das relações provenientes da mecânica dos sólidos, em conjunto com as funções de Airy apresentadas anteriormente. Para isso, assume-se que todos os problemas propostos se encontram no regime linear, onde é válida a aplicação do princípio da superposição de respostas.

Apresenta-se nesta seção o desenvolvimento das funções de Airy, adaptadas de modo a respeitar a equação biarmônica em coordenadas retangulares, dada por:

$$\nabla^4(\varphi) = d^4\varphi/dx^4 + 2 d^4\varphi/dx^2dy^2 + d^4\varphi/dy^4 = 0$$

As funções polinomiais variando-se entre o segundo e quinto grau são apresentadas a seguir:

$$\varphi_2 = a_2x^2/2 + b_2xy + c_2y^2/2$$

$$\varphi_3 = a_3x^3/6 + b_3x^2y/2 + c_3xy^2/2 + d_3y^3/6$$

$$\varphi_4 = a_4x^4/12 + b_4x^3y/6 + c_4x^2y^2/2 + d_4xy^3/6 + e_4y^4/12$$

$$\varphi_5 = a_5x^5/20 + b_5x^4y/12 + c_5x^3y^2/6 + d_5x^2y^3/6 + e_4xy^4/12 + f_5y^5/20$$

Uma vez conhecido o formato genérico dos polinômios (relações acima), é possível determinar as tensões atuantes no modelo, dadas por:

Polinômio de 2° grau.

$$\sigma_x = d^2\varphi/dy^2 = c_2$$

$$\sigma_y = d^2\varphi/dx^2 = a_2$$

$$\tau_{xy} = -d^2\varphi/dxdy = -b_2$$

Polinômio de 3° grau.

$$\sigma_x = c_3x + d_3y$$

$$\sigma_y = a_3x + b_3y$$

$$\tau_{xy} = -(b_3x + c_3y)$$

Polinômio de 4° grau.

$$\sigma_x = c_4x^2 + d_4xy + e_4y^2$$

$$\sigma_y = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$

$$\tau_{xy} = -(b_4x^2/2 + 2c_4xy + d_4y^2/2)$$

onde os coeficientes a_4, c_4 e e_4 devem respeitar a seguinte relação,

$$a_4 + c_4/2 + e_4 = 0$$

Polinômio de 5° grau.

$$\sigma_x = c_5x^3/3 + d_5x^2y + e_5xy^2 + f_5y^3$$

$$\sigma_y = a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + d_5y^3/3$$

$$\tau_{xy} = -(b_5x^3/3 + c_5x^2y + d_5xy^2 + e_5y^3/3)$$

De modo similar ao apresentado anteriormente, temos que os coeficientes do polinômio de quinta ordem devem respeitar a seguintes restrições:

$$b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0$$

$$e_5 + 2c_5 + 3a_5 = 0$$

Finalmente, temos por definição, que as relações entre tensão e deformação para o regime elástico linear são dadas por:

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu\sigma_y]/E$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu\sigma_x]/E$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G = 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E$$

E que as deformações são dadas por:

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x$$

$$\varepsilon_y = \partial v/\partial y$$

$$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$$

Exemplo 1: M e H na extremidade esquerda da chapa

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = M$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

Assumindo que a tensão σ_x da extremidade oposta ao engaste devido à força horizontal H possa ser aproximada por:

$$\sigma_x \sim H/2c$$

Temos que a função de Airy necessária para descrever este problema deve apresentar um valor de tensão nulo para as componentes σ_y e γ_{xy} , enquanto que a componente σ_x deve ser constante, de valor $H/2c$, logo:

$$\varphi_H = c_2 y^2 / 2$$

onde $c_2 = H/2c$. Uma vez conhecidas as componentes de tensão, assim como a função de Airy que rege o problema, temos que o campo de deformações será dado por:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = [\sigma_x - \nu \sigma_y] / E = H / 2Ec$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = [\sigma_y - \nu \sigma_x] / E = -\nu H / 2Ec$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \tau_{xy} / G = 0$$

e os deslocamentos serão

$$\begin{aligned} u &= Hx / 2Ec + f(y) \\ v &= -\nu Hy / 2Ec + g(x) \end{aligned}$$

Além disso, temos que da equação de deformação angular,

$$df(y)/dy + dg(x)/dx = 0$$

A relação obtida nessa equação só será uma igualdade caso ambas as derivadas sejam constantes e de valor complementar, isto é, $d + e = 0 \rightarrow d = -e$. Da aplicação das condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned} u &= Hx / 2Ec + dy + f \\ v &= -\nu Hy / 2Ec + ex + g \end{aligned}$$

com

$$u(L, 0) = 0 \rightarrow f = -HL / 2Ec$$

$$v(L, 0) = 0 \rightarrow eL = -g$$

$$\partial v(L, 0) / \partial x = 0 \rightarrow e = 0 \therefore g = d = 0$$

Portanto,

$$u = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec}y$$

De maneira semelhante ao realizado na primeira etapa, estuda-se uma viga engastada sob ação de um momento M aplicado à sua extremidade oposta. A resposta em função do campo de tensões será descrita por um polinômio de terceiro grau com termo d_3 não nulo, conforme mostrado abaixo,

$$\varphi_M = d_3 y^3 / 6$$

A escolha de tal polinômio é corroborada pelo fato de que para chapas retangulares, tal polinômio nos fornece uma situação de flexão pura, cuja tensão normal é constante ao longo do eixo horizontal e varia linearmente no eixo y , através da seguinte relação: $\sigma_x = d_3 y$ (ver Timoshenko, 1951). Outra possível estratégia consiste na determinação dos campos de tensão atuantes na estrutura devido à aplicação do momento, e com isso determinar os termos do polinômio de Airy necessários. A constante d_3 é determinada através do seguinte procedimento:

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c (d_3 y) y dy = d_3 (y^3/3) \Big|_{-c}^c = 2d_3 c^3 / 3$$

Logo,

$$d_3 = 3M/2c^3$$

Assim, temos que a função de Airy que rege o problema é dada por:

$$\varphi_M = 3My^3/12c^3 = My^3/6I$$

onde $I = 2c^3/3$ representa o momento de inércia da seção. Uma vez conhecida a função de Airy, temos que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = My/I$$

$$\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$$

$$\tau_{xy} = \partial^2 \varphi / \partial x \partial y = 0$$

e, portanto, as deformações e deslocamentos serão dados por:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = [\sigma_x - \nu \sigma_y] / E = My / EI$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = [\sigma_y - \nu \sigma_x] / E = -\nu My / EI$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \tau_{xy} / G = 0$$

resultando

$$u = Mxy / EI + f(y)$$

$$v = -\nu My^2 / 2EI + g(x)$$

Ao se integrar essas equações e aplicar as condições de contorno referentes ao engaste obtém-se:

$$df(y) / dy + Mx / EI + dg(x) / dx = 0$$

É possível inferir que a igualdade só é obtida caso as funções exclusivas de x e y sejam também constantes e complementares, logo

$$f(y) = dy + f$$

$$g(x) = ex - Mx^2 / 2EI + g$$

e, assim,

$$u = \frac{M}{EI} xy + \frac{ML}{EI} y$$

$$v = -\frac{\nu M}{2EI} y^2 + \frac{ML}{EI} x - \frac{M}{2EI} x^2 - \frac{ML^2}{2EI}$$

Pelo princípio da superposição de efeitos, temos que os campos de deslocamentos do problema como um todo serão dados por:

$$u_g = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec} + \frac{M}{EI}xy + \frac{ML}{EI}y$$

$$v_g = -\frac{\nu H}{2Ec}y - \frac{\nu M}{2EI}y^2 + \frac{ML}{EI}x - \frac{M}{2EI}x^2 - \frac{ML^2}{2EI}$$

Exemplo 2: H e V na extremidade esquerda da chapa

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$V = -\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = V$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

De modo semelhante ao realizado para o exemplo 1, faz-se uma aproximação para a carga horizontal H , onde temos que a função de Airy correspondente deve apresentar um valor de tensão nulo para as componentes σ_y e τ_{xy} e, enquanto que a componente σ_x deve ser constante, de valor $H/2c$, logo:

$$\varphi_H = Hy^2/4c$$

e, portanto, temos que o campo de deslocamentos para uma situação de engaste será dado por:

$$u = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec}y$$

O processo de determinação para a carga vertical V é o mesmo apresentado em Timoshenko (1951) em seu livro “Theory of Elasticity”, onde se utiliza uma combinação da função de quarta ordem – assumindo-se apenas d_4 não nulo – e de segunda ordem com b_2 não nulo – caso de cisalhamento puro – para a descrição de um estado de tensão correspondente. Assim,

$$\varphi_V = d_4xy^3/6 + b_2xy$$

e, de modo análogo, as seguintes componentes de tensão,

$$\sigma_x = d_4xy$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -b_2 - d_4y^2/2$$

Impondo $y = \pm c$ livres de carregamento, e que a soma das tensões de cisalhamento atuantes na seção $x = 0$ deva ser igual a V , obtém-se:

$$b_2 = 3V/4c = Vc^2/2I$$

$$d_4 = -2b_2/c^2 = -3V/2c^3 = -V/I$$

Assim, tem-se que a função de Airy referente ao problema de uma viga engastada sob ação de carga concentrada V é dada por:

$$\varphi_V = -Vxy^3/6I + Vc^2xy/2I$$

e, portanto, que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = -Vxy/I$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -V(c^2 - y^2)/2I$$

A determinação do campo de deslocamento é dada por:

$$\varepsilon_x = -Vxy/EI$$

$$\varepsilon_y = \nu Vxy/EI$$

$$\gamma_{xy} = -V(c^2 - y^2)/2IG$$

Finalmente, tem-se que as componentes de deslocamento serão dadas por:

$$u = -Vx^2y/2EI + f(y)$$

$$v = \nu Vxy^2/2EI + g(x)$$

e,

$$-\frac{Vx^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Vy^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{V(c^2 - y^2)}{2IG}$$

De modo análogo ao realizado ao exemplo 1, obtém-se:

$$u = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + ey + g$$

$$v = \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 + dx + h$$

Aplicando-se as condições de contorno referentes ao engaste da chapa:

$$e + d = -Vc^2/2IG$$

$$g = 0$$

$$h = -VL^3/6EI - dl$$

$$d = -VL^2/2EI$$

Substituindo-se esses valores nas equações referentes aos campos de deslocamentos, obtém-se a resposta em deslocamentos para a aplicação de um carregamento vertical à extremidade oposta ao engaste.

$$u = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG}\right)y$$

$$v = \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

Pelo princípio da superposição de efeitos, tem-se que os campos de deslocamentos do problema como um todo serão dados por:

$$u_g = \frac{H}{2Ec}x - \frac{HL}{2Ec} - \frac{V}{2EI}x^2y - \frac{\nu V}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG}\right)y$$

$$v_g = -\frac{\nu H}{2Ec}y + \frac{\nu V}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

Exemplo 3: H na extremidade esquerda e carga uniformemente distribuída q na face superior

Em $x = 0$

$$N = \int_{-c}^c \sigma_x dy = H$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$(\sigma_x)_{y=\pm c} = 0$$

$$(\sigma_y)_{y=-c} = -q$$

$$(\sigma_y)_{y=+c} = 0$$

O processo matemático desenvolvido para obtenção da função de Airy referente ao carregamento horizontal H foi abordado ao longo do exemplo 1, por este motivo, omite-se o desenvolvimento dela nesta seção, apresentando-se apenas seu campo de deslocamentos

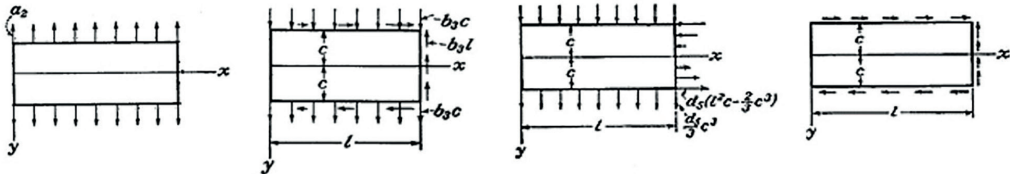
$$u = \frac{H}{2Ec} x - \frac{HL}{2Ec}$$

$$v = -\frac{\nu H}{2Ec} y$$

A descrição do campo de tensão obtido da aplicação de um carregamento uniforme na seção superior é dada pela seguinte função:

$$\varphi_q = \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{d_3}{6} y^3 + \frac{d_5}{6} x^2 y^3 - \frac{d_5}{30} y^5$$

Tal função é obtida da superposição dos campos de tensão de um polinômio de quinta ordem – considerando-se apenas o termo d_5 não nulo – com as soluções dos polinômios de segunda (não nulo) e terceira ordem (b_3 e d_3 não nulos). Sendo a composição de soluções apresentada a seguir.



Dessas relações, é possível inferir que:

$$a_2 = -q/2 = -qc^3/3I$$

$$b_3 = 3q/4c = qc^2/2I$$

$$d_3 = -3q/10c = -qc^2/5I$$

$$d_5 = -3q/4c^3 = -q/2I$$

A dedução de tal polinômio é apresentada em Timoshenko (1951). A partir das funções apresentadas, pode-se caracterizar o polinômio de Airy deste problema como:

$$\varphi_q = -\frac{qc^3}{3I} \frac{x^2}{2} + \frac{qc^2}{2I} \frac{x^2 y}{2} - \frac{qc^2}{5I} \frac{y^3}{6} - \frac{q}{2I} \left(\frac{x^2 y^3}{6} - \frac{y^5}{30} \right)$$

e, portanto, que as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{qc^2}{5I} y - \frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{qc^3}{3I} + \frac{qc^2}{2I} y - \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{qc^2}{2I} x - \frac{q}{2I} (xy^2)$$

A determinação do campo de deformações é dada por:

$$\varepsilon_x = (q(c^3 v / 3EI - c^2 v y / 2EI + v y^3 / 6EI - c^2 y / 5EI - x^2 y / 2EI + y^3 / 3EI))$$

$$\varepsilon_y = (q(c^2 v y / 5EI + v x^2 y / 2EI - v y^3 / 3EI + c^2 y / 2EI - c^3 / 3EI - y^3 / 6EI))$$

$$\gamma_{xy} = (qc^2 x / 2I - qxy^2 / 2I) / G$$

de onde obtém-se:

$$u = (qx(c^3 v / 3EI - c^2 v y / 2EI + v y^3 / 6EI - c^2 y / 5EI - x^2 y / 6EI + y^3 / 3EI)) + f(y)$$

$$v = (qy(c^2 v y / 10EI + v x^2 y / 4EI - v y^3 / 12EI + c^2 y / 4EI - c^3 / 3EI - y^3 / 24EI)) + g(x)$$

e

$$q \left(-\frac{c^2 v x}{2EI} + \frac{v x y^2}{2EI} - \frac{c^2 x}{5EI} - \frac{x^3}{6EI} + \frac{x y^2}{EI} \right) + \frac{df(y)}{dy} + \frac{q v x y^2}{2EI} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{q c^2 x}{2GI} - \frac{q x y^2}{2GI}$$

Pelo procedimento apresentado em “Theory of Elasticity”, obtém-se a seguinte relação para o campo de deslocamento:

$$u = (qx(c^3v/3EI - c^2vy/2EI + vy^3/6EI - c^2y/5EI - x^2y/6EI + y^3/3EI))$$

$$v = (qy(c^2vy/10EI + vx^2y/4EI - vy^3/12EI + c^2y/4EI - c^3/3EI - y^3/24EI)) + g(x)$$

onde

$$g(x) = -\left(\frac{q}{2EI}\right)\left(\left(1 + \frac{v}{2}\right)c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5}\right) + \delta = -\left(\frac{q}{2EI}\right)\left(\left(1 + \frac{v}{2}\right)c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5}\right) + \left(\frac{5qL^4}{24EI}\right)\left(1 + \frac{12c^2}{5L^2}\left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2}\right)\right)$$

Finalmente, tem-se que a resposta em deslocamento para o exercício proposto é dada pela superposição dos efeitos, assim:

$$u = u_H + u_q \text{ \& } v = v_H + v_q$$

Exemplo 4: V na extremidade esquerda e carga uniformemente distribuída q na face superior

Em $x = 0$

$$V = \int_{-c}^c \tau_{xy} dy = V$$

$$M = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0$$

Em $x = L$

$$u(L, 0) = 0$$

$$v(L, 0) = 0$$

$$\partial v(L, 0)/\partial x = 0$$

Em $y = \pm c$

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0$$

$$(\sigma_y)_{y=-c} = -q$$

$$(\sigma_y)_{y=+c} = 0$$

Uma vez conhecido o comportamento do campo de tensões e deformações de ambas situações, a resposta final será dada pela composição de ambas. Entretanto, devido à grande complexidade da solução, apresenta-se a mesma por etapas,

$$\varphi_V = -Vxy^3/6I + Vc^2xy/2I$$

$$\varphi_q = -\frac{qc^3}{3I}\frac{x^2}{2} + \frac{qc^2}{2I}\frac{x^2y}{2} - \frac{qc^2}{5I}\frac{y^3}{6} - \frac{q}{2I}\left(\frac{x^2y^3}{6} - \frac{y^5}{30}\right)$$

$$\varphi = \varphi_V + \varphi_q$$

As tensões são dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{Vxy}{I} - \frac{qc^2}{5I}y - \frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{qc^3}{3I} + \frac{qc^2}{2I}y - \frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3\right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{V(c^2 - y^2)}{2I} + \frac{qc^2}{2I}x - \frac{q}{2I}(xy^2)$$

e, finalmente, após a aplicação das condições de contorno, tem-se:

$$u_V = -\frac{V}{2EI}x^2y - \frac{vV}{6EI}y^3 + \frac{V}{6GI}y^3 + \left(\frac{VL^2}{2EI} - \frac{Vc^2}{2IG}\right)y$$

$$v_V = \frac{vV}{2EI}xy^2 + \frac{V}{6EI}x^3 - \frac{VL^2}{2EI}x + \frac{VL^3}{3EI}$$

$$u_q = \left(qx(c^3v/3EI - c^2vy/2EI + vy^3/6EI - c^2y/5EI - x^2y/6EI + y^3/3EI)\right)$$

$$v_q = (qy(c^2vy/10EI + vx^2y/4EI - vy^3/12EI + c^2y/4EI - c^3/3EI - y^3/24EI)) + g(x)$$

onde

$$g(x) = -\left(\frac{q}{2EI}\right)\left(\left(1 + \frac{v}{2}\right)c^2x^2 - \frac{c^2x^2}{5}\right) + \left(\frac{5qL^4}{24EI}\right)\left(1 + \frac{12c^2}{5L^2}\left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2}\right)\right)$$

E assim,

$$\begin{aligned}u &= u_V + u_q \\v &= v_V + v_q\end{aligned}$$

Exemplo 5: carga linearmente variável na face superior

Em $y = \pm c$

$$\begin{aligned}(\tau_{xy})_{y=\pm c} &= 0 \\(\sigma_y)_{y=-c} &= -qx \\(\sigma_y)_{y=+c} &= 0\end{aligned}$$

Partindo-se de uma abordagem mista, que leva em conta fundamentos provenientes da mecânica dos sólidos, além de considerar válida a superposição de efeitos, uma possível função de Airy terá um grau superior ao obtido da aplicação do carregamento uniforme q , assim busca-se uma função de sexta ordem que apresente termos cruzados, isto é, termos contendo $x^n y^m$. Assim, assume-se inicialmente um polinômio dado por:

$$\varphi = b_2xy + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{d_4}{6}xy^3 + \frac{d_6}{6}x^3y^3 + \frac{f_6}{20}xy^5$$

Tal equação só é considerada válida se, e somente se,

$$f_6 = -2d_6$$

Logo,

$$\varphi = b_2xy + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{d_4}{6}xy^3 + \frac{d_6}{2}y^3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{5}\right)$$

Aplicando as condições de contorno referentes às fibras inferiores e superiores, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_4xy + d_6(x^3y + 2xy^3) \\ \sigma_y &= a_3x + b_4xy + d_6xy^3 \\ \tau_{xy} &= b_2 + \frac{1}{2}(b_4x^2 + d_4y^2) + \frac{d_6}{2}(3x^2y^2 + y^4)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_3 = q/2$$

$$b_2 = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right)$$

$$b_4 = -3q/4c$$

$$d_4 = \frac{q}{2c^2}$$

$$d_6 = q/4c^3$$

Substituindo-se as constantes acima na equação, obtém-se:

$$\varphi = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right)xy + \frac{q}{12}x^3 - \frac{3q}{8c}x^3y + \frac{q}{12c^2}xy^3 + \frac{q}{8c^3}y^3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{5}\right)$$

Aplicando as condições de contorno referentes às fibras inferiores e superiores, obtém-se

$$\sigma_x = \frac{q}{2c^2}xy + \frac{q}{4c^3}(x^3y + 2xy^3)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2}x + -\frac{3q}{4c}xy + \frac{q}{4c^3}xy^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{c}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3q}{4c}x^2 + \frac{q}{2c^2}y^2\right) + \frac{q}{8c^3}(3x^2y^2 + y^4)$$

Finalmente, o campo de deslocamentos é obtido por:

$$u = (qx^2(4cy - 4c^3v - 2vy^3 + x^2y + 4y^3 + 18c^2vy))/(16Ec^3) + f(y)$$

$$v = -(qxy(18c^2y + 2vy^3 - 8c^3 - y^3 + 2vx^2y + 4cvy))/(16Ec^3) + g(x)$$

e da relação $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = \tau_{xy}/G$, obtém-se

$$\frac{1}{16Ec^3}(qx^2(4c + 18c^2v - 6vy^2 + x^2 + 12y^2)) - \frac{1}{16Ec^3}(qy(18c^2y + 2vy^3 - 8c^3 - y^3 + 2vx^2y + 4cvy)) - \frac{1}{G}\left(\frac{qy^2}{4c^2} - \frac{9qx^2}{8c} - \frac{q(c/4 + 1)}{2} + \frac{qy^4}{20c^3} + \frac{3qy^2(x^2 + y^2/5)}{8c^3}\right) - \frac{niqx^2y^2}{4Ec^3} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Observa-se que a equação acima só é válida, se e somente se, todos os termos forem constantes. Resolvendo o sistema é possível obter os termos restantes da equação de deslocamento.

5. CHAPAS EM COORDENADAS POLARES

5.1 Tensões em coordenadas polares

Frequentemente deseja-se resolver problemas que têm alguma forma de simetria rotacional (por exemplo, encontrar a tensão em um tubo circular). Tais problemas ficam mais simples se as equações forem escritas em coordenadas polares. Considere-se um pequeno elemento, como mostrado na Fig. 1.10, então as tensões serão descritas em termos de componentes radial e tangencial (r e θ). Podem ainda ser consideradas forças de massa R e S . Os lados do elemento valem dr e $r d\theta$, de forma que o equilíbrio de forças na direção radial é

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(2\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right)\frac{d\theta}{2}dr + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr + R r d\theta dr = 0$$

Dividindo por r e desconsiderando infinitésimos de ordem superior, obtém-se a equação de equilíbrio na direção radial:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (1.25)$$

Da mesma forma a consideração de forças na direção tangencial leva a equação de equilíbrio na direção tangencial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \quad (1.26)$$

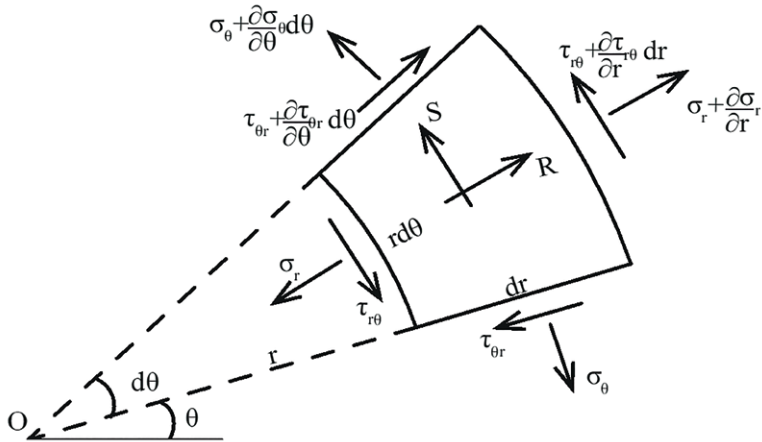


Figura 1.10

Para resolver essas equações procuram-se funções de tensão tais que

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.27)$$

Em coordenadas polares,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

levando a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = 0 \quad (1.28)$$

com as componentes de tensão dadas por

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (1.29)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

Coordenadas polares são muito úteis para resolver problemas de elasticidade de flexão, furos circulares, tubos e aplicação pontual de forças.

5.2 Deformações em coordenadas polares

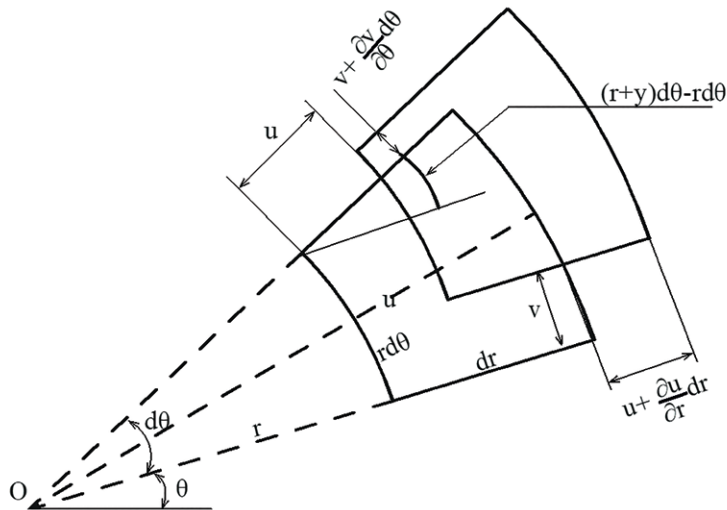


Figura 1.11

As deformações longitudinais em coordenadas polares podem ser escritas a partir da observação da Fig. 1.11:

$$\epsilon_r = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.30)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

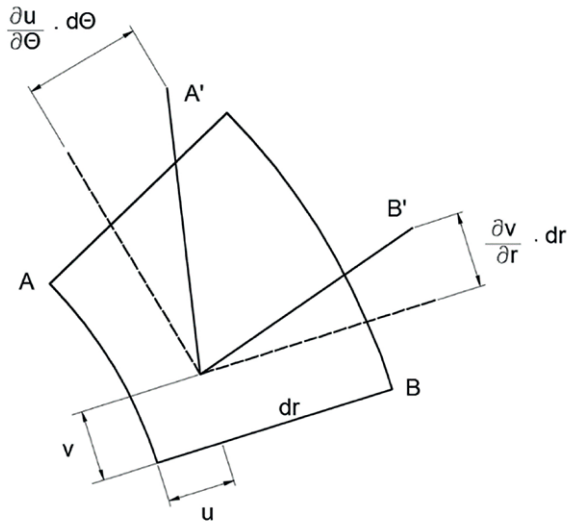


Figura 1.12

Observando a Fig. 1.12, obtém-se a distorção:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\theta}{rd\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.31)$$

5.3 Relações entre coordenadas polares e cartesianas

Ao passar de coordenadas cartesianas para polares, introduz-se um outro tipo de transformação de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas, trata-se com as direções x e y . Nas polares, trata-se de direções radial e tangencial, que são também ortogonais. Por isso, relações entre propriedades em um ponto que não contém derivadas espaciais são muito similares. Por exemplo, a lei de Hooke se escreve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{aligned} \quad (1.32)$$

A relação entre as componentes de tensão nos dois sistemas de coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{1.33}$$

5.4 Tensões em um tubo de paredes grossas

Considerem-se as tensões nas paredes de um tubo sob pressão interna p_i e externa p_o . Nota-se, primeiro, que este é um problema de estado plano de deformações. Além disso, o caso é simétrico com respeito ao eixo do tubo, de forma que sendo essa a origem das coordenadas polares, então qualquer solução será função apenas de r .

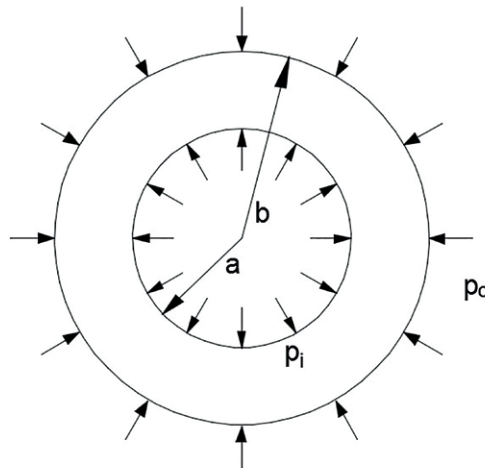


Figura 1.13

Adotando uma função de tensão dependente só de r , a equação (1.27) fica

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

uma equação diferencial ordinária. Sua solução geral é

$$\varphi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D\tag{1.34}$$

Tomando $B = 0$ e calculando obtém-se

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

Impondo as condições de contorno, as pressões internas (em $r = a$) e externa (em $r = b$), tem-se

$$\begin{aligned} -p_i &= \frac{A}{a^2} + 2C, \\ -p_0 &= \frac{A}{b^2} + 2C, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}, \\ C &= \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{2(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

5.5 Solução geral para simetria polar

Em coordenadas polares em 2D, se o problema tem simetria rotacional com respeito à origem, a função de tensão só depende do raio e tem-se uma equação diferencial ordinária. A solução geral tem quatro constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições de contorno. Se forem determinadas as tensões tem-se:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \quad (1.35)$$

Quando $r = 0$ aparece uma *singularidade*, pois $\log(0)$ não é definido. Se o problema tem um orifício na origem (como no caso do tubo) isto não ocorre. Entretanto, se não há um furo na origem, os 2 primeiros termos da tensão são singulares. Como a tensão não pode ser infinita em nenhum ponto do corpo, conclui-se que $A = B = 0$. Assim, para uma placa sem um furo na origem, há apenas uma solução possível para a distribuição de tensões simétrica em relação à origem, $\sigma_r = \text{constante}$.

5.6 O método da separação de variáveis

Uma boa parte da Teoria da Elasticidade recai na solução de equações envolvendo derivadas parciais de uma função de 2 ou mais variáveis. Muitos métodos foram desenvolvidos para essa tarefa, tanto numéricos (como o Método dos Elementos Finitos) como analíticos. Um deles é o chamado *método da separação de variáveis*. Nele assumimos que a solução da equação diferencial a derivadas parciais é dada pelo produto de 2 funções, cada uma dependente de apenas uma das variáveis. Ou seja:

$$\varphi(r, \theta) = R(r)\theta(\theta) \quad (1.36)$$

Se esta função for substituída na equação diferencial, com frequência ela se divide em seções separadas que podem ser resolvidas separadamente. Considere-se que

$$\theta(\theta) = \cos 2\theta$$

que substituída na equação diferencial resulta em

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{4}{r^2} R\right) \cos 2\theta = 0$$

que deve se verificar para qualquer valor de θ , de onde conclui-se que

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{4}{r^2} R\right) = 0 \quad (1.37)$$

A solução geral dessa equação diferencial ordinária é

$$R(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D$$

e assim, a função de tensão completa é

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D\right) \cos 2\theta \quad (1.38)$$

Dela podem-se calcular as tensões:

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (1.39)$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta$$

A existência de termos com o raio no denominador implica em uma singularidade na origem. Portanto, essa solução se presta a problemas de chapas com um orifício na origem. O termo $\cos 2\theta$ implica em simetria com relação aos eixos x e y .

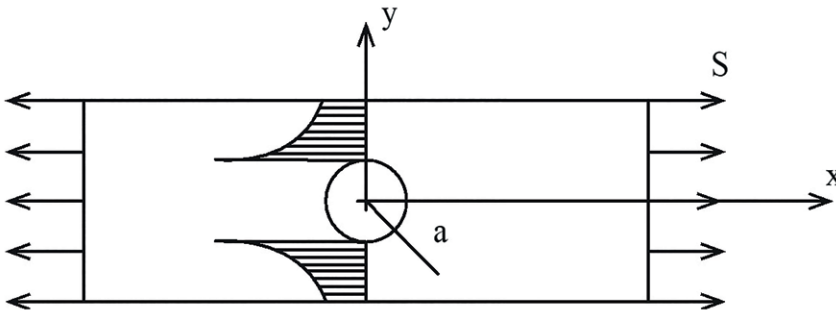


Figura 1.14

Resolve-se, a seguir, analiticamente, o problema de encontrar as tensões em uma chapa retangular sob condições de contorno na forma de tração uniforme S na direção do eixo x , nas extremidades esquerda e direita, e um furo circular de raio a no centro, conforme Fig. 1.14. Pelo princípio de Saint-Venant a influência da existência do furo se limita a uma região ao seu redor, de forma que a uma certa distância do furo a chapa está submetida a uma tensão uniforme S na direção de x . Adota-se uma função de tensão na forma:

$$\varphi(r, \theta) = (A_1 \log r + C_1 r^2) + \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (1.40)$$

resultando em:

$$\sigma_r = \left(\frac{A_1}{r^2} + 2C_1 \right) - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.41)$$

Para distâncias grandes, i.e., r tendendo ao infinito, a tensão normal tende a

$$\sigma_r = 2C_1 - 2A \cos 2\theta \quad (1.42)$$

que, se adotar $A = -C_1 = -S/4$, leva a

$$\sigma_r = \frac{S}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (1.43)$$

resultado que concorda com o valor da tensão a grandes distâncias. A condição de contorno no interior do círculo é que a tensão radial se anule. Adotando $r = a$, o raio do círculo, tem-se

$$\sigma_r = 0 = \left(\frac{A_1}{r^2} + \frac{S}{2} \right) - \left(-\frac{S}{2} + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.44)$$

Como esta equação tem que se verificar para qualquer valor de θ (ao redor do furo), os termos entre parêntesis devem ser separadamente nulos. Isto dá

$$A_1 = -\frac{S}{2} a^2, \quad \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = \frac{S}{2} \quad (1.45)$$

Calculando, agora, a tensão de cisalhamento, tem-se

$$\tau_{r\theta} = \left(2A + 6Br^4 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (1.46)$$

Aqui, é necessário que $B = 0$ para que a solução tenha sentido para raios tendendo ao infinito. De novo, o perímetro do furo não deve ter tensões radiais para qualquer valor de θ , levando a:

$$2A - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0 \quad (1.47)$$

Combinando essas relações obtém-se

$$\frac{4BrD}{E} = a^2 \frac{S}{2}, \quad C = -\frac{Sa^4}{4} \theta \quad (1.48)$$

que finalmente dá a função de tensão

$$\varphi(r, \theta) = \frac{Sa^4}{4} \left[\frac{r^2}{a^2} - 2 \log r - \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^2}{r^2} - 2 \right) \cos 2\theta \right] \quad (1.49)$$

a qual pode ser usada para derivar os campos de tensão na chapa.

5.7 Deslocamentos em coordenadas polares

As Eqs. (1.30) e (1.31) relacionam deformações e deslocamentos

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.50)$$

Pode-se, agora, examinar porque a constante B deve ser nula. Calculando as tensões e substituindo encontra-se que

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (1.51)$$

$B \neq 0$, portanto, leva a um termo que depende somente de θ . Este termo não tem apenas um valor. Começando em um ponto (r, θ) , e aumentando θ por 2π , obtém-se o ponto $(r, \theta + 2\pi)$ o qual é o mesmo ponto, de forma que pode-se esperar que a solução seja a mesma. Com expressões envolvendo $\cos \theta$, $\sin \theta$ etc. isso seria o caso. Entretanto, um termo $\frac{4Br\theta}{E}$ mudaria. Há, também, situações onde soluções com múltiplos valores podem ser consideradas, em que há condições de contorno adicionais no problema que removem a ambiguidade. Entretanto, no geral, toma-se $B = 0$.

5.8 Outras aplicações em coordenadas polares

5.8.1 Segmento de coroa circular sob flexão pura

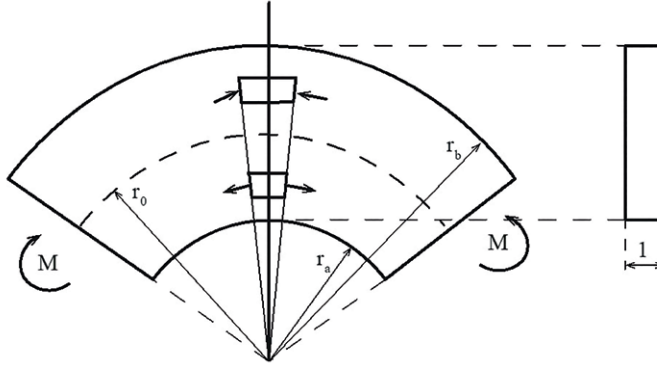


Figura 1.15

Considere-se a barra curva da Fig. 1.15 com seção retangular estreita constante, fletida por momentos M aplicados nas extremidades, resultando em momentos fletores constantes ao longo do comprimento da peça e distribuição de tensões iguais em todas as seções transversais radiais. Os raios interno, do eixo e externo são, respectivamente, r_a , r_o , e r_b . Um raio genérico é r .

As componentes de tensão são:

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \log \frac{r_b}{r_a} + r_b^2 \log \frac{r}{r_a} + r_a^2 \log \frac{r_a}{r} \right) \quad (1.52)$$

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \log \frac{r_b}{r_a} + r_b^2 \log \frac{r}{r_a} + r_a^2 \log \frac{r_a}{r} + r_b^2 - r_a^2 \right)$$

em que

$$N = (r_b^2 - r_a^2)^2 - 4r_a^2 r_b^2 \left(\log \frac{r_b}{r_a} \right) \quad (1.53)$$

5.8.2 Cunha carregada radialmente no vértice

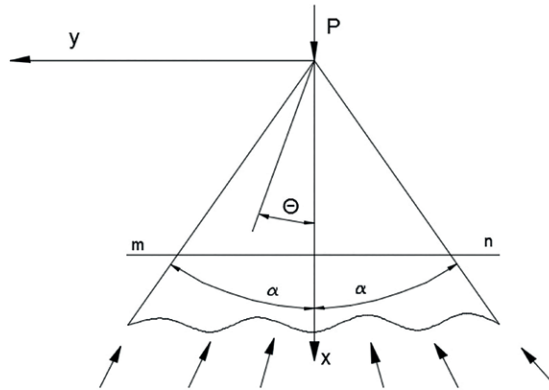


Figura 1.16

A distribuição radial de tensão simples do item anterior pode ser utilizada neste exemplo simétrico de uma cunha de espessura unitária carregada no vértice, como mostrado na Fig. 1.16. Assim,

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} \right)} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.54)$$

5.8.3 Cunha carregada transversalmente no vértice

Um caso complementar é o da carga no vértice da cunha transversalmente ao seu eixo de simetria. Aqui, o ângulo θ é medido a partir direção da força, vertical na Fig.1.17. As tensões são, novamente

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} \right)} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.55)$$

Para ângulo de abertura da cunha α pequeno, as tensões em uma seção $m-n$ são, aproximadamente:

$$\sigma_x = -\frac{Pyx}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \right] \quad \tau_{xy} = -\frac{Px^2}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta \right] \quad (1.56)$$

em que I é o momento de inércia da seção $m-n$.

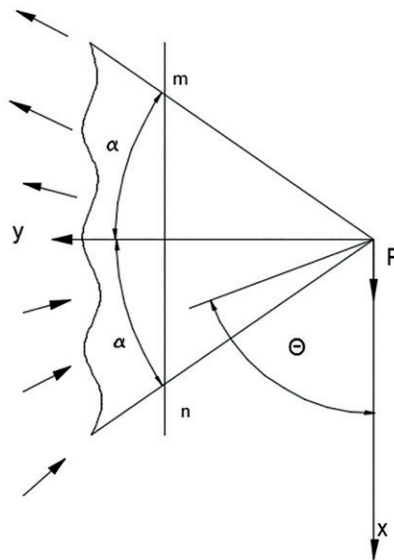


Figura 1.17

6. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM CHAPAS

Os problemas da Engenharia são analisados desenvolvendo modelos conceituais da realidade. Por exemplo, se uma aeronave é observada, pode-se dividi-la em modelos estruturais simplificados como vigas, chapas, placas etc. A seguir, partindo dos conceitos da Mecânica dos Sólidos (que inclui a Teoria da Elasticidade) desenvolve-se um modelo matemático. Nele figuram as incógnitas do problema, função das variáveis independentes, x , y , z (coordenadas espaciais) e, na Dinâmica, do tempo t .

No caso especial da Mecânica dos Sólidos essas incógnitas são escolhidas, no chamado Processo dos Deslocamentos, como sendo os deslocamentos dos infinitos pontos do contínuo que é o sólido:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix}$$

O modelo matemático, em si, é constituído por uma ou mais equações diferenciais, na forma geral:

$$[L]\{u\} = \{f(x, y, z, t)\}$$

onde $[L]$ é um operador diferencial. Acresce-se a essas equações as condições de contorno (e as condições iniciais, nos problemas dinâmicos). Essa é a chamada “formulação forte” do problema.

Para o caso geral de domínios em que se espera grande variação das incógnitas e condições de contorno complicadas, típicas dos problemas reais da Engenharia, soluções fechadas explícitas para as equações diferenciais são, em geral, impossíveis de serem obtidas. Por essa razão, procura-se substituir o contínuo por uma discretização em um número finito de incógnitas chamadas usualmente de “graus de liberdade” em número n .

A técnica usual é aproximar o vetor de incógnitas (deslocamentos) por uma superposição de funções mais simples chamadas “Trial Functions”, ou funções de forma, ou, ainda, funções de interpolação, cada uma delas afetada por um coeficiente a ser convenientemente avaliado para se obter a “melhor aproximação”:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q(t)\}$$
$$[N] = [N(x, y, z)]$$

onde $[N]$ é uma matriz que contém as *funções de forma*, que só dependem das variáveis independentes x, y, z , e $\{q(t)\}$ é o vetor de coeficientes incógnitos das funções, em número igual ao dos graus de liberdade, independente das variáveis x, y, z .

A “melhor aproximação” é conseguida impondo-se um princípio físico como o Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PTV), o Método de Rayleigh-Ritz, as Equações de Lagrange etc. Uma outra técnica, também usual, puramente matemática, é a minimização do resíduo ponderado resultante da discretização por “Trial Functions”:

$$[R] = [L]\{\tilde{u}\} - \{f\}$$
$$\int [W][R]dV = 0$$

onde $[W]$ são as funções de ponderação. Essas funções são escolhidas de acordo com uma estratégia a ser adotada para minimização do resíduo. São usuais: colocação, subdomínios, mínimos quadrados e, a mais popular, a técnica de Galerkin. A aplicação de qualquer dessas técnicas de aproximação, que resultam em formulações integrais, são as chamadas “formas fracas” dos problemas.

Neste texto, por se contemplar além da estática a Dinâmica de Estruturas, o desenvolvimento básico se fará pelas Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, \quad i = 1 \text{ a } n \quad (1.57)$$

onde se define a função Lagrangiana

$$L = V - T, \quad \text{com} \quad V = U - W \quad (1.58)$$

e N_i é uma componente das forças aplicadas, inclusive as de amortecimento, V é a Energia Potencial Total, U a Energia de Deformação e W o trabalho das forças externas aplicadas.

6.1 Ideia e histórico do Método dos Elementos Finitos (MEF)

No Método dos Elementos Finitos (MEF), em inglês “Finite Element Method (FEM)”, o domínio do problema é dividido em subdomínios (barras, triângulos, quadriláteros, tetraedros etc.) de dimensões pequenas, mas finitas, denominados *elementos*, unidos em pontos denominados *nós*. A seguir, os deslocamentos no interior dos elementos são aproximados pela superposição de funções de forma:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q(t)\}$$

onde, agora, $[N]$ contém funções especialmente escolhidas de forma a assumirem valor unitário em um dado nó de um elemento, variando até zero nos demais nós de cada elemento. Assim, cada uma dessas funções só é diferente de zero no interior de um só elemento do conjunto. Com essa definição para as funções, o vetor $\{q\}$ tem a interpretação física de conter os deslocamentos, ainda incógnitos, dos nós de cada elemento. Essa forma de escolha das funções de forma é a essência do método. Todo o restante é a aplicação de princípios físicos ou matemáticos de ajuste do valor dos deslocamentos.

Historicamente, a primeira aplicação de aproximação por “Trial functions” foi feita por Lord Rayleigh em seu “Theory of Sound”, de 1870, na determinação de frequências e modos de vibração de cordas retesadas. Ritz retomou o método em 1910. Na década seguinte, Galerkin apresentou soluções de problemas de engenharia por séries trigonométricas no Método dos Resíduos Ponderados. Courant, em 1943, praticamente usou o MEF na solução de problemas de torção com divisão do domínio em subdomínios triangulares. Com o advento dos computadores eletrônicos, na década de 1940, os engenheiros de estruturas lançaram as bases do MEF. Argyris, em 1954, apresentou o elemento retangular de 4 nós, e Martin, Clough, Turner e Topp apresentaram o elemento triangular de 3 nós em 1956, os dois trabalhos no contexto da engenharia de estruturas aeronáuticas. Finalmente, Clough, em 1960, cunhou a expressão Método dos Elementos Finitos, que se tornou clássica.

6.2 Resumo de Mecânica dos Sólidos em 2D, em forma matricial

Os deslocamentos de um ponto de um contínuo sólido são simbolizados pelo vetor $\{u\}$.

No caso de uma chapa, um domínio bidimensional de eixos x e y , tem-se o vetor 2×1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{Bmatrix}$$

A partir dos deslocamentos, obtêm-se as deformações do sólido pela aplicação de um operador diferencial:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$$

Em uma chapa, o operador é 3×2 :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

O próximo passo é obter o vetor de tensões, a partir do de deformações, usando, por simplicidade, a lei de Hooke, em forma matricial:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][L]\{u\}$$

No caso da chapa, o vetor tensão é 3 x 1:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Em Estado Plano de Tensões, a lei de Hooke é expressa pela matriz 3 x 3:

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde ν é o Coeficiente de Poisson.

Será necessário, no desenvolvimento que se segue, ter, também, a formulação da Energia de Deformação para um sólido elástico, o escalar:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

que compõe a Energia Potencial Total (EPT)

$$V = U - W$$

sendo W o trabalho das forças externas aplicadas. Essas forças são de 3 tipos. As forças de massa (por exemplo, o peso próprio), as forças aplicadas em parte da superfície do elemento, e as forças concentradas nos nós da discretização pelo MEF, que se verá no próximo item.

No caso das duas primeiras, tem-se:

$$W_m = \int_V \{u\}^T \{f_m(x, y, z, t)\} dV$$

$$W_s = \int_S \{u\}^T \{f_s(x, y, z, t)\} dS$$

Deve-se notar que aqui não aparece o fator $\frac{1}{2}$ da expressão da Energia de Deformação. Naquele caso, as deformações crescem à medida que as forças crescem. Aqui, as forças já têm seu valor final e são multiplicadas pelos deslocamentos finais.

Na dinâmica, é levada em conta também a energia cinética, na forma

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV$$

onde $\{\dot{u}\}$ é o vetor das velocidades (a derivada primeira no tempo é simbolizada pelo ponto sobrescrito, na convenção de Newton), e ρ é a massa específica do material.

6.3 Aproximação da Mecânica dos Sólidos pelo MEF

Adota-se, agora, a aproximação dos deslocamentos, dentro de cada elemento,

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q\}$$

lembrando que no MEF $[N]$ contém funções especialmente escolhidas de forma a assumirem valor unitário em um dado nó de um elemento, variando até zero nos demais nós de cada elemento. Assim, cada uma dessas funções só é diferente de zero no interior de um só elemento do conjunto. A matriz $[N]$, função das coordenadas, tem dimensões 2×6 no caso da chapa.

Como já foi dito, o vetor $\{q\}$ tem a interpretação física de conter os deslocamentos, ainda incógnitos, dos nós de cada elemento, e é função apenas do tempo, no caso da dinâmica. Em um elemento triangular de chapa de 3 nós com 2 graus de liberdade por nó, tem dimensões 6×1 , conforme Figura 1.18.



Figura 1.18 Coordenadas generalizadas em um elemento de chapa

Todas as expressões do item anterior, escritas para o contínuo, são agora aproximadas.

As deformações (aproximadas) passam a ser

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [L]\{\tilde{u}\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

No caso da chapa, 3×6 . O vetor tensões, aproximado, é

$$\{\tilde{\sigma}\} = [E]\{\tilde{\varepsilon}\} = [E][B]\{q\}$$

O que permite escrever a Energia de Deformação do elemento, aproximada,

$$\tilde{U}_e = \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\tilde{\sigma}\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\}$$

O vetor de velocidades, aproximado é:

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{\dot{q}\}$$

e a Energia Cinética do elemento, aproximada, é dada por

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\}$$

6.4 Equações de Lagrange, em um Elemento

A seguir, aplicam-se as Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, \quad i = 1 \text{ a } n$$

A função Lagrangiana, aproximada, em um elemento, pode ser considerada uma função escalar de múltiplas variáveis independentes,

$$\tilde{L}_e = \tilde{V}_e - \tilde{T}_e$$

onde,

$$\tilde{V}_e = \tilde{U}_e - \tilde{W}_e$$

O trabalho das forças externas aplicadas ao elemento é:

$$\tilde{W}_e = \int_V \{\tilde{u}\}^T \{f_m\} dV + \int_S \{\tilde{u}\}^T \{f_s\} dS + \{q\}^T \{Q\}$$

ou

$$\tilde{W}_e = \{q\}^T \left(\int_V [N]^T \{f_m\} dV + \int_S [N]^T \{f_s\} dS \right) + \{q\}^T \{Q\}$$

onde $\{Q\}$ é um vetor com n componentes, contendo as forças elásticas restauradoras aplicadas nos nós dos elementos, conforme Figura 1.19.

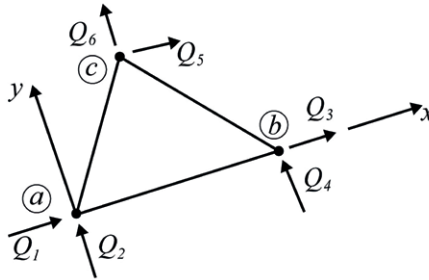


Figura 1.19 Forças elásticas restauradoras aplicadas aos nós de um elemento de chapa

Aplicando-se as Equações de Lagrange, obtém-se

$$\left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\} + \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\} = \int_V [N]^T \{f_m\} dV + \int_S [N]^T \{f_s\} dS + \{Q\}$$

onde se pode definir a matriz de rigidez do elemento:

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

com dimensões $n \times n$, simétrica e singular, e a matriz de massas do elemento

$$[m] = \int_V \rho [N]^T [N] dV$$

com dimensões $n \times n$, simétrica.

Também podem-se definir os vetores de forças nodais devidas aos carregamentos de massa e superfície, no elemento.

6.5 Elemento triangular de chapa com 3 nós no SLR (Sistema Local de Referência)

Para um elemento de chapa triangular de 3 nós, a, b, c , com 2 graus de liberdade por nó, em Estado Plano de Tensões, com variação linear de deslocamentos e tensões constantes:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, adotam-se funções de forma lineares

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = N_{22} = \frac{1}{2A} [x_b y_c - x_c y_b + x(y_b - y_c) + y(x_c - x_b)]$$

$$N_{13} = N_{24} = \frac{1}{2A} [x_c y_a - x_a y_c + x(y_c - y_a) + y(x_a - x_c)]$$

$$N_{15} = N_{26} = \frac{1}{2A} [x_a y_b - x_b y_a + x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a)]$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix}$$

é a área do triângulo a, b, c. Essas funções são apresentadas nas Figs. 1.20 a 1.22.

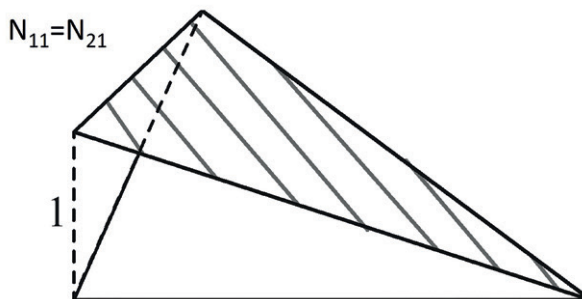


Figura 1.20 Funções de interpolação N_{11} e N_{21} de um elemento de chapa

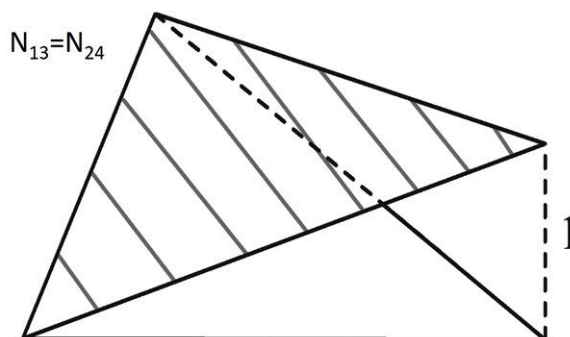


Figura 1.21 Funções de interpolação N_{13} e N_{24} de um elemento de chapa

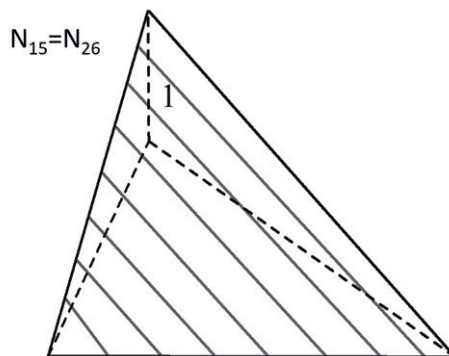


Figura 1.22 Funções de interpolação N_{15} e N_{26} de um elemento de chapa

Com isso, tem-se

$$[B] = [L][N] = \frac{1}{2A} \times \begin{bmatrix} y_b - y_c & 0 & y_c - y_a & 0 & y_a - y_b & 0 \\ 0 & x_c - x_b & 0 & x_a - x_c & 0 & x_b - x_a \\ x_c - x_b & y_b - y_c & x_a - x_c & y_c - y_a & x_b - x_a & y_a - y_b \end{bmatrix}$$

Como a matriz $[B]$ é constante, a matriz de rigidez do elemento triangular de chapa de 3 nós e 2 graus de liberdade por nó, com deslocamentos lineares, tensões constantes, no sistema local de referência fica

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV = [B]^T [E] [B] A t$$

onde t é a espessura constante do elemento. A matriz de massa consistente é

$$[m] = \rho t \int_S [N]^T [N] dS$$

Para outros elementos mais complexos, as integrais do tipo

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

e

$$[m] = \rho \int_V [N]^T [N] dV$$

podem não ter forma fechada ou serem muito trabalhosas de serem obtidas explicitamente. Nesses casos, apela-se para a integração numérica com algoritmos como a Quadratura de Gauss.

Uma matriz de massa simplificada para o elemento de chapa triangular, não consistente, atribui a cada grau de liberdade um terço da massa do elemento.

6.6 Transformação do sistema local para o sistema global da estrutura

No caso do elemento de chapa triangular de 3 nós, com 2 graus de liberdade por nó, tem-se a matriz de rotação 6×6 , e as matrizes de rigidez e de massa do elemento no sistema global de referência são:

$$[K]_e = [T]^T [k] [T]$$

$$[M]_e = [T]^T [m] [T]$$

Entretanto, o mais racional é já fazer os triângulos referenciados ao Sistema Global e usar diretamente as coordenadas dos nós nesse Sistema. Ainda neste caso, a matriz de massa é invariante à rotação.

6.7 “Espalhamento”

Tendo as matrizes e vetores de elemento no sistema global de referência, o passo seguinte é a montagem das matrizes de rigidez e de massa e do vetor de carregamento global da estrutura para se ter o sistema de equações do movimento do Processo dos Deslocamentos.

O algoritmo para tanto se constitui de uma matriz de incidência que dá a correspondência entre os graus de liberdade do elemento e os graus de liberdade da estrutura. Trata-se de um problema simples de lógica e programação.

6.8 Imposição das condições de contorno

Tendo a expressão das equações do movimento no sistema global de referência é necessário introduzir a vinculação do problema. Quando a vinculação determina que certos “graus de liberdade” correspondem a deslocamentos nulos (vinculados), basta anular as linhas e colunas correspondentes, diminuindo-se, dessa forma, as dimensões do sistema. As matrizes resultantes são denominadas *reduzidas*.

A situação é mais complicada quando se determinam, previamente, valores constantes não nulos para certos deslocamentos. De novo se zeram os elementos das linhas correspondentes, exceto os elementos da diagonal principal que é forçada a assumir valor unitário. Essa técnica destrói a simetria do problema, o que não é desejável. Algoritmos alternativos contornam o problema.

6.9 Matriz de rigidez de elemento finito retangular em estado plano de tensão (Argyris, 1954)

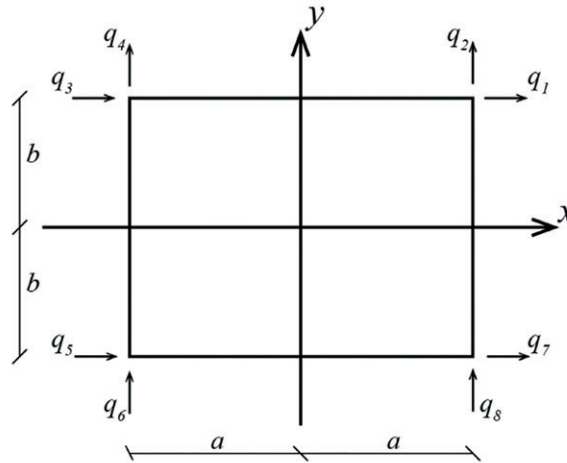


Figura 1.23 Elemento finito retangular $2a \times 2b \times t$

6.9.1 Vetor dos deslocamentos nodais do elemento 8×1

$$\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T$$

6.9.2 Vetor deslocamento no interior do elemento 2×1

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{Bmatrix}$$

aproximação de elementos finito

$$\{\tilde{u}\} = [N]\{q\}$$

6.9.3 Matriz de funções de forma

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{13} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 & N_{17} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} & 0 & N_{28} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = N_{22} = \frac{1}{4ab}(x+a)(y+b)$$

$$N_{13} = N_{24} = -\frac{1}{4ab}(x-a)(y+b)$$

$$N_{15} = N_{26} = \frac{1}{4ab}(x-a)(y-b)$$

$$N_{17} = N_{28} = -\frac{1}{4ab}(x+a)(y-b)$$

6.9.4 Vetor deformações 3x1

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Aproximação de elementos finitos

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [L]\{\tilde{u}\} = [L][N]\{q\} = [B]\{q\}$$

onde

$$[B] = [L][N]$$

6.9.5 Vetor tensões 3x1

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][L]\{u\}$$

Aproximação de elementos finitos

$$\{\tilde{\sigma}\} = [E]\{\tilde{\varepsilon}\} = [E][B]\{q\}$$

onde a matriz elástica é

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

6.9.6 Energia de deformação

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Aproximação de elementos finitos

$$\tilde{U}_e = \frac{1}{2} \int_V \{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\tilde{\sigma}\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{q\}$$

6.9.7 Forças elásticas

Onde se pode definir a matriz de rigidez do elemento:

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

6.9.8 Matriz de rigidez do elemento retangular

$$[k] = [k_d] + [k_s] \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[k_d] = E' t \times \begin{bmatrix} \frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} \\ & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} \\ & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} & \frac{\nu}{4} \\ & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{6a} \\ & & & & \frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} & -\frac{b}{3a} & \frac{\nu}{4} \\ & & & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} & \frac{b}{3a} \\ & & & & & & \frac{b}{3a} & -\frac{\nu}{4} \\ & & & & & & & \frac{b}{3a} \end{bmatrix}$$

$$[k_s] = Gt \times \begin{bmatrix} \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & \frac{1}{4} \\ & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} & \frac{a}{6b} \\ & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{3b} & -\frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} & \frac{1}{4} \\ & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} \\ & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & \frac{a}{6b} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{6b} \\ & & & & & & \frac{a}{3b} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & \frac{a}{3b} \end{bmatrix}$$

6.9.9 Matriz de massa do elemento retangular

Uma matriz de massa simplificada para o elemento de chapa retangular, não consistente, atribui a cada grau de liberdade um quarto da massa do elemento.

7. EXEMPLOS RESOLVIDOS

7.1 Elementos triangulares

Considere-se uma chapa quadrada de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/cm² e coeficiente de Poisson 0,25.

A chapa será dividida em apenas 2 elementos triangulares, como mostrado na Figura 1.23. A sollicitação é uma força de cisalhamento H de 6 N, na face superior.

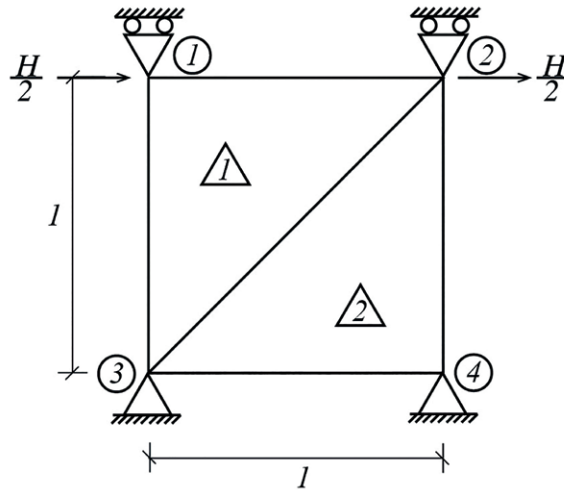


Figura 1.24

As matrizes de rigidez dos 2 elementos são

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -8 & 3 & 11 & -5 \\ 3 & -8 & 2 & -3 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 11 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 11 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem apenas 2 graus de liberdade, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis 1 e 2. Assim, a matriz de rigidez da estrutura reduzida, considerando as condições de contorno, é 2 x 2:

$$[K] = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$$

O carregamento são duas forças horizontais valendo 3 N, na direção dos 2 graus de liberdade. Resolvido o sistema de equações de equilíbrio, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis resultam ambos iguais a 1 cm.

As tensões nos elementos, constantes em todos os pontos em seu interior, são

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 ; \quad \tau_{xy} = 6 \frac{KN}{cm^2}$$

7.2 Elementos retangulares

7.2.1 Elementos retangulares, estática

Considere-se uma chapa quadrada de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/cm² e coeficiente de Poisson 0,25.

A chapa será dividida em somente um elemento retangular, como mostrado na Figura 1.25.

A solicitação é uma força de cisalhamento H de 6 N, na face superior.

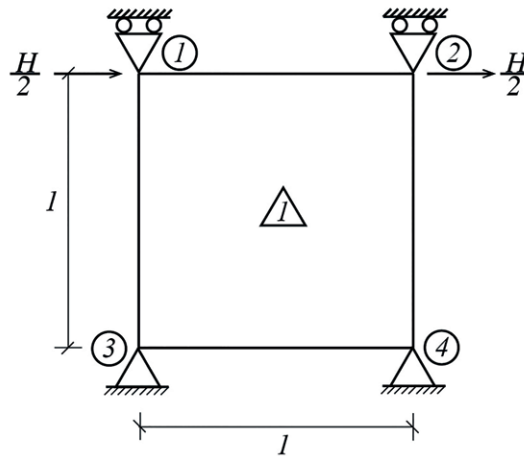


Figura 1.25

A matriz de rigidez do único elemento é

$$[k] = \begin{bmatrix} 7.3333 & 2.5000 & -4.3333 & -0.5000 & -3.6667 & -2.5000 & 0.6667 & 0.5000 \\ 2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & -4.3333 \\ -4.3333 & 0.5000 & 7.3333 & -2.5000 & 0.6667 & -0.5000 & -3.6667 & 2.5000 \\ -0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & -3.6667 \\ -3.6667 & -2.5000 & 0.6667 & 0.5000 & 7.3333 & 2.5000 & -4.3333 & -0.5000 \\ -2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & 7.3333 & 0.5000 & 0.6667 \\ 0.6667 & -0.5000 & -3.6667 & 2.5000 & -4.3333 & 0.5000 & 7.3333 & -2.5000 \\ 0.5000 & -4.3333 & 2.5000 & -3.6667 & -0.5000 & 0.6667 & -2.5000 & 7.3333 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem apenas 2 graus de liberdade, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis 1 e 2. Assim, a matriz de rigidez da estrutura reduzida, considerando as condições de contorno, é 2 x 2:

$$[K] = \begin{bmatrix} 7.3333 & -4.3333 \\ -4.3333 & 7.3333 \end{bmatrix}$$

O carregamento são duas forças horizontais valendo 3 N, na direção dos 2 graus de liberdade. Resolvido o sistema de equações de equilíbrio, os deslocamentos horizontais dos apoios móveis resultam ambos iguais a 1 cm.

As tensões no elemento, variáveis em seu interior, calculadas no centro do elemento, são

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 6 \frac{KN}{cm^2}$$

7.2.2 Elementos retangulares, frequências

Considere-se a mesma chapa quadrada da seção anterior, de espessura, comprimento e largura 1 cm. Também se adota módulo de elasticidade 15 N/m², coeficiente de Poisson 0,25 e densidade 1 kg/m³.

A chapa será dividida em somente um elemento retangular, como mostrado na Figura 1.25.

Pede-se determinar as duas frequências de vibração livre e respectivos modos de vibração.

A matriz de rigidez já foi determinada no exemplo 7.2.1. A matriz de massas simplificada, não consistente, do único elemento é

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

e a matriz de massa reduzida da estrutura é

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

resolvendo o problema de autovalores e autovetores, obtêm-se as duas frequências naturais de vibração,

$$\omega_1 = 6.9282 \frac{rad}{s}, \omega_2 = 13.6626 \frac{rad}{s}$$

e autovetores, os modos de vibração associados,

$$[\varphi_1] = [1 \ 1]^T, \quad [\varphi_2] = [1 \ -1]^T$$

O primeiro deles é o chamado modo de *sway*, em que os dois apoios móveis vibram para a esquerda e para a direita juntos. O segundo é o modo simétrico de vibração, em que quando um dos apoios se desloca para a esquerda, o outro se desloca para a direita, e vice-versa, sempre em oposição.

PARTE 2: PLACAS

1. GENERALIDADES

Placas são peças estruturais em que uma dimensão, a espessura e , é muito menor que as outras duas, são planas, e os carregamentos são supostamente perpendiculares a esse plano, gerando flexão e cisalhamento. É o caso, por exemplo, dos painéis de fechamento de asas de aeronaves, em que pequenas curvaturas permitem a aproximação por um plano e o carregamento predominante são as forças de sustentação sempre normais à superfície da peça. Na Engenharia Civil têm-se as lajes de concreto armado e protendido.

1.1 Derivando a Equação de Sophie-Germain e Lagrange

Considere-se a placa da Fig. 2.1, de espessura muito fina h , contida no plano horizontal x - y . Supõe-se que seja retangular, com comprimento a na direção do eixo x e largura b na direção do eixo y . Um carregamento transversal a seu plano (na direção vertical) $p = p(x, y)$ provoca deslocamentos transversais (verticais) de seus pontos, dados por $w = w(x, y)$, conforme Fig. 2.2. Dentro das hipóteses de placas finas de Kirchoff-Love, e adotando-se material elástico linear isotrópico e homogêneo, o problema é regido pela Equação de Sophie-Germain e Lagrange:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2.1)$$

onde o operador nabla quatro é

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.2)$$

em que

$$D = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.3)$$

é a rigidez flexional da placa. Sua dedução é apresentada a seguir.

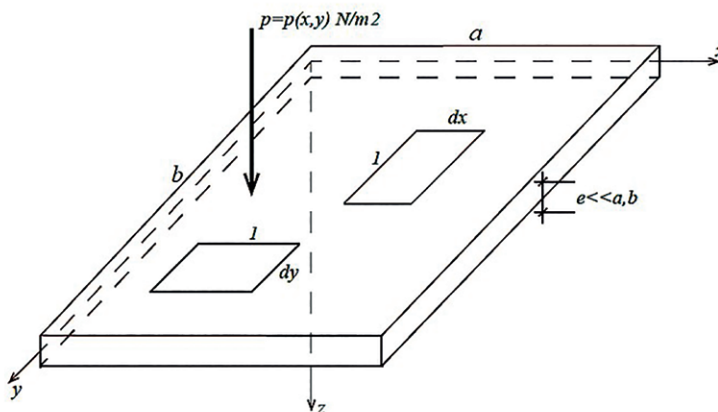


Figura 2.1

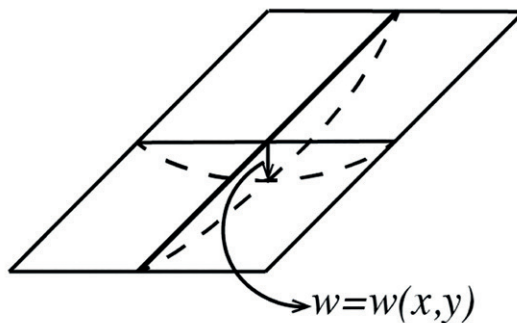


Figura 2.2

1.2 Cinemática

Considere-se, primeiro, um elemento dessa placa de comprimento dx e largura unitária. Adotando-se a hipótese de que as seções permanecem planas após a flexão, conforme Fig. 2.3, tem-se que a deformação de uma fibra distante z do plano neutro é

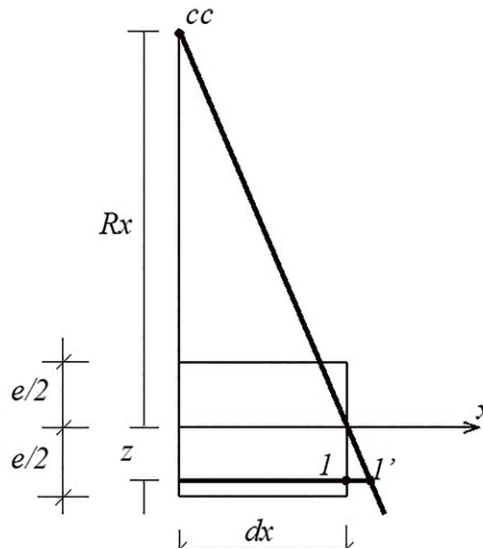


Figura 2.3

$$\varepsilon_x = \frac{11'}{dx} = \frac{z}{R_x} = \kappa_x z \quad (2.4)$$

em que

$$\kappa_x = \frac{1}{R_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

é a curvatura em x , o inverso do correspondente raio de curvatura. Considere-se, agora, um elemento dessa placa de comprimento dy e largura unitária. Adotando-se a hipótese de que as seções permanecem planas após a flexão, conforme Fig. 2.4, tem-se que a deformação de uma fibra distante z do plano neutro é

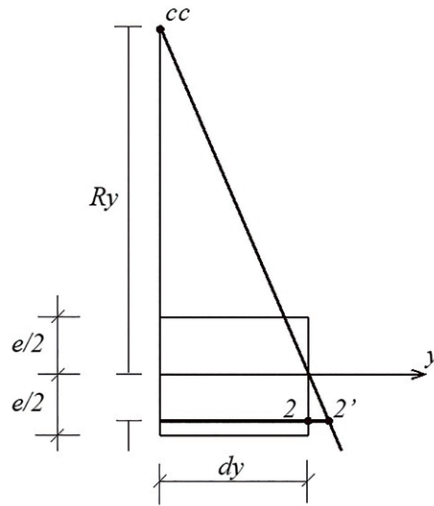


Figura 2.4

$$\varepsilon_y = \frac{z z'}{dy} = \frac{z}{R_y} = \kappa_y z \quad (2.6)$$

em que

$$\kappa_y = \frac{1}{R_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

é a curvatura em y , o inverso do correspondente raio de curvatura.

1.3 Lei de Hooke

Adota-se material elástico linear isotrópico e homogêneo, com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν . Assim, as tensões normais nas duas direções do plano são

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \quad (2.8)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \quad (2.9)$$

que atuam como indicado nas Figuras 2.5 e 2.6.

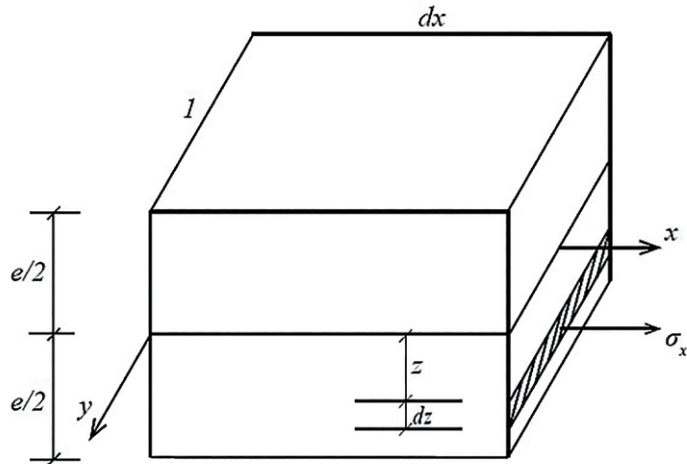


Figura 2.5

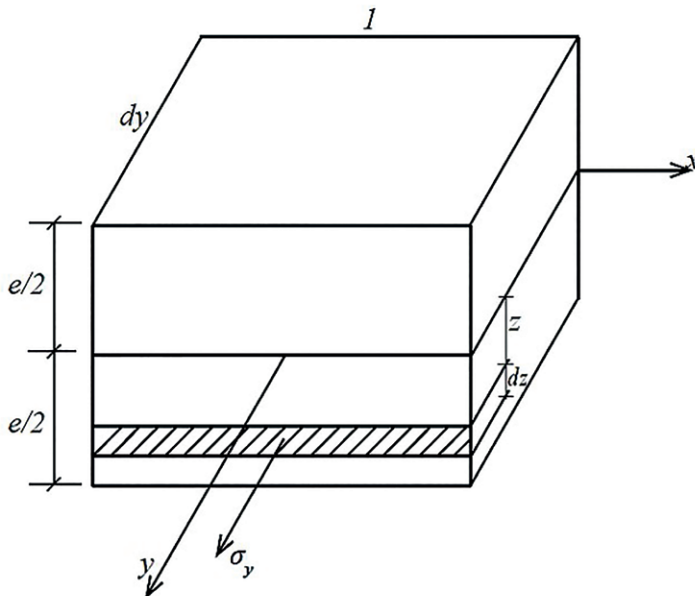


Figura 2.6

A integração dessas tensões fornece os momentos fletores por unidade de comprimento dados por

$$M_x = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

$$M_y = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.11)$$

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-e/2}^{e/2} z^2 dz = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.12)$$

Tensões tangenciais (de cisalhamento) também atuam nas faces do elemento de placa de comprimentos unitários nas duas direções representado na Fig. 2.7, resultando forças cortantes por unidade de comprimento.

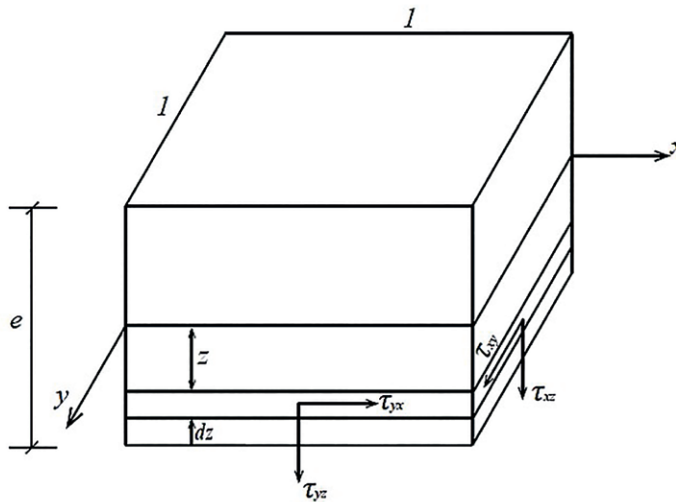


Figura 2.7

$$Q_x = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{xz} dz \quad (2.13)$$

$$Q_y = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{yz} dz \quad (2.14)$$

e momentos de torção

$$M_{xy} = - \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.15)$$

$$M_{xy} = \int_{-e/2}^{e/2} \tau_{xy} z dz = D(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.16)$$

1.4 Equilíbrio

Escreve-se, agora, o equilíbrio de forças na vertical de um elemento de placa de comprimentos dx e dy no plano, conforme indicado na Fig. 2.8, resultando

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (2.17)$$

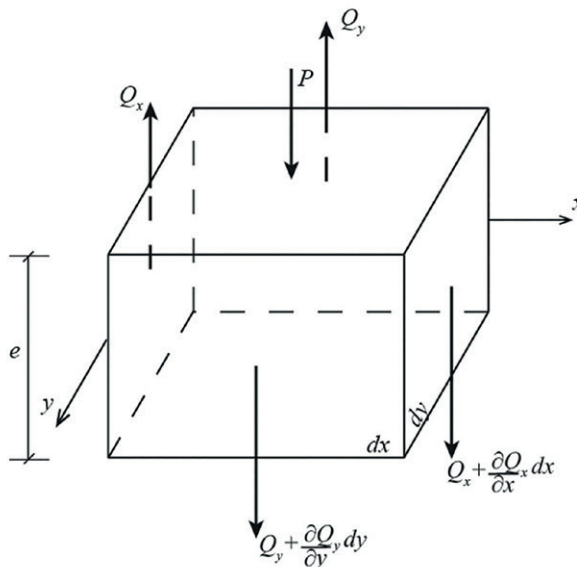


Figura 2.8

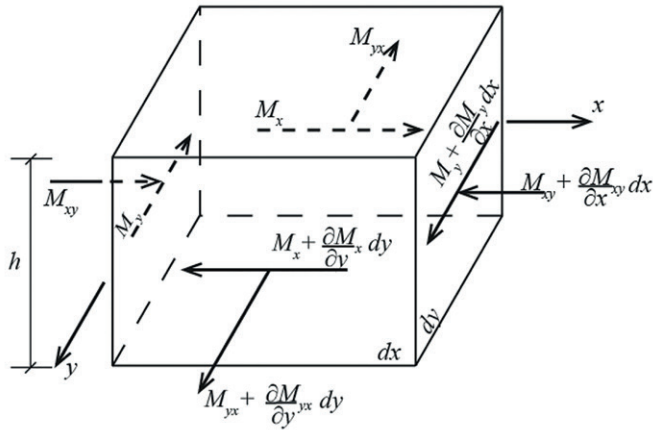


Figura 2.9

Analisando a Fig. 2.9, escreve-se o equilíbrio de momentos em torno dos eixos x e y , desprezando-se termos de ordem superior, na forma

$$Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (2.19)$$

que substituídas na equação de equilíbrio de forças cortantes resulta, finalmente,

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} = -p \quad (2.20)$$

Agora, basta substituir as expressões dos momentos fletores e de torção, escritas em função do deslocamento transversal w para chegar à já apresentada Equação de Sophie-Germain e Lagrange

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2.21)$$

1.5 Solução

Se for determinada a função $w = w(x, y)$, pode-se, em princípio, determinar os esforços solicitantes na placa. Os momentos fletores, por unidade de comprimento, já apresentados, são

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.22)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

Os momentos de torção, por unidade de comprimento, são

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

$$M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.25)$$

e as forças cortantes, também por unidade de comprimento, já apresentadas, são

$$Q_x = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.26)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (2.27)$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial de quarta ordem cuja solução depende das condições de contorno nos lados da placa. No geral:

1. simplesmente apoiada, em que o deslocamento vertical e a derivada segunda, relacionada com o momento fletor, são nulos;
2. engastada, em que o deslocamento vertical e a derivada primeira, relacionada com a tangente à superfície deformada, são nulos;
3. livre, em que o deslocamento é livre e os momentos fletores são nulos.

Na prática, soluções fechadas são muito difíceis de se obter. Com a disponibilidade atual de métodos computacionais, esses são preferíveis para fins profissionais e serão detalhados na sequência deste capítulo. Existem na literatura técnica, entretanto, soluções obtidas por séries trigonométricas infinitas, uma vez que funções harmônicas são tratáveis quando aplicadas à Equação de Sophie-Germain e Lagrange e a condições de contorno usuais. Tabelas geradas por essas soluções podem ser encontradas em, por exemplo, Timoshenko.

2. DINÂMICA EM PLACAS

2.1 Carregamento genérico

No caso de uma análise dinâmica, tanto o carregamento como os deslocamentos resultantes são funções também do tempo, isto é, $p = p(x, y, t)$ e $w = w(x, y, t)$. Além disso, de acordo com a segunda lei de Newton, surgem as forças de inércia, massa vezes aceleração. Assim, a equação de Sophie-Germain e Lagrange se escreve

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}(p + \rho \ddot{w}) \quad (2.28)$$

em que ρ é a densidade do material (kg/m^3), suposta constante, e

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

No caso de vibrações livres amortecidas, o único carregamento externo é a força dissipativa. Se for suposta do tipo viscosa, proporcional à velocidade, tem-se

$$p = c\dot{w} = c \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.30)$$

em que c é uma constante de amortecimento viscoso, obtida experimentalmente ou adotada por indicações de normas.

2.2 Vibrações livres não amortecidas

A equação do movimento para vibrações livres não amortecidas de placas finas é

$$D\nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

Neste caso de vibrações livres, o vetor de deslocamentos, nos nós de coordenadas x e y de uma malha de pontos resultante de uma discretização do contínuo no interior da placa, varia harmonicamente com o tempo, na forma

$$\{w(x, y, t)\} = \{W(x, y)\} \cos \omega t \quad (2.32)$$

onde ω é uma frequência circular de vibração (em radianos/segundo), e $\{W(x,y)\}$ um vetor função apenas das coordenadas espaciais, também conhecido como modo de vibração, levando à equação do movimento


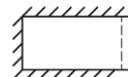

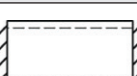
$$(\nabla^4 - \lambda)\{W\} = 0 \quad (2.33)$$















onde

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{D} \quad (2.34)$$

Temos, assim, um problema de autovalores e autovetores.

Soluções fechadas, obtidas por séries trigonométricas, para as frequências de placas podem ser encontradas na publicação da NASA de autoria do Prof. A. Leissa.

CONDIÇÕES DE CONTORNO	FUNÇÃO DE DEFLEXÃO	N	K
	$\left(\cos \frac{2\pi x}{a} - 1\right)\left(\cos \frac{2\pi y}{b} - 1\right)$	2.25	$12 + 8\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12\left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}\right)\left(\cos \frac{2\pi y}{b} - 1\right)$	1.50	$3.85 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8\left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(1 - \cos \frac{\pi x}{2a}\right)\left(\cos \frac{2\pi y}{b} - 1\right)$.340	$0.0468 + 0.340\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.814\left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(\cos \frac{2\pi x}{a} - 1\right)\sin \frac{\pi y}{b}$.75	$4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.75\left(\frac{a}{b}\right)^4$

	$\left(\cos \frac{2\pi x}{a} - 1\right) \frac{y}{b}$.50	$2.67 + 0.304 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$\cos \frac{2\pi x}{a} - 1$	1.5	8
	$\left(\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \left(\cos \frac{3\pi y}{2b} - \cos \frac{\pi y}{2b}\right)$	1.00	$2.56 + 3.12 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2.56 \left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b}\right)$.227	$0.581 + 0.213 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.031 \left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(1 - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b}\right)$	0.0514	$0.0072 + 0.024 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$\left(\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \sin \frac{\pi y}{b}$.50	$1.28 + 1.25 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.5 \left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \frac{y}{b}$.333	$0.853 + 0.190 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$\cos \frac{3\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a}$	1.00	2.56
	$\left(1 - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b}$.1134	$0.0156 + 0.0852 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$\left(1 - \cos \frac{\pi x}{2a}\right) \frac{y}{b}$.0756	$0.0104 + 0.0190 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$1 - \cos \frac{\pi x}{2a}$.2268	0.0313
	$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.25	$0.25 + 0.50 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.25 \left(\frac{a}{b}\right)^4$
	$\left(\sin \frac{\pi x}{a}\right) \frac{y}{b}$.1667	$0.1667 + 0.0760 \left(\frac{a}{b}\right)^2$
	$\sin \frac{\pi x}{a}$.50	0.50

Por exemplo, para uma placa retangular simplesmente apoiada em todo seu perímetro, calcula-se a rigidez flexional

$$D = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.35)$$

e coeficientes K

$$K = 0.25 + 0.5 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.25 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (2.36)$$

e $N = 0.2$, dados na Tabela para esta condição de contorno. A frequência correspondente, dada em rad/s, é

$$\omega = 2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{DK}{\rho N}} \quad (2.37)$$

Uma solução numérica muito conveniente é obtida pela aplicação do Método das Diferenças Finitas, como se verá na seção 4. desta Parte 2.

3. ESTABILIDADE: EQUAÇÃO DE SAINT-VENANT

Considere-se, agora o caso de presença de forças normais N_x e N_y , e de cisalhamento N_{xy} e N_{yx} , por unidade de comprimento, contidas no plano $x y$ da placa, conforme Fig. 2.10. Se forem de pequena intensidade, espera-se que não influenciem nos deslocamentos transversais w da placa. Caso contrário, isso pode ocorrer, e levar, no limite, à instabilidade (flambagem). A projeção dessas forças no plano $x y$ da placa resultam as equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

Essas equações são inteiramente independentes das 3 equações de equilíbrio deduzidas na seção 1.4 desta Parte 2.

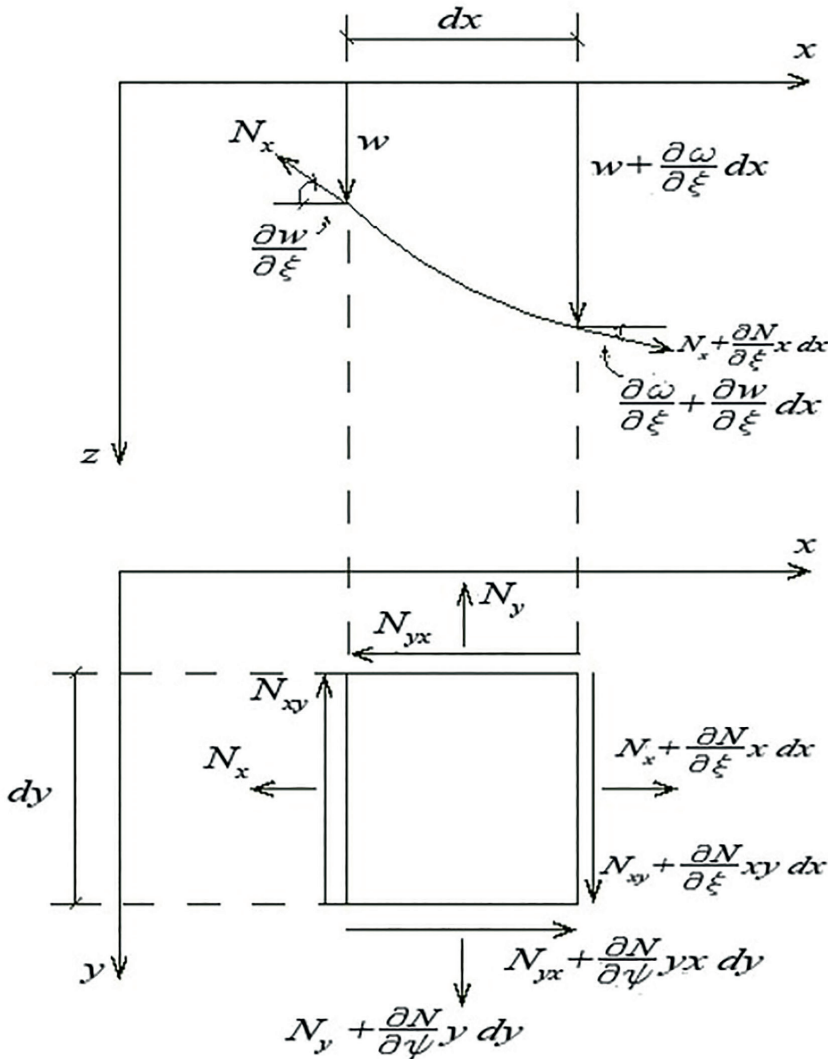


Figura 2.10

Agora considere-se a projeção das forças normais no plano x z na direção z, a direção transversal ao plano da placa, levando em conta, como mostrado na Fig. 2.10, o deslocamento transversal w de seu plano neutro. Resulta

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.39)$$

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (2.40)$$

Simplificando e desconsiderando termos de ordem superior, tem-se

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (2.41)$$

Da mesma forma, considere-se a projeção das forças normais no plano $y z$ na direção z , levando a

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.42)$$

Um raciocínio bem mais elaborado, aqui omitido, é necessário para obtenção da projeção das forças de cisalhamento na direção do eixo z , levando a

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (2.43)$$

A seguir, todas essas componentes de forças na direção z serão somadas às forças nessas direções já consideradas no equilíbrio de forças verticais determinado na seção 1.4 desta Parte 2, levando a uma nova forma da Equação de Sophie-Germain e Lagrange, primeiramente obtida por Saint-Venant, na forma:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.44)$$

No caso particular de carregamento transversal p nulo, tem-se a formulação teórica necessária à determinação do carregamento que levaria à instabilidade (flambagem) de uma placa fina.

Mais uma vez, na prática, soluções fechadas são muito difíceis de se obter. Com a disponibilidade atual de métodos computacionais, esses são preferíveis para fins profissionais. Existem na literatura técnica, entretanto, soluções obtidas por séries trigonométricas infinitas, uma vez que funções harmônicas são tratáveis quando aplicadas à Equação de Sophie-Germain e Lagrange e a condições de contorno usuais. Tabelas geradas por essas soluções podem ser encontradas em, por exemplo, Leissa.

4. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM PLACAS

4.1 Generalidades

A finalidade dos métodos de discretização é reduzir um problema contínuo a um sistema com um número finito de graus de liberdade. No geral, tem-se um fenômeno físico governado por uma equação diferencial, ou um sistema delas, envolvendo uma ou mais funções. A solução dessas equações, a obtenção da expressão da função em forma fechada quase nunca é possível, e uma boa aproximação pode ser obtida de um número limitado de parâmetros se o analista tiver boa sensibilidade.

A aproximação basicamente envolve trocar um domínio contínuo por uma malha de pontos discretos no interior desse domínio. Em vez de se obter a função contínua nesse domínio, obtém-se aproximações para o valor que essa função assume somente em cada um desses pontos isolados.

No caso em estudo, das placas, a equação diferencial governante no domínio da placa, já vista, é a de Sophie-Germain e Lagrange:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2.45)$$

onde o operador *nabla quatro* é

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.46)$$

Além disso, há que impor as condições de contorno nas faces da placa. Por exemplo, se for um apoio simples, os momentos fletores são nulos e, portanto, a derivada segunda é zero nessa extremidade. Já uma face engastada implica em que a tangente à deformada ali é nula, ou seja, a derivada primeira é zero.

No Método das Diferenças Finitas, as diversas derivadas presentes nas equações diferenciais no domínio e nas condições de contorno, são aproximadas por expressões de diferenças, em geral obtidas de séries de Taylor. O procedimento foi primeiro aplicado a domínios bidimensionais, como neste caso, por C. Runge, em 1908.

As expressões necessárias para o propósito deste capítulo são apresentadas a seguir, para um ponto pertencente a uma linha j e uma coluna k , de uma malha retangular com espaçamento h_x na direção do eixo x e h_y na do y .

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{j,k} = \frac{w_{j,k+1} - w_{j,k-1}}{2h_x} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{j,k} = \frac{w_{j+1,k} - w_{j-1,k}}{2h_y} \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{j,k} = \frac{w_{j,k+1} - 2w_{j,k} + w_{j,k-1}}{h_x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{j,k} = \frac{w_{j+1,k} - 2w_{j,k} + w_{j-1,k}}{h_y^2} \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{j,k} = \frac{w_{j,k+2} - 4w_{j,k+1} + 6w_{j,k} - 4w_{j,k-1} + w_{j,k-2}}{h_x^4} \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{j,k} = \frac{w_{j+2,k} - 4w_{j+1,k} + 6w_{j,k} - 4w_{j-1,k} + w_{j-2,k}}{h_y^4} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{j,k} &= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_{j+1,k-1} - 2w_{j+1,k} + w_{j+1,k+1} - 2w_{j,k-1} \\ &\quad + 4w_{j,k} - 2w_{j,k+1} + w_{j-1,k-1} - 2w_{j-1,k} + w_{j-1,k+1}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

4.2 Exemplo básico

Considere-se uma placa simplesmente apoiada em todo perímetro, de planta quadrada 2 x 2 m, espessura $e = 2$ cm, carregada de cima para baixo por carga uniformemente distribuída $p = 2$ KPa, módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

$$D = \frac{E e^3}{12(1 - \nu^2)} = 146,52$$

Para comparação, será calculado o deslocamento vertical máximo, no meio da placa, para duas malhas, uma com $h_x = h_y = 1$ m e a outra $h_x = h_y = 0,5$ m.

Para a malha mais grosseira, tem-se apenas um ponto no interior do domínio, e a aplicação da equação diferencial em sua forma de diferenças finitas necessita que se considere pontos externos ao domínio.

Nas linhas do contorno apoiado, os deslocamentos verticais são zero. Também o momento fletor (derivada segunda) é nulo, implicando que os deslocamentos dos pontos externos são iguais a *menos* o deslocamento do ponto interno. Com isso, chega-se a

$$16w_{0,0} = \frac{2}{146},52 = 0,01365w_{0,0} = 0,8531 \text{ mm}$$

Para a malha mais fina tem-se nove pontos no interior do domínio. Por razões de simetria, basta fazer a aplicação da equação diferencial em sua forma de diferenças finitas em apenas três desses pontos, no primeiro quadrante.

Ponto 0,0

$$w_{0,2} - 8w_{0,1} + 20w_{0,0} - 8w_{0,-1} + w_{0,-2} + w_{2,0} - 8w_{1,0} - 8w_{-1,0} + w_{-2,0} \\ + 2(w_{1,1} + w_{1,-1} + w_{-1,1} + w_{-1,-1}) = 0,5^4 \frac{p}{D}$$

Ponto 0,1

$$w_{0,3} - 8w_{0,2} + 20w_{0,1} - 8w_{0,0} + w_{0,-1} + w_{2,1} - 8w_{1,1} - 8w_{-1,1} + w_{-2,1} \\ + 2(w_{1,2} + w_{1,0} + w_{-1,2} + w_{-1,0}) = 0,5^4 \frac{p}{D}$$

Ponto 1,1

$$w_{1,3} - 8w_{1,2} + 20w_{1,1} - 8w_{1,0} + w_{1,-1} + w_{3,1} - 8w_{2,1} - 8w_{0,1} + w_{-1,1} \\ + 2(w_{2,2} + w_{2,0} + w_{0,2} + w_{0,0}) = 0,5^4 \frac{p}{D}$$

Levando em conta as condições de contorno e de simetria, chega-se ao sistema algébrico linear de 3 equações em 3 incógnitas

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 8 \\ -8 & 24 & -16 \\ 2 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,1} \end{Bmatrix} = 0,5^4 x 0,01365 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para comparação, o resultado obtido por Timoshenko por séries trigonométricas é $w_{0,0} = 0,8867 \text{ mm}$

4.3 Exemplo mais completo

Considere-se a placa da Fig. 2.11 simplesmente apoiada em duas bordas paralelas a x e engastada nas outras duas, de planta retangular 8 x 4 m, espessura $e = 5 \text{ cm}$, carregada de cima para baixo por carga uniformemente distribuída $p = 100 \text{ Pa}$, módulo de elasticidade $E = 3 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

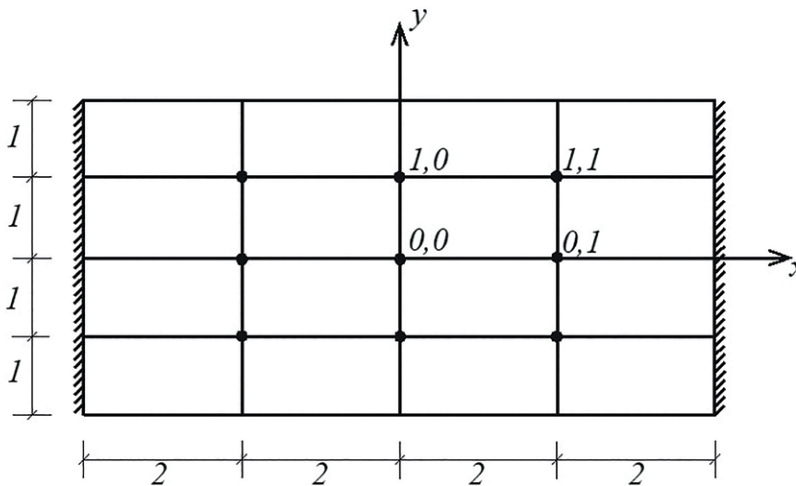


Figura 2.11

Pelas simetrias observáveis na figura, basta aplicar a equação diferencial nos 4 pontos indicados no primeiro quadrante, dos 9 pontos internos.

Ponto 0,0

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(w_{0,2} - 4w_{0,1} + 6w_{0,0} - 4w_{0,-1} + w_{0,-2}) \\ & + \frac{1}{1}(w_{2,0} - 4w_{1,0} + 6w_{0,0} - 4w_{-1,0} + w_{-2,0}) \\ & + \frac{2}{4}(w_{1,1} - 2w_{1,0} + w_{1,-1} - 2w_{0,1} + 4w_{0,0} - 2w_{0,-1} + w_{-1,1} \\ & - 2w_{-1,0} + w_{-1,-1}) = \frac{p}{D} = 0,003 \end{aligned}$$

Ponto 0,1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(w_{0,3} - 4w_{0,2} + 6w_{0,1} - 4w_{0,0} + w_{0,-1}) \\ & + \frac{1}{1}(w_{2,1} - 4w_{1,1} + 6w_{0,1} - 4w_{-1,1} + w_{-2,1}) \\ & + \frac{2}{4}(w_{1,2} - 2w_{1,1} + w_{1,0} - 2w_{0,2} + 4w_{0,1} - 2w_{0,0} + w_{-1,2} - 2w_{-1,1} \\ & + w_{-1,0}) = \frac{p}{D} = 0,003 \end{aligned}$$

Ponto 1,0

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(w_{1,2} - 4w_{1,1} + 6w_{1,0} - 4w_{1,-1} + w_{1,-2}) \\ & + \frac{1}{1}(w_{3,0} - 4w_{2,0} + 6w_{1,0} - 4w_{0,0} + w_{-1,0}) \\ & + \frac{2}{4}(w_{2,1} - 2w_{2,0} + w_{2,-1} - 2w_{1,1} + 4w_{1,0} - 2w_{1,-1} + w_{0,1} - 2w_{0,0} \\ & + w_{0,-1}) = \frac{p}{D} = 0,003 \end{aligned}$$

Ponto 1,1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} (w_{1,3} - 4w_{1,2} + 6w_{1,1} - 4w_{1,0} + w_{1,-1}) \\ & + \frac{1}{1} (w_{3,1} - 4w_{2,1} + 6w_{1,1} - 4w_{0,1} + w_{-1,1}) \\ & + \frac{2}{4} (w_{2,2} - 2w_{2,1} + w_{2,0} - 2w_{1,2} + 4w_{1,1} - 2w_{1,0} + w_{0,2} - 2w_{0,1} \\ & + w_{0,0}) = \frac{p}{D} = 0,003 \end{aligned}$$

Levando em conta as condições de contorno e de simetria, chega-se ao sistema algébrico linear de 4 equações em 4 incógnitas

$$\begin{bmatrix} 8,375 & -2,5 & -10 & 2 \\ -1,25 & 8,5 & 1 & -10 \\ -5 & 1 & 8,375 & -2,5 \\ 0,5 & -5 & -1,25 & 8,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,0} \\ w_{1,1} \end{Bmatrix} = 0,003 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} w_{0,0} \\ w_{0,1} \\ w_{1,0} \\ w_{1,1} \end{Bmatrix} = 0,001 \begin{Bmatrix} 7,097 \\ 5,204 \\ 5,012 \\ 3,745 \end{Bmatrix} m$$

4.4 Vibrações livres não amortecidas

A análise de vibrações livres de placas delgadas discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas parte da instituição de um vetor w de deslocamentos verticais dos n nós da malha de diferenças finitas:

$$\{w(x, y, t)\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Esse vetor pode ser considerado como o produto de um vetor $\{W(x, y)\}$, também com n componentes, *invariável no tempo*, ou seja, função apenas de x

e de y , chamado *modo de vibração*, por uma função do tempo, que supomos ser harmônica, com frequência ω :

$$\{w\} = \{W\} \cos \omega \quad (2.53)$$

Substituindo-se a solução (2.53) na equação do movimento para vibrações livres, e considerando-se que os deslocamentos w foram obtidos por aproximações de diferenças finitas, chega-se ao problema de autovalores e autovetores:

$$([A] - \lambda[I])\{W\} = 0 \quad (2.54)$$

em que

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{D} \quad (2.55)$$

As expressões necessárias para escrever os termos gerais dos coeficientes dessa matriz $[A]$ são apresentadas a seguir, tendo por base em um ponto centrado em uma linha j e uma coluna k , de uma malha retangular com espaçamento h_x na direção do eixo x e h_y , na do y . Esses coeficientes devem ser superpostos com os gerados nos pontos vizinhos a esse. Além disso, as condições de contorno têm que ser impostas. Os detalhes computacionais para essas duas operações são aqui omitidos pela dificuldade de serem detalhados com a clareza necessária, mas o algoritmo completo e testado, em linguagem MATLAB, é dado no anexo deste livro.

$$A(j, k) = \frac{6}{h_x^4} + \frac{6}{h_y^4} + \frac{8}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.56)$$

$$A(j, k + 1) = -\frac{4}{h_x^4} - \frac{4}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.57)$$

$$A(j, k - 1) = -\frac{4}{h_x^4} - \frac{4}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.58)$$

$$A(j + 1, k) = -\frac{4}{h_y^4} - \frac{4}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.59)$$

$$A(j - 1, k) = -\frac{4}{h_y^4} - \frac{4}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.60)$$

$$A(j, k + 2) = \frac{1}{h_x^4} \quad (2.61)$$

$$A(j, k - 2) = \frac{1}{h_x^4} \quad (2.62)$$

$$A(j + 2, k) = \frac{1}{h_y^4} \quad (2.63)$$

$$A(j - 2, k) = \frac{1}{h_y^4} \quad (2.64)$$

$$A(j + 1, k + 1) = \frac{2}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.65)$$

$$A(j - 1, k + 1) = \frac{2}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.66)$$

$$A(j + 1, k - 1) = \frac{2}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.67)$$

$$A(j - 1, k - 1) = \frac{2}{h_x^2 h_y^2} \quad (2.68)$$

PARTE 3: CASCAS

1. GENERALIDADES

Cascas são peças estruturais em que uma dimensão, a espessura e , é muito menor que as outras duas, não são necessariamente planas, e os carregamentos podem ser tanto tangenciais como normais à superfície da casca. É, genericamente, o caso de objetos como os painéis de fechamento de fuselagens de aeronaves e espaçonaves, veículos terrestres e navais, tubulações e vasos de pressão, silos, cúpulas etc.

2. CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARGA AXISSIMÉTRICA

Consideram-se, neste texto, apenas as cascas geradas por revolução de uma curva em torno de um eixo de rotação, conforme Fig. 3.1. Nesses casos, os raios de curvatura, normais à superfície em cada ponto da casca, e os respectivos centros de curvatura, situam-se no plano que contém esse ponto e o eixo de rotação. As curvas geradoras da superfície são denominadas meridianos, e os círculos descritos por um ponto A da curva rodando em torno do eixo são denominados paralelos, tal como no caso do planeta Terra. As longitudes são dadas por um

ângulo θ , medido a partir de uma linha de referência, arbitrariamente escolhida (como o meridiano de Greenwich na Terra), até o meridiano considerado, conforme Fig. 3.2, uma seção da casca normal ao eixo de rotação. Já a latitude, a posição do paralelo em questão, é dada por um ângulo ϕ , conforme Fig. 3.3, uma seção da casca contendo um meridiano e o eixo de rotação, na qual também é definido o raio de curvatura do meridiano naquele ponto, r_1 . Note-se nessa Figura que o raio de curvatura do paralelo em um ponto, r_2 , está relacionado com o raio do círculo normal ao eixo de revolução nesse ponto nesse paralelo, r_0 , por $r_0 = r_2 \operatorname{sen} \phi$.

Pequenas variações desses ângulos, $d\theta$ e $d\phi$, definem um elemento de casca, curvo nas 2 direções no caso geral, de área dS , com vértices A A' A'', conforme Fig. 3.4.

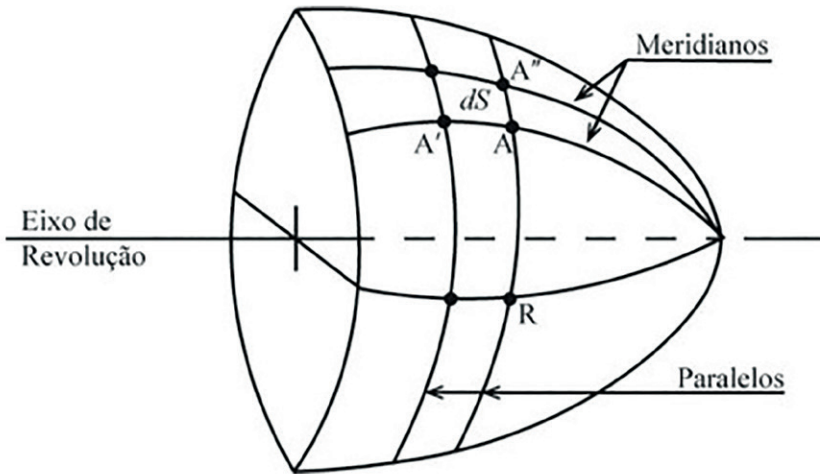


Figura 3.1: Uma casca de revolução

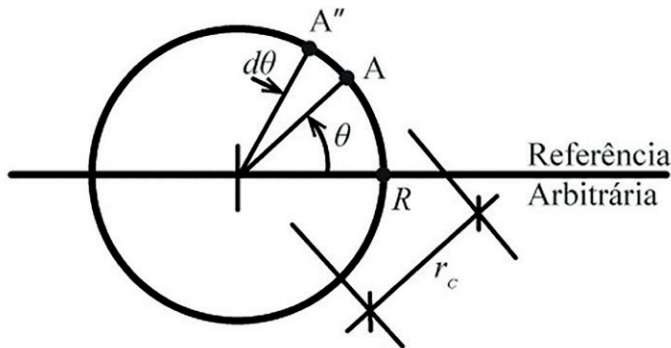


Figura 3.2: Posição dos meridianos

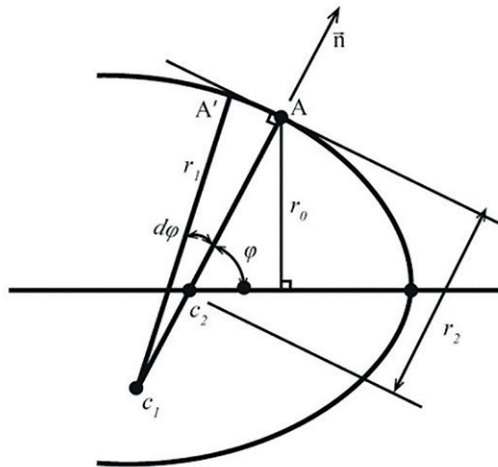


Figura 3.3: Posição dos paralelos

2.1 Teoria de Membrana

2.1.1 Teoria

Para determinados carregamentos (simétricos em relação ao eixo de rotação) e condições de contorno bastante comuns na prática, pode-se considerar que apenas forças normais atuam na casca, sem flexão. É a chamada Teoria de Membrana.

Nesta hipótese, no elemento de casca da Fig. 3.4 atuam apenas as forças N_θ , na direção dos paralelos, e N_ϕ , na direção dos meridianos. Essas forças têm unidades N/m. Além disso, tem-se o carregamento, que não necessariamente é normal ao elemento, que seria o caso de uma pressão, em N/m².

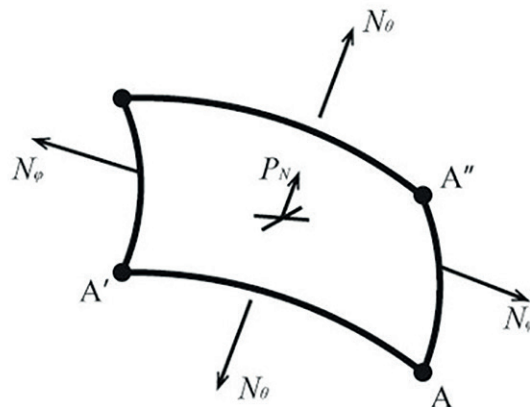


Figura 3.4: Elemento de casca

O comprimento dos segmentos de curvas do perímetro do elemento de casca da Fig. 3.4 é ilustrado nas Figs. 3.2 e 3.3, e dados por

$$A' = r_1 d\phi \quad (3.1)$$

$$AA'' = r_0 d\theta \quad (3.2)$$

Com esses comprimentos é possível calcular a área do elemento $r_0 r_1 d\theta d\phi$, e as resultantes das forças, na direção dos paralelos

$$N_\theta r_1 d\phi \quad (3.3)$$

e na direção dos meridianos,

$$N_\phi r_0 d\theta = N_\phi r_2 \text{ sen } \phi d\theta (N) \quad (3.4)$$

A seguir, determina-se o equilíbrio de forças na direção normal ao elemento, em que atua a resultante normal do carregamento $p_N r_0 r_1 d\theta d\phi$ (N), considerando-se que para ângulos pequenos o seno é aproximadamente igual ao próprio ângulo em radianos,

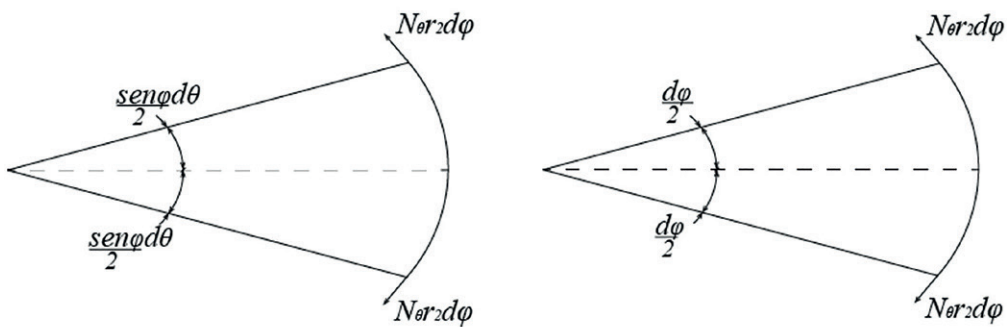


Figura 3.5: Decomposição de forças na direção normal à casca

$$2N_\phi r_0 d\theta \text{ sen } \frac{d\phi}{2} + 2N_\theta r_1 d\phi \text{ sen } \frac{\text{sen } \phi d\theta}{2} - p_N r_0 r_1 d\theta d\phi \quad (3.5)$$

$$= 0N_\phi r_0 d\theta d\phi + N_\theta r_1 d\theta d\phi \text{ sen } \phi - p_N r_0 r_1 d\theta d\phi = 0$$

e, dividindo-se por $r_0 r_1 d\theta d\phi$, chega-se a

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_N \quad (3.6)$$

Nesta equação, têm-se 2 incógnitas. A outra equação necessária, pode ser obtida de várias maneiras. A mais simples é considerar um corte na casca contendo o paralelo em análise, e determinar o equilíbrio entre a resultante R do carregamento sobre a parte da casca de um lado do paralelo, na direção do eixo de rotação, e as forças N_ϕ ao longo da circunferência de comprimento $2\pi r_0$, as quais têm a inclinação ϕ com relação ao eixo de rotação, conforme Fig. 3.5. Obtêm-se

$$2\pi r_0 N_\phi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - R = 0 \text{ ou}$$

$$N_\phi = \frac{R}{2\pi r_0 \sin\phi} = \frac{\pi r_0^2 p}{2\pi r_0 \sin\phi} = \frac{p r_0}{2 \sin\phi} = \frac{p r_2}{2} \quad (3.7)$$

Tendo-se as forças por unidade de comprimento, basta dividi-las pela espessura da casca e para serem obtidas as tensões normais atuantes nas duas direções.

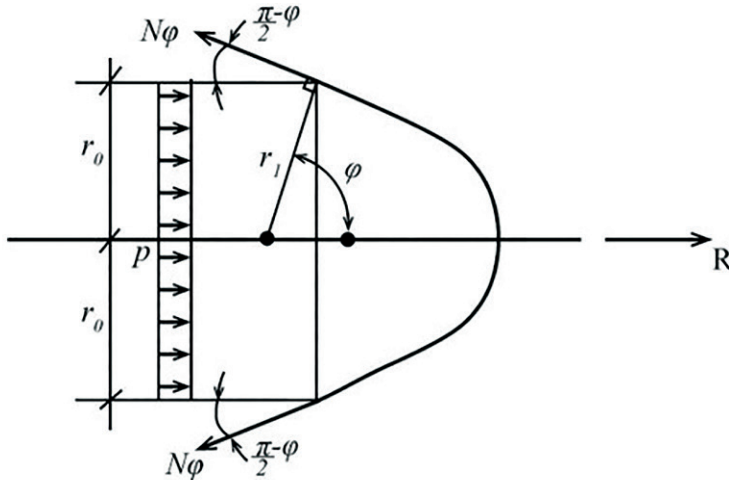


Figura 3.6: Obtenção da força na direção dos meridianos

3. EXEMPLOS

3.1 Balão esférico

Considera-se um balão esférico sob pressão interna de gás p , de raio r e espessura e .

Os raios de curvatura são iguais

$$r_1 = r_2 = r$$

e, da Eq. 3.6, e levando em conta que $N_\phi = N_\theta$, por simetria,

$$N_\phi = N_\theta = \frac{pr}{2}$$

As tensões normais principais atuantes valem

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = \frac{pr}{2e}$$

3.2 Casca cilíndrica (fuselagem de aeronave ou tubulação, pressurizada)

Considera-se uma casca cilíndrica, fechada nas extremidades, de raio r e espessura e sob pressão interna p .

Neste caso, como a curva geradora da casca é uma reta paralela ao eixo de revolução, o raio de curvatura do meridiano r_1 é infinito (curvatura nula) e o raio de curvatura do paralelo $r_2 = r$.

A resultante de pressão sobre as extremidades, conforme Eq. 3.7, é

$$R = p\pi r$$

que dividida pelo perímetro $2\pi r$ resulta a força por unidade de comprimento

$$N_\phi = \frac{pr}{2} \text{ (N/m)}$$

paralela ao eixo do cilindro. Da Eq. 3.6, obtém-se

$$N_{\theta} = pr$$

As tensões normais principais atuantes valem

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_{\phi} = \frac{pr}{e}$$

3.3 Casca cônica

Considera-se uma casca em forma de cone de raio na base a , altura b e espessura e , sob pressão interna de gás p , gerado pela revolução de uma reta em torno do eixo y . A tangente da geratriz em relação ao eixo y é $\phi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$. Os resultados são:

$$r_1 = \infty \quad r_2 = -\frac{x}{\text{sen}\phi} \quad N_{\phi} = \frac{pr_2}{2} \quad N_{\theta} = pr_2$$

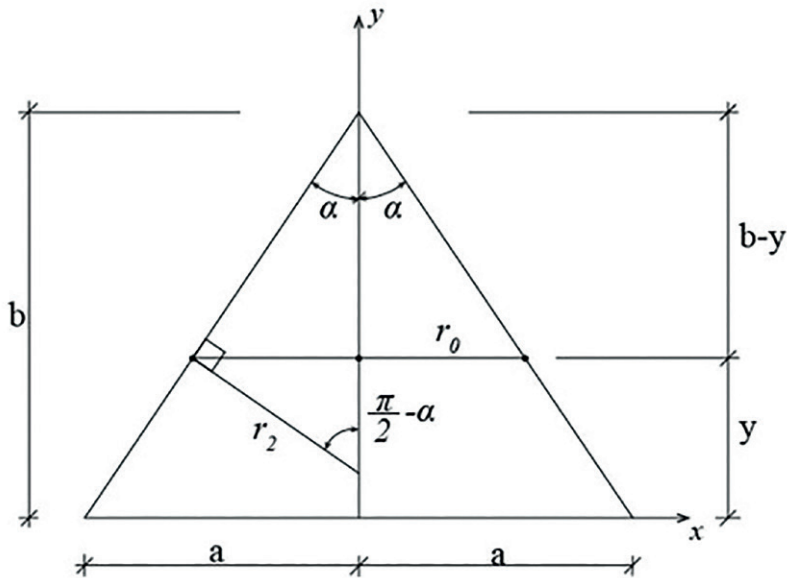


Figura 3.7: Casca cônica

3.4 Paraboloide

Considera-se um paraboloide de revolução em torno do eixo y , de raio na base a , altura b e espessura e , sob pressão interna de gás p .

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad y' = -\frac{2bx}{a^2} \quad y'' = -\frac{2b}{a^2}$$

$$r_1 = -\frac{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}{y''} \quad r_2 = \frac{|x|}{\text{sen}\phi}$$

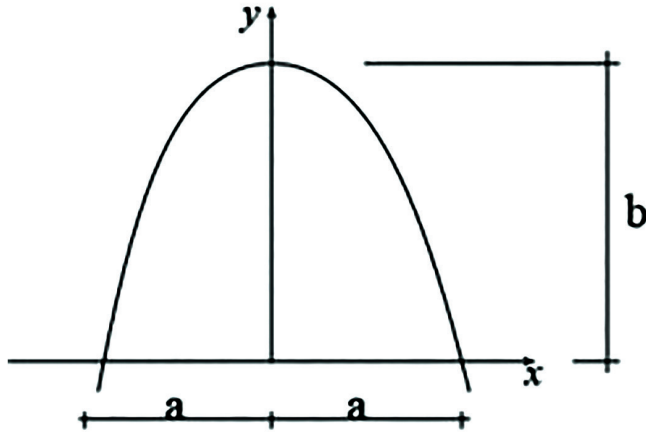


Figura 3.8: Paraboloide de revolução

3.5 Dirigível elíptico ou extremidade de vaso de pressão cilíndrico

Considera-se uma casca em forma de um elipsoide de revolução de raio maior a , raio menor b e espessura e , sob pressão interna de gás p .

Uma aplicação seria um dirigível sob pressão do gás interno. Outra, bastante comum, é usar a metade de um elipsoide de revolução como extremidades de um vaso de pressão cilíndrico, como as extremidades de uma fuselagem de aeronave.

Os raios de curvatura principais dessa casca, em função do ângulo ϕ , indicado na Figura 3.6, conforme a Geometria Diferencial, valem

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad y' = -\frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \quad y'' = -\frac{b}{a^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^3}}$$

$$r_1 = -\frac{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}{y''} \quad r_2 = \frac{|x|}{\text{sen}\phi}$$

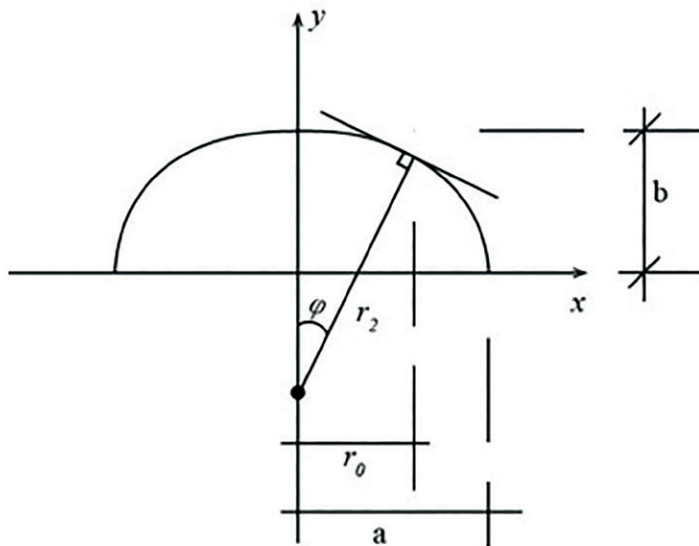


Figura 3.9: Raios de curvatura de elipsoide de revolução

Dados os raios de curvatura, é possível obter as forças N_ϕ e N_θ pelas Equações 3.6 e 3.7.

Uma análise mais expedita é feita para um paralelo de raio r_0 . A resultante mencionada na Eq. 3.7 vale $R = \pi p r_0^2$, levando a

$$N_\phi = \frac{p r_0}{2 \text{sen}\phi} = \frac{p r_2}{2}$$

Substituindo esse valor na Eq. 3.6, encontra-se

$$N_\theta = r_2 p - \frac{r_2}{r_1} N_\phi = p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2 r_1} \right)$$

No topo da casca, $r_1 = r_2 = \frac{a^2}{b}$, de forma que

$$N_\phi = N_\theta = \frac{pa^2}{2b}$$

No equador da casca, $r_1 = \frac{b^2}{a}$ e $r_2 = a$, de forma que

$$N_\phi = \frac{pa}{2} \text{ e } N_\theta = pa \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right)$$

Assim, N_ϕ é sempre positiva, enquanto N_θ fica negativa no equador se $a^2 > 2b^2$.

4. TEORIA FLEXIONAL PARA CASCAS CILÍNDRICAS

Em muitas aplicações práticas têm-se cascas cilíndricas carregadas simetricamente em relação ao eixo. É, e.g., o caso de vasos de pressão cilíndricos (como fuselagens de aeronaves), tubulações (como *raiser* de petróleo em instalações *off-shore*) etc.

Considere-se o elemento de casca cilíndrica de espessura e da Fig. 3.10, em que o eixo longitudinal é x , o eixo y é tangente à casca em um ponto e o eixo z , normal a esses eixos, tem a direção do raio do cilindro. Como a curva geradora da casca é uma reta paralela ao eixo, o raio de curvatura do meridiano r_1 é infinito (curvatura nula) e o raio de curvatura do paralelo $r_2 = a$.

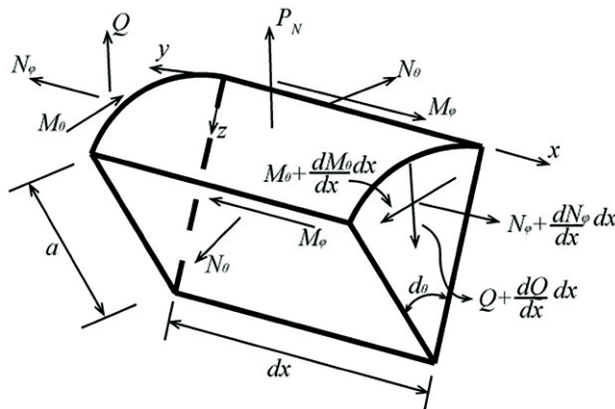


Figura 3.10: Elemento de casca cilíndrica

Por razões de simetria, não há forças tangenciais $N_{\theta\phi} = N_{\phi\theta}$, só havendo forças tangenciais Q . Ainda por simetria, não há momentos de torção $M_{x\phi} = M_{\phi x}$, e o momento fletor M_ϕ tem que ser constante ao longo da circunferência. Das 6 equações de equilíbrio em 3D, restam apenas 3:

$$\sum F_x = 0 = \frac{dN_\phi}{dx} adxd\theta \quad (3.8)$$

$$\sum F_z = 0 = \frac{dQ_x}{dx} adxd\theta + N_\theta dxd\theta + p_N dxd\theta$$

$$\sum M_y = 0 = \frac{dM_\theta}{dx} adxd\theta - Q_x adxd\theta$$

A primeira equação de (3.8) implica em que N_ϕ é constante, e facilmente determinável na prática, não afetando o cálculo dos momentos, podendo ser considerada nula nas derivações que se seguem. Restam

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N_\phi = -p_N \quad (3.9)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$$

duas equações e três incógnitas. Para solução, considera-se os deslocamentos no sentido longitudinal u e o no sentido radial w , segundo Fig. 3.11.

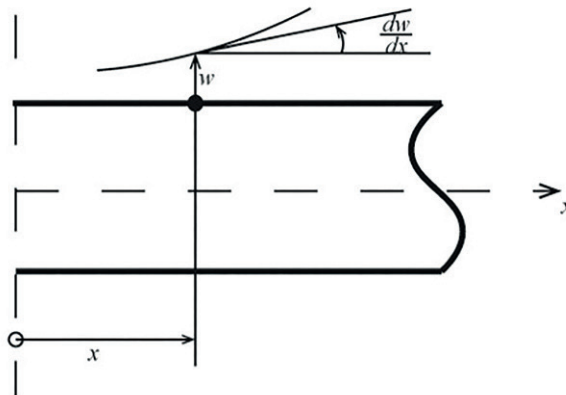


Figura 3.11: Deslocamento radial da casca

As deformações nesses dois sentidos são

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad e \quad \varepsilon_\phi = -\frac{w}{a} \quad (3.10)$$

levando, por meio da Lei de Hooke, a

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a} \quad (3.11)$$

Da segunda equação de equilíbrio

$$N_\phi = -\frac{Etw}{a} \quad (3.12)$$

Por simetria, não há variação na curvatura na direção circunferencial. Já a curvatura na direção longitudinal é $-\frac{d^2w}{dx^2}$. Lembrando as considerações feitas na dedução das expressões dos momentos fletores em placas planas, chega-se a

$$M_\phi = \nu M_x \quad (3.13)$$

$$M_\theta = -D \frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{onde} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.14)$$

Retornando às equações de equilíbrio (3.9), e supondo a espessura t constante, obtém-se

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = \frac{p_N}{D} \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{Et}{4a^2D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2t^2} \quad (3.15)$$

A Eq. (3.15) é a equação diferencial que rege o problema. A solução geral padrão para esse tipo de equação diferencial é a soma da solução homogênea com a particular:

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) + f(x) \quad (3.16)$$

Na Eq. (3.16) as constantes saem das condições de contorno geométricas nas extremidades do cilindro.

4.1 Exemplos

4.1.1 Casca cilíndrica

Verificar que a solução do exemplo 3.2. atende a Eq. 3.15.

4.1.2 Momento e força cortante distribuídos na borda de uma casca cilíndrica

Considera-se a Fig. 3.12, representando um carregamento composto de momento fletor por unidade de comprimento M_0 (Nm/m) e força cortante por unidade de comprimento Q_0 (N/m) uniformemente distribuídos no perímetro da extremidade de uma casca cilíndrica longa, não pressurizada interiormente ($p_N = 0$), implicando que não há solução particular $f(x)$ na Eq. (3.16).

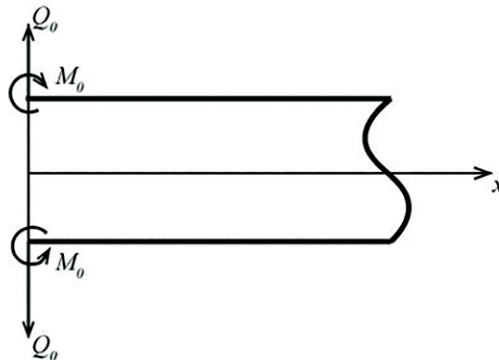


Figura 3.12: Casca cilíndrica com momentos e forças por unidade na borda

Como fisicamente em cascas finas o momento fletor deve diminuir rapidamente com a variável x , é necessário que $C_1 = C_2 = 0$, restando

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x)$$

No contorno

$$(M_\theta)_{x=0} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0$$

$$(Q)_{x=0} = \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0$$

resultando

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (Q_0 + M_0) \quad C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}$$

e

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\text{sen}\beta x - \text{cos}\beta x) - Q_0 \text{cos}\beta x]$$

É simples verificar, plotando em uma planilha EXCEL, por exemplo, ou no MATLAB, que o valor máximo é obtido na borda carregada $x = 0$ e vai diminuindo rapidamente ao longo desse eixo.

5. ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO

Muitos problemas tridimensionais no campo da engenharia apresentam simetria ao redor de um eixo de rotação, tanto em sua geometria como nas condições de contorno e cargas aplicadas.

Esses problemas são conhecidos como axissimétricos. Eles podem ser analisados de maneira mais simples como um caso bidimensional no plano rz , em que r é o raio e z a coordenada longitudinal. Os resultados são equivalentes à resposta global do sólido de revolução. A Figura 3.13 mostra um sólido de revolução sujeito a cargas distribuídas simétricas com respeito ao eixo vertical Z indicando a simplificação realizada para análise pelo MEF como um caso bidimensional.

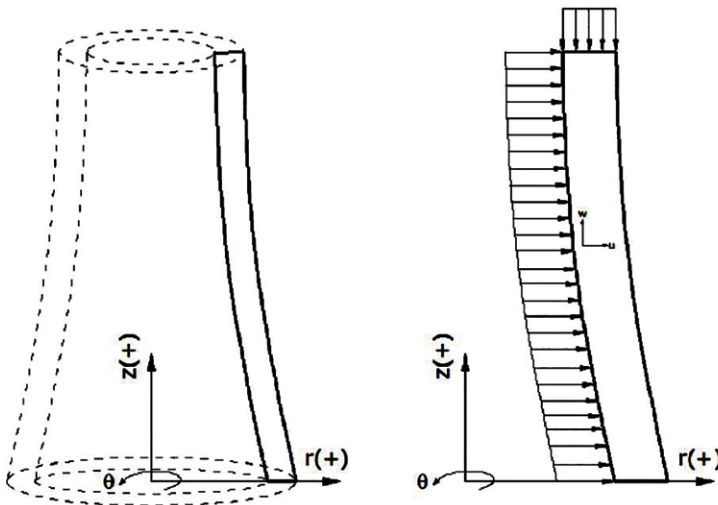


Figura 3.13: Estrutura genérica com simetria axial
 Fonte: Guallichico S. F. R., & Macas V. X. O. (2010).

Vantagens:

- malhas de elementos finitos mais simples.
- redução significativa do número de graus de liberdade.
- diminuição substancial do tempo de resolução do sistema de equações.
- maior facilidade de interpretação de resultados.

5.1 Mecânica de sólidos axissimétricos

5.1.1 Deslocamentos e deformações

Em um sólido que cumpre com as condições para ser modelado como um sólido de revolução, o movimento de um ponto qualquer localizado na secção característica de revolução pode ser perfeitamente definido pelas componentes de deslocamento radial u e axial w , como mostra a Figura 3.14.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

O vetor das deformações de um ponto, neste caso, tem as seguintes componentes:

1. ε_r : deformação radial.
2. ε_z : deformação axial.
3. ε_θ : deformação circunferencial.
4. γ_{rz} : deformação tangencial.

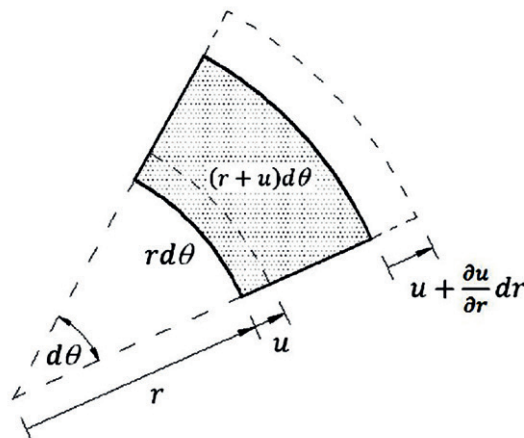


Figura 3.14: Elemento diferencial circunferencial

Analisando a Figura 3.14 pode-se ver que a deformação radial tem a forma:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{dr} \left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.18)$$

De maneira semelhante, a deformação axial é dada pela relação

$$\varepsilon_z = \frac{1}{dz} \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz - w \right) = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.19)$$

Por outro lado, a deformação circunferencial está estreitamente relacionada com a deformação radial, expressando-se da forma:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{r}{u} \quad (3.20)$$

De acordo com estas 3 equações, pode-se escrever o vetor de deformações:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (3.22)$$

Para este caso, a matriz de operadores diferenciais $[L]$ teria a forma:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

5.1.2 Tensões

As tensões não nulas, correspondentes às deformações não nulas, são mostradas em um elemento diferencial sujeito ao estado de tensões mostrado na Figura 3.15.

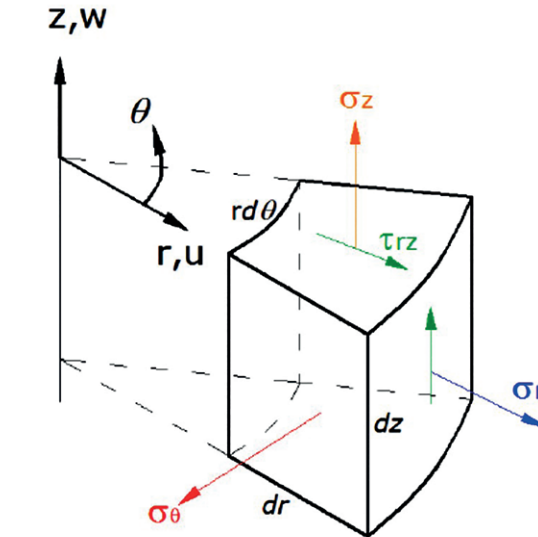


Figura 3.15: Tensões atuando sobre um elemento diferencial de um sólido de revolução

Então o vetor do campo de tensões tem a forma:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

onde σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz} são, respectivamente, as tensões radial, axial, circunferencial e tangencial.

5.1.3 Equação constitutiva

Considerando um material isotrópico e homogêneo, cujo comportamento se encontra na região linear (lei de Hooke), a equação constitutiva tem a forma:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.25)$$

Em consequência, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \vartheta & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1-\nu & \vartheta & 0 \\ \vartheta & \vartheta & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

onde $[D]$, a matriz de propriedades do material para o caso bidimensional é:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \vartheta & 1-\nu & \nu & 0 \\ \vartheta & \vartheta & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

5.2 Discretização por elementos finitos

Supõem-se, agora, que o domínio do sólido foi discretizado em elementos pequenos, porém finitos. O vetor de deslocamentos nodais para um elemento bidimensional de M nós é dado pela equação

$$[q^{(e)}] = \begin{Bmatrix} [u_1] \\ [w_1] \\ [u_2] \\ [w_2] \\ \dots \\ [u_M] \\ [w_M] \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Adota-se uma matriz de funções de forma para este elemento, ordenadas na forma:

$$N = \left(\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} N_M & 0 \\ 0 & N_M \end{bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

permitindo chegar a um campo de deslocamentos aproximado da forma:

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^M N_i(r, z) u_i \quad (3.30)$$

$$w(r, z) = \sum_{i=1}^M N_i(r, z) w_i$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} N_M & 0 \\ 0 & N_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u_1] \\ [w_1] \\ [u_2] \\ [w_2] \\ \cdots \\ [u_M] \\ [w_M] \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Do produto da matriz de operadores diferenciais pela matriz de funções de forma, resulta a matriz gradiente de deformação $[B]$

$$[B] = [N][L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} N_M & 0 \\ 0 & N_M \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

que também pode ser expressa na forma:

$$[B] = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_2}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \frac{\partial N_M}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_M}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_M}{\partial z} \\ \frac{\partial N_M}{\partial z} & \frac{\partial N_M}{\partial r} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.33)$$

permitindo a aproximação para as deformações:

$$\varepsilon = LU = LNU^{(e)} = BU^{(e)} \quad (3.34)$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 \\ N_1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 \\ N_2 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} \end{array} \right] \cdots \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_M}{\partial r} & 0 \\ N_M & 0 \\ r & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_M}{\partial z} \\ \frac{\partial N_M}{\partial z} & \frac{\partial N_M}{\partial r} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} [u_1] \\ [w_1] \\ [u_2] \\ [w_2] \\ \cdots \\ [u_M] \\ [w_M] \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Da aproximação do campo de deformações resulta a aproximação do campo de tensões:

$$\{\sigma\} = [D][B][U^{(e)}] \quad (3.36)$$

A seguir, pela aplicação de um princípio físico, como o do mínimo da Energia Potencial Total ou dos Trabalhos Virtuais, ou uma técnica matemática de minimização de resíduos, como a de Galerkin, chega-se à matriz de rigidez do elemento.

Essa matriz contém a resposta interna do sistema que equilibra as solicitações externas. Sendo assim, a matriz de um elemento genérico é dada pela expressão:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV^{(e)} M_\theta = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.37)$$

$$\text{onde } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

com

$$dV^{(e)} = 2\pi r dr dz M_\theta = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\text{onde } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento terá a forma:

$$[k^{(e)}] = 2\pi \int_{A^{(e)}} [B]^T [D] [B] r dr dz M_\theta = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.38)$$

$$\text{onde } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

A integração explícita desta última expressão não é recomendada devido à sua complexidade. Geralmente, é utilizada a técnica de integração numérica de Gauss, a qual se efetua em pontos especificamente determinados para o elemento finito em questão. Uma outra forma de fazer este cálculo de forma aproximada é avaliar a matriz $[B]$ no centroide do elemento com o qual as matrizes da integral se transformam em constantes e a matriz de rigidez aproximada é expressa por:

$$[k^{(e)}] = 2\pi r A [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \quad (3.39)$$

onde $2\pi r A$ é o volume do elemento axissimétrico.

A matriz do elemento é quadrada e simétrica, de dimensões $n \times n$, em que n é o produto dos graus de liberdade por nó do elemento pelo número de nós M .

No caso dinâmico, as matrizes de massa dos elementos podem ser obtidas a partir do vetor de velocidades aproximadas obtidas pela derivação no tempo do vetor de deslocamentos aproximado.

No passo seguinte, é feito o chamado “espalhamento” em que os coeficientes das matrizes dos elementos são adicionados às matrizes de rigidez e massa globais da estrutura nas posições dadas pela conectividade previamente definida no modelo.

Ao final, a solução das equações de equilíbrio global fornece os deslocamentos nodais dos quais se podem determinar os deslocamentos, deformações e tensões no interior dos elementos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brasil, R.M.L.R.F, Bases da Mecânica dos Sólidos Elásticos, com elementos finitos. Editora da UFABC, Santo André, 2017.

Brasil, R.M.L.R.F., Silva, M.A., Introdução à Dinâmica das Estruturas para a Engenharia Civil. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2013.

Leissa, A.W., Vibration of Plates. NASA, Washington, 1969.

Ogden, J.T., Reddy, J.N., An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. Dover Publications, Mineola, 2011.

Reddy, J.N., Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd Ed. CRC Press, Boca Raton, 2007.

Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Books, New York, 1964.

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, 3rd Ed. McGraw-Hill Books, New York, 2010.

Timoshenko, S.P., Gere, J., Theory of Elastic Stability, 2nd Ed. McGraw-Hill Books, New York, 1989.

Zagottis, D.L., Introdução à Teoria das Placas e Cascas. Escola Politécnica da USP, São Paulo, 1973.

ANEXO: PROGRAMAS EM MATLAB

Apresenta-se, a seguir, listagens de implementação, em linguagem MATLAB, de alguns programas computacionais para análise de Chapas, Placas e Cascas.

Textos precedidos pelo símbolo % são comentários, ignorados pelos programas, ou linhas que não se aplicam ao exemplo em questão.

Os exemplos podem, também, ser adaptados, com os devidos cuidados, para uso dos programas livres SCILAB e OCTAVE, similares ao MATLAB.

A.1 CHAPAS: ELEMENTO FINITO TRIANGULAR FUNÇÕES LINEARES

Programa para análise estática linear de uma chapa em Estado Plano de Tensões, discretizada com elementos finitos triangulares, funções de interpolação lineares, resultando tensões constantes no interior dos elementos.

Trata-se de uma chapa retangular de espessura unitária, altura 2 m e comprimento 4 m, módulo de elasticidade 100000 Pa, coeficiente de Poisson 0,3. A chapa está em balanço, fixa na extremidade esquerda e livre na direita, onde é solicitada por cargas axiais que perfazem uma força normal 1000 N. Ela é discretizada em 10 elementos triangulares.

```
%nome do arquivo MEF_chapa_elemento_triangular.m
%programa de EF para chapas planas com elementos triangulares
%funções de forma lineares - tensões constantes
% Prof Reyolando Brasil - abril/2016
%
clc
clear
%entrada de dados
%
%dimensões do problema
%
nno=10;%número de nós
nglpn=2;%número de graus de liberdade por nó
nds=nno*nglpn;%número de deslocamentos do sistema
nel=8;%número de elementos
nnel=3;%número de nós por elemento
ndpel=nnel*nglpn;%número de deslocamentos por elemento
%
%coordenadas X Y dos nós
%
gcoord=[0.0 0.0;0.0 1.0;1.0 0.0;1.0 1.0;2.0 0.0;
        2.0 1.0;3.0 0.0;3.0 1.0;4.0 0.0;4.0 1.0];
%
```

```

%conectividade por elemento (numeração dos nós de cada elemento)
%
nodel=[1 3 4;1 4 2;3 5 6;3 6 4;5 7 8;5 8 6;7 9 10;7 10 8];
%
% matriz de número de graus de liberdade por nó
%
LN=zeros(nno,nglpn);
%
%condições de contorno (n. de nó restrito e direções restritas ou livres)
%
LN(1,:)=[1 1];
LN(2,:)=[1 0];
%
%dados físicos dos elementos (esp., mód. elasticidade e coef.de Poisson)
%
t=1; EM=100000.0; nu=0.3;
%
%determinação das matrizes
%
%matriz LN
%
ngl=0;ngr=nds;
for i=1:nno
    for j=1:nglpn
        if (LN(i,j)==0)
            ngl=ngl+1;
            LN(i,j)=ngl;
        else
            LN(i,j)=ngr;
            ngr=ngr-1;
        end
    end
end
end

```



```
end
nr=nds-ngl;
%
%inicialização de matrizes e vetores
%
K=zeros(nds,nds);
p=zeros(nds,1);
P=zeros(nds,1);
E=zeros(3,3);
Tens=zeros(nel,3);
q=zeros(6,1);
%
% vetor de carregamento P
%
P(LN(9,1))=500;
P(LN(10,1))=500;
%
%introduzir aqui recalques de apoio
%
%matriz constitutiva Estado Plano de Tensões
%
E=EM/(1-nu^2)*[1 nu 0;nu 1 0;0 0 (1-nu)/2];
%
%matriz constitutiva Estado Plano de Deformações
%
%E=EM*(1-nu)/(1+nu)/(1-2*nu)*[1 nu/(1-nu) 0;
%   nu/(1-nu) 1 0;0 0 (1-2*nu)/2/(1-nu)];
%
%matrizes de rigidez
%
for iel=1:nel
    for j=1:nnel
```

```

    nd(j)=nodel(iel,j);
end
xa=gcoord(nd(1),1);ya=gcoord(nd(1),2);
xb=gcoord(nd(2),1);yb=gcoord(nd(2),2);
xc=gcoord(nd(3),1);yc=gcoord(nd(3),2);
%
%área do triângulo
%
am=[1 xa ya;1 xb yb;1 xc yc];
A=0.5*det(am);
%
% matriz B=LN
%
B=1/2/A*[yb-yc 0 yc-ya 0 ya-yb 0;0 xc-xb 0 xa-xc 0 xb-xa;...
xc-xb yb-yc xa-xc yc-ya xb-xa ya-yb];
%
% matriz de rigidez do elemento k
%
k=A*t*B'*E*B;
%
%soma na matriz de rigidez do sistema
%
kl=0;
for n=1:nnel
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),1);
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),2);
end
for i=1:ndpel
    for j=1:ndpel
        K(d(i),d(j))=K(d(i),d(j))+k(i,j);

```

```
    end
  end
end
%
% solução do sistema: cálculo dos deslocamentos
%
disp('deslocamentos')
p(1:ngl)=K(1:ngl,1:ngl)\(P(1:ngl)-K(1:ngl,ngl+1:nds)*p(ngl+1:nds))
%
% cálculo das reações de apoio
%
disp('Esforços Nodais inclusive reações de apoio')
P(ngl+1:nds)=K(ngl+1:nds,1:ngl)*p(1:ngl)+K(ngl+1:ngl+1,ngl+1:ngl+1)...
    *p(ngl+1:nds)
%
% tensões
%
disp('tensões nos elementos')
disp('sigma_x, sigma_y, tau_xy')
for iel=1:nel
    for j=1:nnel
        nd(j)=nodel(iel,j);
    end
    xa=gcoord(nd(1),1);ya=gcoord(nd(1),2);
    xb=gcoord(nd(2),1);yb=gcoord(nd(2),2);
    xc=gcoord(nd(3),1);yc=gcoord(nd(3),2);
%
% área do triângulo
%
    am=[1 xa ya;1 xb yb;1 xc yc];
    A=0.5*det(am);
%
```

```

% matriz B=LN
%
B=1/2/A*[yb-yc 0 yc-ya 0 ya-yb 0;0 xc-xb 0 xa-xc 0 xb-xa;...
        xc-xb yb-yc xa-xc yc-ya xb-xa ya-yb];
%
kl=0;
for n=1:nnel
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),1);
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),2);
end
for i=1:ndpel
    q(i)=p(d(i));
end
tau=E*B*q;
Tens(iel,:)=tau';
end

```

A.2 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR (ARGYRIS), ESTÁTICA

Programa para análise estática linear de uma chapa em Estado Plano de Tensões, discretizada com elementos finitos retangulares, funções de interpolação quadráticas, resultando tensões variáveis no interior dos elementos.

Trata-se de uma chapa retangular horizontal de espessura unitária, altura 2 m e comprimento 4 m, módulo de elasticidade 100000, coeficiente de Poisson 0,3. A chapa está em balanço, fixa na extremidade esquerda e livre na direita, onde é solicitada por carga vertical de 1000.

O programa está equipado com um gerador de malha simples para facilitar a entrada de dados. A chapa é dividida em 16 elementos na direção do comprimento e em 4 elementos na direção da altura, perfazendo 64 elementos finitos quadrados de 0,5 m x 0,5 m.

```
%nome do arquivo MEF_chapa_elemento_retangular_ger.m
%programa de EF para chapas planas com elementos retangulares
%Baseado em Argyris 1954
% Prof Reyolando Brasil - abril/2018
%
clc
clear
%entrada de dados
%
%gerador de malha elemento retangular
%Prof. Reyolando Brasil - abril 2018
%dimensoes do retangulo
compr=8;
alt=2;
%divisoes
ndx=16;ndy=4;
nno=(ndx+1)*(ndy+1);%numero de nos
dx=compr/ndx;dy=alt/ndy;
%geracao das coordenadas
gcoord=zeros(nno,2);
```

```

x=0;y=0;k=0;
for i=1:ndx+1
    for j=1:ndy+1
        k=k+1;
        gcoord(k,1)=x;gcoord(k,2)=y;
        y=y+dy;
    end
    y=0;
    x=x+dx;
end
%
%geracao da conectividade dos elementos
%
nel=ndx*ndy;%numero de elementos
nodel=zeros(nel,4);
kel=0;kaux=0;
for i=1:ndx
    for j=1:ndy
        kaux=kaux+1;
        kel=kel+1;
        nodel(kel,1)=kaux+ndy+2;nodel(kel,2)=kaux+1;
        nodel(kel,3)=kaux;nodel(kel,4)=kaux+ndy+1;
    end
    kaux=kaux+1;
end
%dimensao do problema
%
nglpn=2;%numero de graus de liberdade por no
nds=nno*nglpn; %numero de deslocamentos do sistema
nnel=4; %numero de nos por elemento
ndpel=nnel*nglpn;%numero de deslocamentos por elemento
%
```

```
% matriz de numero de graus de liberdade por no
%
LN=zeros(nno,ngl|pn);
%
%condicoes de contorno (n. de no restrito e direções restritas ou livres)
%engaste de viga em balanco
for i=k-ndy:k
    LN(i,:)=[-1 -1];
end
%
%dados fisicos dos elementos (esp., modulo elasticidade e coef.de Poisson)
%
t=1; EM=1000000.0; nu=0.3;
EL=EM/(1-nu*nu);G=EM/2/(1+nu);
E=EL*[1 nu 0;nu 1 0;0 0 (1-nu)/2];
%
%determinação das matrizes
%
%matriz LN
%
ngl=0;
for i=1:nno
    for j=1:ngl|pn
        if LN(i,j)==0
            ngl=ngl+1;
            LN(i,j)=ngl;
        end
    end
end
ngl=ngl;
for i=1:nno
    for j=1:ngl|pn
```

```

    if LN(i,j)<0
        ngr=ngr+1;
        LN(i,j)=ngr;
    end
end
end
%
%inicializacao de matrizes e vetores
%
K=zeros(nds,nds);
p=zeros(nds,1);
P=zeros(nds,1);
Tens=zeros(nel,3);
q=zeros(8,1);
%
% vetor de carregamento P
%carga vertical na extremidade livre de viga em balanço
V=-1000;
for i=1:ndy+1
    P(LN(i,2))=V/(ndy+1);
end
%
%introduzir aqui recalques de apoio
%
%matrizes de rigidez dos elementos
%
for iel=1:nel
    for j=1:nnel
        nd(j)=nodel(iel,j);
    end
    xa=gcoord(nd(1),1);xb=gcoord(nd(2),1);
    yb=gcoord(nd(2),2);yc=gcoord(nd(3),2);

```



```
%  
%dimensoes do retangulo  
%  
a=(xa-xb)/2;b=(yb-yc)/2;  
%  
%constantes  
c1=EL*t*b/3/a;c2=c1/2;c3=EL*t*nu/4;  
c4=G*t*a/3/b;c5=c4/2;c6=G*t/4;  
%  
kd(1,1)=c1;kd(1,2)=c3;kd(1,3)=-c1;kd(1,4)=c3;kd(1,5)=-c2;k-  
d(1,6)=-c3;kd(1,7)=c2;kd(1,8)=-c3;  
kd(2,2)=c1;kd(2,3)=-c3;kd(2,4)=c2;kd(2,5)=-c3;kd(2,6)=-c2;kd(2,7)=c3;kd(2,8)=-c1;  
kd(3,3)=c1;kd(3,4)=-c3;kd(3,5)=c2;kd(3,6)=c3;kd(3,7)=-c2;kd(3,8)=c3;  
kd(4,4)=c1;kd(4,5)=-c3;kd(4,6)=-c1;kd(4,7)=c3;kd(4,8)=-c2;  
kd(5,5)=c1;kd(5,6)=c3;kd(5,7)=-c1;kd(5,8)=c3;  
kd(6,6)=c1;kd(6,7)=-c3;kd(6,8)=c2;  
kd(7,7)=c1;kd(7,8)=-c3;  
kd(8,8)=c1;  
%  
ks(1,1)=c4;ks(1,2)=c6;ks(1,3)=c5;ks(1,4)=-c6;ks(1,5)=-  
c5;ks(1,6)=-c6;ks(1,7)=-c4;ks(1,8)=c6;  
ks(2,2)=c4;ks(2,3)=c6;ks(2,4)=-c4;ks(2,5)=-c6;ks(2,6)=-c5;ks(2,7)=-c6;ks(2,8)=c5;  
ks(3,3)=c4;ks(3,4)=-c6;ks(3,5)=-c4;ks(3,6)=-c6;ks(3,7)=-c5;ks(3,8)=c6;  
ks(4,4)=c4;ks(4,5)=c6;ks(4,6)=c5;ks(4,7)=c6;ks(4,8)=-c5;  
ks(5,5)=c4;ks(5,6)=c6;ks(5,7)=c5;ks(5,8)=-c6;  
ks(6,6)=c4;ks(6,7)=c6;ks(6,8)=-c4;  
ks(7,7)=c4;ks(7,8)=-c6;  
ks(8,8)=c4;  
%  
k=kd+ks;  
%  
%simetria
```

```

%
for i=2:8
    for j=1:i-1
        k(i,j)=k(j,i);
    end
end
%
%soma na matriz de rigidez do sistema
%
kl=0;
for n=1:nnel
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),1);
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),2);
end
for i=1:ndpel
    for j=1:ndpel
        K(d(i),d(j))=K(d(i),d(j))+k(i,j);
    end
end
end
%
% solucao do sistema: calculo dos deslocamentos
%
disp('deslocamentos')
p(1:ngl)=K(1:ngl,1:ngl)\(P(1:ngl)-K(1:ngl,ngl+1:nds)*p(ngl+1:nds));
disp(p)
%
%calculo das reações de apoio
%
disp('Esforços Nodais inclusive reacoes de apoio')

```

```
P(ngl+1:nds)=K(ngl+1:nds,1:ngl)*p(1:ngl)+K(ngl+1:ngl+1,ngl+1:ngl+1)...
    *p(ngl+1:nds);
disp(P)
%
%
%Tensões
%
disp('Tensoes no pto central dos elementos')
disp('sigma_x,  sigma_y,  tau_xy')
for iel=1:nel
    for j=1:nnel
        nd(j)=nodel(iel,j);
    end
    xa=gcoord(nd(1),1);xb=gcoord(nd(2),1);
    yb=gcoord(nd(2),2);yc=gcoord(nd(3),2);
%
% dimensões do retangulo
%
    a=(xa-xb)/2;b=(yb-yc)/2;
%
% constantes
%
    ca=1/4/a;cb=1/4/b;
% matriz B=L*N calculada no centro do elemento x=y=0
%
    B=[ca 0 -ca 0 -ca 0 ca 0;0 cb 0 cb 0 -cb 0 -cb;cb ca cb -ca -cb -ca -cb ca];
%
    kl=0;
    for n=1:nnel
        kl=kl+1;
        d(kl)=LN(nd(n),1);
        kl=kl+1;
    end
end
```

```
    d(k1)=LN(nd(n),2);  
end  
for i=1:ndpel  
    q(i)=p(d(i));  
end  
tau=E*B*q;  
Tens(iel,:)=tau';  
end  
disp(Tens)
```

A.3 CHAPAS: ELEMENTO FINITO RETANGULAR, FREQUÊNCIAS E MODOS

Programa para determinação de frequências e modos de vibração de uma chapa discretizada com elementos finitos retangulares, com matriz de massas não consistente.

Considere-se a mesma chapa quadrada da Fig. 1.24, de espessura, comprimento e largura unitários. Também se adota módulo de elasticidade 15, coeficiente de Poisson 0,25 e densidade 1.

A chapa será dividida em somente um elemento retangular, como mostrado na Figura 1.24.

Pede-se determinar as duas frequências de vibração livre e respectivos modos de vibração.

```
%nome do arquivo MEF_chapa_elemento_retangular_FREQ.m
%programa de EF para chapas planas com elementos retangulares
%frequencias e modos de vibracao
%Baseado em Argyris 1954
% Prof Reyolando Brasil - janeiro 2019
%
clc
clear
%entrada de dados
%
%dimensoes do problema
%
nno=4;%numero de nós
nglpn=2;%numero de graus de liberdade por no
nds=nno*nglpn; %numero de deslocamentos do sistema
nncr=4;%numero de nós com restricoes
nel=1;%numero de elementos
nnel=4; %numero de nos por elemento
ndpel=nnel*nglpn;%numero de deslocamentos por elemento
%
```

```

%coordenadas X Y dos nos
%
gcoord=[0 0;1 0;1 1;0 1];
%
%conectividade por elemento (n. dos nos de cada elemento)
%
nodel=[1 2 3 4];
%
% matriz de numero de graus de liberdade por no
%
LN=zeros(nno,nglpn);
%
%condicoes de contorno (n. de no restrito e direcoes restritas ou livres)
%
LN(1,:)=[-1 -1];
LN(2,:)=[-1 -1];
LN(3,:)=[0 -1];
LN(4,:)=[0 -1];
%
%dados fisicos dos elementos: esp., modulo elasticidade, coef.de
%Poisson,densidade
%
t=1; EM=15;nu=0.25;rho=1;
EL=EM/(1-nu*nu);G=EM/2/(1+nu);
E=EL*[1 nu 0;nu 1 0;0 0 (1-nu)/2];
%
%determinacao das matrizes
%
%matriz LN
%
ngl=0;
for i=1:nno

```

```
    for j=1:nglpn
        if LN(i,j)==0
            ngl=ngl+1;
            LN(i,j)=ngl;
        end
    end
end
ngr=ngl;
for i=1:nno
    for j=1:nglpn
        if LN(i,j)<0
            ngr=ngr+1;
            LN(i,j)=ngr;
        end
    end
end
end
%
%inicializacao de matrizes e vetores
%
K=zeros(nds,nds);
M=zeros(nds,nds);
%
%matrizes de rigidez e massa dos elementos
%
for iel=1:nel
    for j=1:nnel
        nd(j)=nodel(iel,j);
    end
    xa=gcoord(nd(1),1);xb=gcoord(nd(2),1);
    yb=gcoord(nd(2),2);yc=gcoord(nd(3),2);
%
%dimensoes do retangulo
```

```

%
a=(xa-xb)/2;b=(yb-yc)/2;
%
%constantes
c1=EL*t*b/3/a;c2=c1/2;c3=EL*t*nu/4;
c4=G*t*a/3/b;c5=c4/2;c6=G*t/4;
%
kd(1,1)=c1;kd(1,2)=c3;kd(1,3)=-c1;kd(1,4)=c3;kd(1,5)=-c2;k-
d(1,6)=-c3;kd(1,7)=c2;kd(1,8)=-c3;
kd(2,2)=c1;kd(2,3)=-c3;kd(2,4)=c2;kd(2,5)=-c3;kd(2,6)=-c2;kd(2,7)=c3;kd(2,8)=-c1;
kd(3,3)=c1;kd(3,4)=-c3;kd(3,5)=c2;kd(3,6)=c3;kd(3,7)=-c2;kd(3,8)=c3;
kd(4,4)=c1;kd(4,5)=-c3;kd(4,6)=-c1;kd(4,7)=c3;kd(4,8)=-c2;
kd(5,5)=c1;kd(5,6)=c3;kd(5,7)=-c1;kd(5,8)=c3;
kd(6,6)=c1;kd(6,7)=-c3;kd(6,8)=c2;
kd(7,7)=c1;kd(7,8)=-c3;
kd(8,8)=c1;
%
ks(1,1)=c4;ks(1,2)=c6;ks(1,3)=c5;ks(1,4)=-c6;ks(1,5)=-
c5;ks(1,6)=-c6;ks(1,7)=-c4;ks(1,8)=c6;
ks(2,2)=c4;ks(2,3)=c6;ks(2,4)=-c4;ks(2,5)=-c6;ks(2,6)=-c5;ks(2,7)=-c6;ks(2,8)=c5;
ks(3,3)=c4;ks(3,4)=-c6;ks(3,5)=-c4;ks(3,6)=-c6;ks(3,7)=-c5;ks(3,8)=c6;
ks(4,4)=c4;ks(4,5)=c6;ks(4,6)=c5;ks(4,7)=c6;ks(4,8)=-c5;
ks(5,5)=c4;ks(5,6)=c6;ks(5,7)=c5;ks(5,8)=-c6;
ks(6,6)=c4;ks(6,7)=c6;ks(6,8)=-c4;
ks(7,7)=c4;ks(7,8)=-c6;
ks(8,8)=c4;
%
k=kd+ks;
%
%simetria
%
for i=2:8

```



```
        for j=1:i-1
            k(i,j)=k(j,i);
        end
    end
end
%
%matriz de massa simplificada do elemento m
m=rho*a*b/4*eye(8)
%
% soma na matriz de rigidez e de massa do sistema
%
kl=0;
for n=1:nnel
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),1);
    kl=kl+1;
    d(kl)=LN(nd(n),2);
end
for i=1:ndpel
    for j=1:ndpel
        K(d(i),d(j))=K(d(i),d(j))+k(i,j);
        M(d(i),d(j))=M(d(i),d(j))+m(i,j);
    end
end
end
%
KLL=K(1:ngl,1:ngl)
MLL=M(1:ngl,1:ngl)
%
% solução do problema de autovalores e autovetores
%
[v,d]=eig(KLL,MLL);
%
```

```
disp('Frequencias, em rad/s')
for i=1:ngl
    sqrt(d(i,i))
end
%
% modos de vibracao
%
for i=1:ngl
    const=v(1,i);
    for j=1:ngl
        v(j,i)=v(j,i)/const;
    end
end
disp('modos de vibracao')
```

A.4 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, ESTÁTICA

Programa para análise estática linear de uma placa fina, discretizada pelo Método das Diferenças Finitas.

Trata-se de uma placa retangular de espessura 2 cm, comprimento 3 m, largura 2 m, módulo de elasticidade 200 GPa, coeficiente de Poisson 0,3. A placa engastada nas faces paralelas ao comprimento e simplesmente apoiada nas paralelas à largura. O carregamento é uniformemente distribuído, 2 kN/m². A malha adotada tem 4 divisões em ambas as direções.

```
% placas retangular 3x2m
% diferenças finitas
% Prof. Reyolando Brasil 22 abril 2017
%
clc
clear
%
%propriedade físicas
%
a=3;b=2;%dimensões do retângulo
EM=200e6;t=0.02;nu=0.3;p=2;
D=EM*t^3/(12*(1-nu^2));pdD=p/D;
%
%geração da malha
%
nd=4;
np1=nd+1;
np3=nd+3;%número de nós da malha expandida em cada direção
neq=(nd-1)^2;%número de equações a resolver
hx=a/nd;hy=b/nd;hx4=hx*hx*hx*hx;hy4=hy*hy*hy*hy;hx2hy2=hx*hx*hy*hy;
%
%inicialização
%
```

```

A=zeros(np3*np3,np3*np3);%número de nós da malha = np3*np3
B=zeros(np3*np3,1);
kk=zeros(neq,1);
aa=zeros(neq,neq);
bb=zeros(neq,1);
%
%geração das equações de diferenças finitas para os nós internos
%
m=0;
for i=3:np1 % número da linha
    k=(i-1)*np3+2;
    for j=3:np1 %número da coluna
        k=k+1;m=m+1;kk(m,1)=k;%número do nó
        A(k,k-2)=1/hx4;
        A(k,k-1)=-4/hx4-4/hx2hy2;
        A(k,k+1)=-4/hx4-4/hx2hy2;
        A(k,k+2)=1/hx4;
        A(k,k)=6/hx4+6/hy4+8/hx2hy2;
        A(k+2*np3,k)=1/hy4;
        A(k+np3,k)=-4/hy4-4/hx2hy2;
        A(k-np3,k)=-4/hy4-4/hx2hy2;
        A(k-2*np3,k)=1/hy4;
        A(k+np3,k+1)=2/hx2hy2;
        A(k+np3,k-1)=2/hx2hy2;
        A(k-np3,k+1)=2/hx2hy2;
        A(k-np3,k-1)=2/hx2hy2;
        B(k,1)=pdD;
    end
end
%
%condições de contorno: isup, iinf, iesq, idir
%
```

```
%código: -1=apoiado; 1=engastado
%
isup=1;iinf=-1;iesq=-1;idir=-1;
%
%bordo superior
%
k=2*np3+2;
for j=3:np1
    k=k+1;
    A(k,k)=A(k,k)+isup*A(k-2*np3,k);
end
%
%bordo inferior
%
k=nd*np3+2;
for j=3:np1;
    k=k+1;
    A(k,k)=A(k,k)+iinf*A(k+2*np3,k);
end
%
%bordo esquerdo
%
k=2*np3+3;
for i=3:np1
    A(k,k)=A(k,k)+iesq*A(k,k-2);
    k=k+np3;
end
%bordo direito
%
k=3*np3-2;
for i=3:np1
    A(k,k)=A(k,k)+idir*A(k,k+2);
```

```
        k=k+np3;
end
%
%montagem sistema de equações
%
for i=1:neq
    for j=1:neq
        aa(i,j)=A(kk(i),kk(j));
    end
    bb(i)=B(kk(i));
end
%
%solução do sistema
%
w=aa\b;
wmax=1000*max(w)%deslocamento máximo em mm
```

A.5 PLACAS RETANGULARES: DIFERENÇAS FINITAS, FREQUÊNCIAS

Apresenta-se, a seguir, listagem de uma implementação, em linguagem MATLAB, da determinação das frequências de vibração livre não amortecida de uma placa fina, discretizada pelo Método das Diferenças Finitas.

Trata-se de uma placa retangular de espessura 10 cm, comprimento 4 m, largura 2 m, módulo de elasticidade 25 GPa, coeficiente de Poisson 0,25, densidade de 2500 kg/m³. A placa é simplesmente apoiada em todo seu perímetro. A malha adotada tem 16 divisões em ambas as direções.

```
% placa_dif_fin_vibra_livre
% placas
% diferenças finitas
%vibracoes livres
% Prof. Reyolando Brasil 24 janeiro 2019
%
clc
clear
%
%propriedades físicas
%
a=4;b=2;%dimensões do retângulo
EM=250e8;t=0.1;nu=0.25;rho=2500;
D=EM*t^3/(12*(1-nu^2));
%
%geração da malha
%
nd=16;%número de divisões da malha
np1=nd+1;
np3=nd+3;%número de nós da malha expandida em cada direção
neq=(nd-1)^2;%número de equações a resolver
hx=a/nd;hy=b/nd;hx4=hx*hx*hx*hx;hy4=hy*hy*hy*hy;hx2hy2=hx*hx*hy*hy;
%
```

```

%inicialização
%
A=zeros(np3*np3,np3*np3);%número de nós da malha = np3*np3
kk=zeros(neq,1);
aa=zeros(neq,neq);
bb=zeros(neq,neq);
%
%geração das equações de diferenças finitas para os nós internos
%
m=0;
for i=3:np1 % número da linha
    k=(i-1)*np3+2;
    for j=3:np1 %número da coluna
        k=k+1;m=m+1;kk(m,1)=k;%número do nó
        A(k,k-2)=1/hx4;
        A(k,k-1)=-4/hx4-4/hx2hy2;
        A(k,k+1)=-4/hx4-4/hx2hy2;
        A(k,k+2)=1/hx4;
        A(k,k)=6/hx4+6/hy4+8/hx2hy2;
        A(k+2*np3,k)=1/hy4;
        A(k+np3,k)=-4/hy4-4/hx2hy2;
        A(k-np3,k)=-4/hy4-4/hx2hy2;
        A(k-2*np3,k)=1/hy4;
        A(k+np3,k+1)=2/hx2hy2;
        A(k+np3,k-1)=2/hx2hy2;
        A(k-np3,k+1)=2/hx2hy2;
        A(k-np3,k-1)=2/hx2hy2;
    end
end
%
%condições de contorno: isup, iinf, iesq, idir
%
```



```
%código: -1=apoiado; 1=engastado
%
isup=-1;iinf=-1;iesq=-1;idir=-1;
%
%bordo superior
%
k=2*np3+2;
for j=3:np1
    k=k+1;
    A(k,k)=A(k,k)+isup*A(k-2*np3,k);
end
%
%bordo inferior
%
k=nd*np3+2;
for j=3:np1;
    k=k+1;
    A(k,k)=A(k,k)+iinf*A(k+2*np3,k);
end
%
%bordo esquerdo
%
k=2*np3+3;
for i=3:np1
    A(k,k)=A(k,k)+iesq*A(k,k-2);
    k=k+np3;
end
%bordo direito
%
k=3*np3-2;
for i=3:np1
    A(k,k)=A(k,k)+idir*A(k,k+2);
```

```
k=k+np3;
end
%
%montagem sistema de equações
%
for i=1:neq
    for j=1:neq
        aa(i,j)=A(kk(i),kk(j));
    end
end
%
%
%solução do problema de autovalores e autovetores
%
lambda=eig(aa);
disp('Frequencias, em rad/s')
format long
omega=sqrt(lambda*D/rho)
```

SOBRE O AUTOR

REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL

É Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia Mackenzie tendo sempre atuado profissionalmente em consultoria em estruturas. É Mestre, Doutor e Livre Docente pelo Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da USP. Foi Professor Titular de Resistência dos Materiais da Escola de Engenharia Mackenzie, Professor Associado do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da USP e é, atualmente, Professor Titular de Estruturas Aeroespaciais da Universidade Federal do ABC. Com 50 anos como docente e pesquisador já publicou vários livros, dezenas de artigos em periódicos internacionais, orientou 11 doutorados e 22 mestrados. É Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq, nível 1B.

