

Maria José Ferreira da Silva

**INVESTIGANDO SABERES DE PROFESSORES  
DO ENSINO FUNDAMENTAL COM ENFOQUE  
EM NÚMEROS FRACIONÁRIOS PARA  
A QUINTA-SÉRIE**

2<sup>a</sup> edição

Maria José Ferreira da Silva

Investigando saberes de professores  
do ensino fundamental com enfoque  
em números fracionários para a  
quinta série

**Blucher**

*Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*

© 2017 Maria José Ferreira da Silva

2.ª ed.

Editora Edgard Blücher Ltda.

---

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.  
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,  
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela editora  
Edgard Blücher Ltda.

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Silva, Maria José Ferreira da

Investigando saberes de professores do ensino  
fundamental com enfoque em números fracionários  
para a quinta série [livro eletrônico] / Maria José  
Ferreira da Silva. – 2. ed. – São Paulo : Blucher, 2017.  
282 p.; PDF

Bibliografia

ISBN 978-85-8039-156-5 (e-book)

1. Ensino fundamental 2. Matemática - Estudo e  
ensino 3. Pesquisa educacional 4. Professores - formação  
I. Título.

16-0344

CDD 510.72

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Educação matemática - pesquisa educacional

# **Aprovado pela banca examinadora**

Prof. dr. Saddo Ag Almouloud – PUC/SP

Profa. dra. Laurizete Ferragut Passos – PUC/SP

Profa. dra. Tânia Campos – PUC/SP

Profa. dra. Regina Maria Pavanello – UEM

Profa. dra. Adair Mendes Nacaratto – USF



Maria José Ferreira da Silva

# Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia  
Universidade Católica de São Paulo, como exigência  
parcial para obtenção do título de doutor em Educa-  
ção Matemática.

Orientação: Professor doutor Saddo Ag Almouloud.

PUC/SP



Para *Vinícius* e *Otávio*, minhas  
maiores riquezas.



# Agradecimentos

Meus agradecimentos sinceros a *todos* que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho, trocando ideias, fazendo sugestões ou presentes como amigos, apoiando-nos incondicionalmente.

Em especial:

A meu orientador, Professor Doutor *Saddo Ag Almouloud*, pelas orientações, apoio, incentivo e confiança fundamentais para meu desenvolvimento pessoal e profissional. Mais do que orientador, um amigo cuja presença foi fundamental para realização deste estudo.

Às Professoras Doutoras *Adair Mendes Nacaratto*, *Laurizete Ferragut Passos* e *Regina Maria Pavanello*, por aceitarem participar da banca examinadora, além das críticas e contribuições inestimáveis para a concretização deste trabalho. Particularmente, à Professora Doutora *Tânia Maria Mendonça Campos*, pelas críticas e sugestões importantes e, mais especificamente, pela confiança depositada em mim que permitiu o desenvolvimento de minha carreira profissional desde o início.

Às colegas e amigas Professoras Doutoras *Cileda de Queiroz e Silva Coutinho* e *Ana Lúcia Manrique* e Professora Mestre *Sonia Regina Facco* que, além da inestimável contribuição para a realização desta pesquisa, foram incansáveis no apoio durante todos os momentos.

Aos professores do *Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática* da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo apoio, atenção e contribuições em todos os momentos desta empreitada. Especialmente, aos Professores Doutores *Benedito Antonio da Silva* e *Sonia Barbosa Camargo Iglori*.

Aos professores pesquisadores e observadores do Projeto: *O Pensamento Matemático no Ensino Fundamental*: *Rosana Nogueira Lima*, *Vera Helena Giusti*,

*Cláudia Borim da Silva, Renata Rossini, Leila Muniz e José Nilton Alves Mota*, pela participação incondicional durante todo o trabalho. Em especial, à colega e companheira *Maria Inez Rodrigues Miguel*.

Aos professores *Antonio, Bruno, Carla, Davi, Edson, Fabiana, Gina, Hilda e à Aluna*, e outros que, embora de passagem, contribuíram para a concretização desta pesquisa, por dedicarem parte de seu tempo engajando-se em um projeto de aperfeiçoamento profissional.

A meus pais *Olívia e Manuel*, pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

A meus *irmãos*, pela ausência em tantas reuniões familiares importantes.

A meus filhos, *Alexandre, Maira e Emerson* e a meus netos, *Vinícius e Otávio* pelos momentos de suas vidas que não pude estar presente.

A todos os colegas do programa de doutorado, parceiros de tantas horas.

Ao secretário do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, *Francisco Olimpio da Silva* pelo auxílio, sobretudo, na formatação deste trabalho e pela amizade de tantos anos.

Ao Conselho de Ensino e Pesquisa da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelas horas de pesquisa concedidas por meio da Bolsa de Capacitação Docente, sem a qual seria impossível a realização deste doutorado.

# Conteúdo

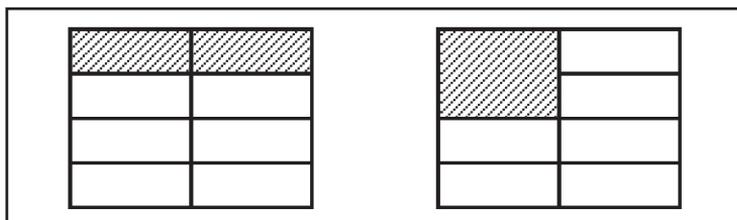
Introdução .....	13
Primeira parte – O problema .....	19
1 Resultados de pesquisas .....	19
2 Problemática .....	24
3 Metodologia e procedimentos metodológicos .....	36
Segunda parte – Estudos preliminares para a formação.....	41
1 Uma questão de terminologia e significados .....	41
2 Breve estudo da gênese de número fracionário .....	50
3 Uma organização matemática para a formação.....	88
Terceira parte – O dispositivo experimental .....	135
1 Caracterização do projeto de formação, da escola e dos professores.....	135
2 A formação .....	144
3 Análises .....	149
Considerações finais.....	213
Fundamentação teórica e metodológica .....	215
Principais resultados, questões de pesquisas e nossas hipóteses .....	221
Implicações e perspectivas futuras.....	227
Referências .....	231

<b>Apêndice A – Material da formação específica: as concepções de números fracionários .....</b>	<b>243</b>
1 Introdução .....	243
2 Concepções .....	244
<b>Apêndice B – Material de formação dos alunos .....</b>	<b>261</b>
1 Ficha 01 .....	261
2 Ficha 02 .....	263
3 Ficha 03 .....	266
4 Ficha 04 .....	269
5 Ficha 05 .....	275
6 Ficha 06 .....	276
7 Ficha 07 .....	278
8 Ficha 08 .....	279
9 Ficha 09 .....	281

# Introdução

Nosso interesse por números fracionários vem desde 1989, quando em pesquisa sobre o assunto, com alunos do Ensino Fundamental, percebemos suas dificuldades para se relacionar com esses números. Neste trabalho, alguns resultados obtidos são apresentados em Jahn e outros (1999) e mostram que a introdução de números fracionários nas séries iniciais pelo procedimento da dupla contagem das partes, em superfícies totalmente divididas em partes congruentes, conduz a criança a entender os fracionários, como se fossem dois números naturais: um que se coloca em cima e outro abaixo de um traço. Além de mostrar que esse procedimento descaracteriza a superfície apresentada por não tratar de sua área e privilegiar a “discretização” dessa superfície para permitir a contagem.

Embora o enfoque, com figuras convenientemente divididas permita representar alguma parte pintada da figura por um número fracionário, com sucesso, essa representação poderá conduzir ao fracasso, quando o objeto representado fugir desse padrão. Por exemplo, nos desenhos da Figura 1, pelo procedimento da dupla contagem das partes, o aluno poderia associar  $2/8$  e  $1/7$ , respectivamente.



**Figura 1** – representação geométrica de fracionários.

Decididos a aprofundar este estudo com o objetivo de promover mudanças no processo de aprendizagem, para alunos do quarto ano de magistério de um

CEFAM<sup>1</sup>, em nosso mestrado, fizemos uma formação apoiada em algumas das concepções de números fracionários, como parte-todo, medida e quociente, após uma análise das concepções<sup>2</sup> de números fracionários de alunos de 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> séries e de professores das séries iniciais.

Verificamos que os futuros professores passaram a tratar situações que envolviam números fracionários de forma mais crítica, permitindo-nos inferir alguma aprendizagem resultante das atividades desenvolvidas. Constatamos, ainda que professores, do primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, mobilizam com predominância a concepção parte-todo, com necessidade de as figuras estarem totalmente divididas em partes congruentes e a não percepção do número fracionário como quociente, embora afirmassem que o associavam à divisão.

Além disso, situações de correção de questões que sugeriam respostas de alunos, mostraram que esses professores acreditam que o aluno erra, sobretudo, por falta de atenção, o que nos levou a supor que esses erros não advêm de uma possível falha do ensino. Nenhum dos professores tentou perceber, o que o aluno estaria pensando, quando apresentava tais respostas. Na realidade, os professores não estavam preparados para trabalhar com esses erros e sugeriam a revisão do conteúdo ou “ensinar de novo” para saná-los (SILVA, 1997).

Antes de prosseguirmos, cabe aqui esclarecer que, neste trabalho, empregaremos o termo números fracionários para identificar qualquer número ou expressão algébrica escrita na forma fracionária. Esta escolha será justificada por um estudo a respeito da terminologia pertinente ao tema no corpo do trabalho.

Como formadores, participamos de alguns projetos de formação continuada, presenciais e a distância para professores de Matemática, que lecionavam nos ciclos finais do Ensino Fundamental organizados pela PUC-SP em parceria com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Estas formações consistiam, essencialmente, em propiciar aos professores situações que provocassem reflexões sobre sua prática no ensino de conteúdos das séries específicas. As discussões permitiram-nos formar ideias sobre o conhecimento matemático, a prática e as concepções desses professores a respeito do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Almouloud e outros (1998, p. 10) elaboraram uma caracterização dos professores de um desses projetos e, entre outras conclusões, afirmaram que esses professores: “*parecem possuir, no seu discurso, concepções coerentes com as da*

---

1 CEFAM: Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério.

2 Adotamos o termo concepção, segundo Artigue (1990, p. 274) que a define como um objeto local, estreitamente associado ao saber em jogo e aos diferentes problemas em cuja resolução intervém.

*Educação Matemática, mas que não foram refletidas na prática de sala de aula”.* Quanto à formação acrescentam que:

Uma capacitação que leva em consideração aspectos didáticos e matemáticos levaria estes professores a melhor estudar os fenômenos ligados ao ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos e a desenvolver situações-didáticas que permitam ao aluno agir, falar, refletir e evoluir por sua iniciativa própria. (ALMOULOUUD e outros, 1998, p. 11)

Como formadores e pesquisadores, participamos também do projeto *Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas* que objetivou discutir o ensino e a aprendizagem de tópicos de Geometria, com professores do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Nesse trabalho, percebemos entre outras coisas que:

Os professores participantes do projeto embora tenham mudado de postura perante algumas situações, parecem ter mais facilidade em lidar com o concreto. O que poderá se tornar um entrave para atingir e conduzir seus alunos a um pensamento mais genérico e mais formal. [...]

O fato de estarmos tratando com adultos não significa que tenham raciocínios abstratos, pelo contrário, vimos que a formação que receberam não se preocupou provavelmente em lhes proporcionar situações que os fizessem desenvolver compreensão de enunciados, vocabulário próprio, tratamento de informações, [...] o que, muitas vezes, os impossibilita de solucionar um problema com sucesso. (MANRIQUE, SILVA, ALMOULOUUD, 2002, p. 16)

Nessa pesquisa, já nos questionávamos a respeito do tratamento que esses professores dariam ao ensino dos números fracionários em suas aulas de Matemática; a respeito de uma formação contínua e eficaz pela qual os professores promovessem uma melhor aprendizagem para seus alunos. Sabemos que tanto a formação inicial como a continuada têm sido motivo de muitas discussões e pesquisas; o próprio MEC publicou nos *Referenciais para Formação de Professores* que:

A formação de que dispõem os professores hoje no Brasil não contribui suficientemente para que seus alunos se desenvolvam como pessoas, tenham sucesso nas aprendizagens escolares e, principalmente, participem como cidadãos de pleno direito num mundo cada vez mais exigente sob todos os aspectos. [...] A formação inicial em nível superior é fundamental [...]. Entretanto não é por si só, garantia de qualidade [...] o que torna

indispensável a criação de sistemas de formação continuada e permanente para todos os professores. (MEC, 1999, p.17-19)

Por outro lado, sabemos dos problemas provocados pela ruptura que existe no sistema educativo brasileiro na passagem da quarta para a quinta série. Embora, oficialmente, tenhamos um Ensino Fundamental de oito anos, a divisão, “primário” e “secundário”, ou primário e ginásio persiste, provavelmente, pela formação diferenciada dos professores que nele atuam. Explicita-se essa ruptura no relatório do SARESP, quando a seguinte recomendação é feita:

Cabe ao professor das séries iniciais a responsabilidade das experiências para o ensino dessas ideias/interpretações das frações [parte/todo, quociente, razão, operador] e espera-se que o aluno, ao chegar a quinta série domine não só o conceito, mas também representar frações, operar com elas e utilizá-las na resolução de problemas. (SARESP, 1995, p. 97)

O enunciado acima sugere aos professores de quinta série que seus alunos já construíram o conceito de números fracionários e estão aptos a solucionar problemas que solicitem a mobilização do fracionário, como parte-todo, quociente, razão e operador.

No entanto, sabemos que as licenciaturas não preparam os professores para trabalhar com essa conceituação; pelo contrário, quando isso acontece, o conjunto dos números racionais é visto como uma construção formal com base nos inteiros ou, ainda, como um representante da estrutura algébrica de corpo com regras operatórias e propriedades bem definidas. A respeito da importância do ensino de números fracionários, o SARESP afirma ainda que:

As frações geralmente introduzidas na 3ª série são trabalhadas até a última série do primeiro grau, sendo que, nas duas últimas, numa abordagem algébrica. Entretanto, um número significativo de pessoas considera que sua importância é superestimada nos currículos. [...] A proposta curricular reserva um lugar muito especial para a fração [...] sua inclusão levou em conta que este tema além de fazer parte de um acervo cultural básico, é fundamental para o desenvolvimento de outros assuntos essenciais dentro e fora da Matemática. (SARESP, 1995, p. 97)

Ante o exposto, planejamos uma formação para professores de Matemática dos ciclos finais do Ensino Fundamental que participam do Projeto de pesquisa: *O Pensamento Matemático no Ensino Fundamental*, desenvolvido na PUC/SP, para tratar de números fracionários. Dentro desse campo, buscamos pesquisar o

ensino e a aprendizagem dos números fracionários para a quinta série com esses professores da rede pública do Estado de São Paulo.

O estudo teve como objetivo prático a formação de um grupo de professores de Matemática e permitiu seu acesso a resultados de pesquisa sobre fracionários pertinentes à quinta série baseados nas concepções de fracionários tratadas por Behr e outros (1983): parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Como pesquisa, buscou observar as concepções de fracionários e da aprendizagem de seus alunos, mobilizados pelos professores na elaboração de uma sequência de ensino<sup>3</sup> desse assunto para essa série, bem como suas dificuldades e autonomia durante essa construção.

Para a realização deste trabalho, procuramos pesquisas que tratam da formação de professores a respeito de números fracionários com suporte teórico na Didática da Matemática. Modelamos matematicamente tipos de tarefas associadas às diversas concepções de fracionários e às técnicas possíveis para resolvê-las bem como o discurso tecnológico-teórico que as justificam, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, que possibilitou agregar os resultados de pesquisa ao ensino do tema.

Fizemos um estudo epistemológico que mostra a razão de ser dos números fracionários que nos ajudou a esquematizar uma possível conceituação dos números racionais e elaborar uma formação pertinente ao acesso dos professores a esses estudos.

Durante nosso estudo, usamos alguns dos princípios da pesquisa-ação porque esta permite uma investigação colaborativa no sentido de conduzir os professores à reflexão sobre suas relações com o saber, os colegas e alunos em interação com o grupo de pesquisadores.

O estudo é apresentado em três partes. Na primeira, alguns resultados de pesquisas, relevantes para nosso trabalho, são apresentados por tratarem de números fracionários na formação de professores do Ensino Fundamental. Encontram-se, também, nessa primeira parte, a problemática que norteou as questões desta pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados para a realização das atividades e a análise dos resultados da pesquisa.

Na segunda, encontram-se os estudos que serviram de referência para a formação e para esclarecer um problema de terminologia e significado para fração, número racional e número fracionário.

---

3 Entenderemos neste trabalho uma sequência de ensino como uma série de atividades relacionadas com o conteúdo a ser ensinado, elaborado prevendo em sua aplicação o cumprimento das etapas de ação, formulação, validação e institucionalização, segundo a Teoria das Situações de Brousseau (1986).

Nesta parte, explicitamos também um estudo da gênese do número fracionário que busca em seu desenvolvimento histórico situações que solicitam a mobilização dessas concepções e uma Organização Matemática desenvolvida baseada nas concepções de números fracionários, ambos apoiados na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Finalmente, na terceira parte deste trabalho, descrevemos nosso dispositivo experimental, as análises e as conclusões por nós executadas.

# Primeira parte

## O problema

Iniciamos este estudo apresentando alguns resultados de pesquisas que tratam da formação de professores, envolvendo números fracionários com o intuito de situar a problemática e garantir a singularidade de nossa pesquisa. Nesta parte do trabalho, trataremos das questões de pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados.

### 1 Resultados de pesquisas

Os projetos de pesquisa que tivemos oportunidade de participar basearam-se, fundamentalmente, nas teorias da Didática da Matemática porque, como Brousseau, nosso grupo acredita que a Didática da Matemática é: “[...] *a ciência das condições específicas de difusão (impostas) de saberes matemáticos úteis aos membros e às instituições da humanidade*” (Brousseau, 1984, apud Chevallard, 1999, p. 79, tradução nossa).

De acordo com Chevallard (1999), a Didática da Matemática apesar de ter se dedicado, inicialmente, a estudar atividades que tinham por objeto o ensino específico da Matemática, progressivamente estendeu-se para além das práticas matemáticas escolares e, hoje, posiciona-se no campo da antropologia dos saberes, oferecendo resultados teóricos que norteiam grande parte da produção de novos resultados. Tendo em vista esta escolha, restringimos a revisão dos trabalhos que tratam da formação de professores e de números fracionários embasados na Didática da Matemática.

#### 1.1 Garcia

O projeto de formação inicial de professores de matemática apresentado por Garcia (2003) mostra o trabalho de seu grupo de pesquisa, estabelecendo

conexões entre resultados de investigação na Didática da Matemática e a formação de professores, pois acredita que tais resultados podem se tornar conhecimentos teóricos na fundamentação dessa formação.

Para a autora, os programas de formação devem dar importância não só ao conhecimento de noções matemáticas escolares, mas também à forma de entender e dar significado a essas noções, procurando preparar os futuros professores a implementar uma nova cultura matemática escolar pautada na integração de informações obtidas de pesquisas com os conteúdos de formação, o que favoreceria a organização de experiências de aprendizagem escolar.

Acrescenta que certas ideias a respeito do conhecimento do futuro professor podem ser obtidas apoiadas em seu comportamento, perante novas tarefas e de seu processo de aprendizagem, em núcleos constituídos por uma situação e um conhecimento, integrados em uma atividade que podem ser apresentados como situação-problema, casos apresentados em vídeo, estudo de casos, etc.

A título de exemplo, a autora cita o trabalho de Linhares sobre números fracionários, que é discutido em sua formação em pequenos grupos, porque esta estratégia permite durante a reflexão a geração de perguntas e a compatibilização de significados que irão proporcionar informação teórica e elementos ativos<sup>1</sup> que favorecem a construção de um novo conhecimento.

A autora refere-se a alguns resultados que utiliza a respeito das dificuldades dos alunos com números fracionários, citando, inicialmente, o trabalho de Madeleine Goutard que, em 1964, baseada em suas observações em aula e em experiências com crianças que tinham dificuldades na aprendizagem desse conteúdo, afirmou que:

As frações não são algo que se tenha que saber, mas sim algo que se tenha que compreender, e não é possível compreendê-las antes de ter uma suficiente experiência com elas. [...] A chave do êxito na iniciação ao estudo das frações é a variedade, a troca, a diversidade de pontos de vista. (GOUTARD, 1964, apud Garcia, 2003, p. 18, tradução nossa)

Outro exemplo, apresentado pela autora, são os resultados de Ohlson de 1989, segundo os quais a dificuldade associada aos fracionários é de “natureza semântica”, pois seu significado complexo é, em parte, consequência da dificuldade em combinar os significados de  $a$  e  $b$  para gerar um significado conjunto para  $a/b$ .

As contribuições de Kieren e Streefland, quanto à necessidade de proporcionar às crianças experiências com as possíveis interpretações de números fracionários,

---

1 A autora nomeia de elementos ativos os resultados de pesquisa que transforma em informação teórica no programa de formação.

para que cheguem à compreensão do conceito. Assim como os estudos de Behr, de 1992, não foram esquecidos por Garcia (2003), pelo contrário, permitiram uma primeira informação teórica aos futuros professores que proporcionou o desenvolvimento das características de cada uma dessas diferentes concepções de números fracionários e, de suas particularidades, com base em três mecanismos construtivos fundamentais: a ideia da unidade (básica para várias concepções), a ideia de partes equivalentes (não necessariamente da mesma forma) e a ideia de divisão igualitária (como reflexo da habilidade de dividir um objeto ou objetos em partes iguais).

Da mesma forma, os resultados de Lesh e outros de 1983 mostram o importante papel das diferentes representações e do que chamam de translações entre elas (mudança de registros), com base em um modelo interativo que considera cinco sistemas de representação (diagramas, símbolos escritos, materiais concretos, linguagem falada e situações reais) que podem facilitar a aquisição e a utilização do conceito e tornar as ideias significativas aos aprendizes.

Para Garcia (2003), um grande problema na apresentação tradicional dos números fracionários, no contexto escolar, talvez, tenha sido o abuso de representações contínuas vinculadas sobretudo ao círculo (a célebre pizza), sem levar em conta outras representações contínuas (como a do retângulo) ou discretas (como fichas). A autora alerta para o papel das percepções na aprendizagem que entende como informações visuais provenientes de figuras, modelos ou diagramas que acompanham as tarefas usuais na escola para números fracionários.

As investigações sobre o papel dos erros, realizadas por Brousseau em 1986, também são utilizadas pela autora na formação, porque o professor deve observar o desenvolvimento do trabalho dos alunos, para detectar e analisar os tipos de erros cometidos.

Como exemplo, cita o emprego excessivo da interpretação parte-todo para números fracionários, partindo de diagramas que podem originar dificuldades para reconhecer que  $3/5$  é um número compreendido entre zero e um ou a divisão de 3 entre 5, em uma situação de distribuição, gerando, em consequência, um problema conceitual na integração das diferentes concepções de números fracionários.

Ao concluir seu artigo, Garcia (2003) afirma ter consciência da grande complexidade que o desenvolvimento dos números fracionários apresenta e que seu trabalho mostra apenas um exemplo de como pode ser um primeiro passo para abordar o estudo dos números fracionários, como objeto de ensino/aprendizagem de uma perspectiva que permite ao professor atuar sobre sua própria prática.

## 1.2 Sallán

Sallán (2001) enfoca os sistemas de representação dos números racionais e a formação inicial de professores para a educação primária. Apresenta uma

proposta didática com o objetivo de incrementar a compreensão dos futuros professores sobre os números racionais positivos e fortalecer as conexões entre as notações fracionária e decimal.

Na primeira etapa de sua pesquisa, definiu um modelo para a construção de dois sistemas de representação de quantidades não inteiras de grandeza. Conceituou expressões fracionárias e decimais, como resultados de partições igualitárias, nas quais as respectivas notações admitem uma estrutura numérica subjacente semelhante. Na etapa seguinte, entrevistou três estudantes que participaram da primeira etapa a fim de verificar as relações entre suas produções na etapa anterior e suas atuações, como professores revisando tarefas realizadas por alunos.

O autor acredita na viabilidade de uma proposta didática que incremente conexões entre as notações fracionária e decimal dos números racionais positivos na formação de futuros professores, apresenta as potencialidades mais importantes dessa proposta, bem como as principais dificuldades que encontrou. Mostra ainda com base na análise das informações obtidas na segunda etapa que existe relação entre os conhecimentos pessoais dos futuros professores e sua atuação profissional, pois, quanto maior e melhor for o domínio conceitual do professor, maior será sua competência em tarefas profissionais, como a revisão de tarefas e tanto melhores serão as explicações que oferecem e as atividades que propõem aos alunos.

### 1.3 Godino e outros

Godino e outros (2003) descrevem dois microprogramas interativos para o estudo dos números fracionários e realizam uma análise a priori, de suas características didáticas, por meio de ferramentas conceituais e metodológicas da Teoria das Funções Semióticas, pois estas permitem mostrar o sistema de objetos matemáticos utilizados nos programas e os processos semióticos que solicitam. Justificam o emprego dessa teoria, como contexto para a reflexão sobre a natureza essencialmente discursiva dos conceitos matemáticos e a respeito da importância dos momentos de conceituação no processo de estudo.

Este trabalho foi realizado em uma formação de professores da escola primária e os programas interativos selecionados permitiram representar números fracionários, na tela do computador, mediante gráficos de áreas e da reta racional, estabelecendo correspondências semióticas entre as expressões numéricas e as gráficas. No entanto, afirmam que por ter um caráter limitado e específico, colocam em jogo poucos conceitos e técnicas matemáticas, embora cumpram o objetivo de análise proposta para identificar critérios na utilização dos programas na educação primária e lançar questões para reflexão dos professores em formação.

## 1.4 Rational Number Project (RNP)

Entre os principais grupos de pesquisa, que se dedicam a estudar questões a respeito da aprendizagem de números racionais, encontra-se o *Rational Number Project* (RNP), fundado em 1979.

Conforme citam Cramer e outros (1998) consiste de um programa de pesquisa cooperativa que muito tem contribuído para a compreensão do pensamento das crianças a respeito desses números. Nesse artigo, os autores fazem uma retrospectiva do projeto, lembrando que o primeiro trabalho estudou o impacto de materiais manipulativos na compreensão das crianças a respeito do conceito de número racional e, os últimos, estendem o estudo dos números racionais para proporcionalidade, nas séries que equivalem a nossos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.

Nessa retrospectiva, citam a colaboração de Tom Kieren com uma estrutura conceitual importante para o RNP, quando afirmou que o domínio matemático dos números racionais é construído, com base em uma visão integrada das concepções: medida, quociente, operador e razão e, das relações entre elas. Referem-se ainda à contribuição de Vergnaud com seu “*Campo Conceitual Multiplicativo*”, como uma rede de conceitos relacionados multiplicativamente que propiciou, no final dos anos 80 do século XX, que o RNP avançasse pesquisando tais campos e explorando interconexões no desenvolvimento cognitivo de conceitos, constatando que em um estudo com professores da escola elementar encontraram:

[...] professores que resolveram os problemas corretamente e relacionaram com os conceitos de razão e proporção, entretanto professores que chegaram à solução correta sem esses conceitos, o fizeram com métodos como tentativa e erro. [...] Isto mostra que a formação dos conceitos de razão e proporção pode ser uma ferramenta poderosa no raciocínio com problemas multiplicativos. (CRAMER e outros, 1998, p. 3, tradução nossa)

## 1.5 Nossas considerações

As estratégias de formação de Garcia (2003) no sentido de fundamentar a formação de professores em resultados de pesquisas, consideramos relevantes, bem como os resultados de Sallán, quando mostram a existência de relações entre os conhecimentos pessoais de futuros professores e sua atuação profissional, além da relação entre sua competência e seu domínio profissional.

Da mesma forma, não podemos desprezar a importância das representações, em qualquer trabalho com números fracionários, evidenciada tanto por Godino e outros como pelos trabalhos do RNP.

Acreditamos que a formação de professores, tanto inicial como continuada, tem como finalidade prepará-lo para buscar a aprendizagem efetiva de seus alunos, pois sem isso não se justificariam as preocupações ou as pesquisas nas áreas de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, Ponte (1992) cita resultados em que o conhecimento e a cultura matemática do professor podem ter grande influência em seu estilo de ensino, o que também foi evidenciado por Sallán (2001). Para o autor, algumas investigações mostram que, de modo geral, os professores (especialmente de níveis mais elementares) sabem pouca matemática. Não só seu conhecimento sobre assuntos conhecidos é pouco profundo, como lhes faltam, muitas vezes, conhecimentos específicos, além da necessária segurança para tratar dos assuntos que ensinam.

Além de não termos encontrado trabalho mostrando resultados a respeito da formação continuada ou do tratamento dado aos números fracionários por professores dos ciclos finais do Ensino Fundamental, sentimos também a ausência, nas pesquisas apresentadas, de algum estudo epistemológico que poderia nos revelar outras faces do ensino e aprendizagem.

Por acreditarmos que uma formação continuada deve relacionar três campos de ação: o estudo do conteúdo em pauta que, em nosso caso, são os números fracionários; as ações formativas que são as estratégias adotadas para a formação e a aprendizagem dos alunos, apresentaremos, a seguir, apoiados nesses três eixos condutores, nossa problemática.

## 2 Problemática

Nossa problemática será desenvolvida baseada nos três objetivos centrais da formação que pretendemos: o objeto matemático números fracionários, as concepções dos professores a respeito de seus alunos e as ações formativas que possam possibilitar um melhor conhecimento didático do professor a respeito do tema.

Concordamos com Oliveira, Segurado e Ponte (1998), segundo os quais, um conhecimento é construído sob três bases: a Matemática (conceitos, terminologia, relações entre conceitos, processo matemáticos, forma de validação de resultados, competências básicas e processos de raciocínio); os processos de aprendizagem (relação entre ação e reflexão, papel das interações, papel das concepções dos alunos, dos conhecimentos prévios, estratégias de raciocínio, etc.) e o currículo (finalidades e objetivos, representação dos conceitos, materiais, etc.) além da instrução (ambiente de trabalho e cultura em classe, tarefas, comunicação e negociação de significados, modos de trabalho em classe etc.).

Assim, apresentaremos nossa problemática apoiada nesses três eixos norteadores no que segue.

## 2.1 Reflexão sobre o ensino de números fracionários

Na construção desta problemática, iremos nos deter em resultados que sugere novos pontos de vista para o ensino de números fracionários, sem tratar de números decimais, nem discussões a respeito de erros cometidos por alunos.

A presença da matemática na escola é, segundo Chevallard (1992), consequência de sua utilização na sociedade e não algo feito exclusivamente para ser ensinado na escola, acarretando a redução de seu valor social a um mero valor escolar e transformando o ensino escolar da matemática em um fim em si mesmo. Pelo contrário, o ensino da Matemática responde a uma necessidade social e individual, visto que cada indivíduo deve saber um pouco de matemática para resolver ou, simplesmente, reconhecer os problemas com os quais se depara na convivência social.

Direcionando o olhar para os números fracionários na escola, encontramos vários pesquisadores que se dedicam a responder questões a respeito desse ensino que levantam pontos importantes para seu ensino.

Post e outros (1982) tratam da equivalência entre fracionários e afirmam que a constatação da existência ou não de equivalência entre números fracionários pode ser feita com base em materiais manipulativos, de alguma habilidade para efetuar a “partição” de um objeto contínuo ou um conjunto de objetos discretos.

Já, Adjiage e Pluvinae (2000) indicam que, entre as representações disponíveis, a das retas graduadas, apresenta um conjunto de características favoráveis para o ensino de fracionários, entre elas, a familiaridade aos alunos, a flexibilidade de utilização (mudança de unidades, por exemplo), a boa adequação com as percepções de somas ou de algumas relações, como a duplicação de um segmento.

Por sua vez, Kieren (1988) afirma que o modelo parte-todo para o ensino dos números fracionários auxilia convenientemente na produção da linguagem fracionária, quando os textos de matemática da escola e o discurso do professor, tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar quantas dessas partes são consideradas (numerador).

Assim, embora esse procedimento capacite a criança a produzir respostas corretas para algumas situações, desenvolve um modelo mental não apropriado (partes de um inteiro), em vez de um mais poderoso, sugerido por Vergnaud, em 1983, que é o da medida (comparação com a unidade).

O autor acrescenta que a linguagem fracionária desenvolvida frequentemente orienta a criança para um resultado (da dupla contagem das partes) em vez de

orientar para o ato de “dividir em ‘n’ partes e sua representação matemática  $\square/n$ ”. Mas, alerta para o fato de a criança diferenciar a situação de dividir uma unidade em cinco partes e considerar três ( $3/5$  como parte/todo ou medida), da situação de dividir três inteiros em cinco partes (como distribuir três pizzas entre cinco pessoas), mesmo que o resultado seja o mesmo.

Godino e Batanero (2002) entendem a noção de razão de modo genérico, como a comparação de uma parte com outra parte nem sempre como sinônimo de fração. Para os autores, a ideia-chave é entender as frações como “qualquer par ordenado de números inteiros em que a segunda componente é distinta de zero” e, a razão, como “um par ordenado de quantidades de grandezas” expressas por um número real e uma unidade de medida. Assim, listam as seguintes diferenças entre razão e fração:

- As razões comparam entre si objetos heterogêneos, ou seja, objetos que se medem com unidades diferentes. As frações, ao contrário, se usam para comparar o mesmo tipo de objetos como “duas de três partes”, o que se indica por  $2/3$ . Assim, a razão de 3 presuntos/145 euros não é uma fração.
- Algumas razões não se representam com a notação fracionária. Por exemplo, 10 litros por metro quadrado. Neste caso, não se necessita nem se usa a notação de fração para informar a relação entre tais quantidades.
- As razões podem ser designadas mediante símbolos distintos das frações. A razão 4 em 7 se pode colocar como  $4:7$  ou  $4 \rightarrow 7$ .
- Nas razões, o segundo componente pode ser zero. Em um pacote de balas, a razão entre as verdes e as vermelhas pode ser  $10:5$ , mas também se pode dizer que pode ser  $10:0$ , se todas forem verdes (não se trata de fazer nenhuma divisão por 0).
- As razões nem sempre são números racionais. Por exemplo, a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro  $C/D$  é o número  $\pi$ , que sabemos não é racional, ou a razão do comprimento da diagonal de um quadrado com o comprimento de seu lado ( $\sqrt{2}$ ). Esta é uma diferença essencial entre “razão” e “fração”, já que como vimos as frações são sempre interpretáveis como quociente de inteiros.
- As operações com razões não se realizam, em geral, da mesma maneira que as frações. Por exemplo, 2 acertos sobre 5 tentativas ( $2:5$ ), seguidos de 3 acertos em 7 tentativas ( $3:7$ ) se combinam para produzir 5 acertos em um total de 12 tentativas, ou seja, com estas frações se pode definir uma “soma” de razões da seguinte maneira:  $2:5 + 3:7 = 5:12$ . Evidentemente esta soma não é a mesma que a soma de frações. (GODINO e BATANERO, 2002, p. 420-421, tradução nossa)

Percebemos que os autores afirmam que as razões comparam objetos medidos com unidades diferentes, ao mesmo tempo em que citam como exemplo de

razão, a comparação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro que devem ser medidos pela mesma unidade que, para nós, poderia ser interpretada também como quociente de dois números.

Por outro lado, a opção de representar uma razão por  $a : b$ , como fazia Euclides, seria possível se não usássemos a mesma notação para representar divisão em outros contextos. Enquanto a utilização da seta ( $a \rightarrow b$ ) poderia ser interpretada por uma relação de implicação.

Behr e outros (1992) consideram que a mais importante estrutura cognitiva relacionada e gerada pela interpretação de quociente para números fracionários é a partição, pois permite tratar os números racionais, como elementos de um campo quociente e, como tal, ser utilizado para definir equivalência, adição e multiplicação, além de propiciar a verificação de outras propriedades, por uma perspectiva puramente dedutiva.

Para as operações, Carpenter e outros (1994) propõem que, para reverter o quadro do ensino de procedimentos para operar com frações seja usada uma extensão direta das operações de adição e a subtração com inteiros, contando com o desenvolvimento dos conceitos de unidade e equivalência. De maneira similar, podemos construir a multiplicação de frações sobre os conhecimentos dessa operação com naturais na forma de comparação multiplicativa (multiplicação escalar) e a concepção de fracionário como operador (racional operando sobre racional).

A respeito do assunto, Behr e outros (1992), acreditam que a multiplicação de números racionais pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros a partir de situações que pedem para que seja encontrada a parte de uma parte como, por exemplo, a metade de um quinto.

Por outro lado, Post e outros (1992), entendem que os números racionais não são de simples construção, propõem, então, que sejam caracterizados por uma série de subconstruções distintas, embora relacionadas que serão identificadas por medida, quociente, operador, razão e parte-todo, sugerindo a necessidade de uma análise mais refinada de cada uma dessas subconstruções.

Esses, entre outros estudos, nos remetem a possibilidades de considerar alguns resultados de pesquisas que tratam de números fracionários na formação de professores do Ensino Fundamental. Assim, no ensino de fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental se faz necessário pontuar que conteúdo discutir durante a formação, que agregue resultados de pesquisas pertinentes para essa série.

Para organizar esse conteúdo, encontramos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) que, segundo Bosch e Chevallard (1999) permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais, considerando uma organização do saber matemático que está em jogo. Em parte, essa organização é o objetivo que o professor pretende alcançar com o ensino desse tema, ao mesmo tempo que sustenta a

elaboração da praxeologia ou Organização Didática que será colocada em prática na sala de aula.

De acordo com Chevallard (2002), o primeiro aspecto dessa organização caracteriza o saber-fazer, sendo designado por um bloco prático-teórico que consiste em considerar que toda ação humana, inclusive, as atividades matemáticas cumprem uma tarefa ( $t$ ) de um certo tipo ( $T$ ), por, pelo menos uma, determinada técnica ( $\tau$ ). O segundo aspecto caracteriza o saber em um sentido restrito que é designado por um bloco tecnológico-teórico, considerando uma certa tecnologia ( $\theta$ ) que justifica a técnica ( $\tau$ ) aplicada que permite, por um lado, pensar sobre a técnica e, por outro lado, produzir novas técnicas, além de uma teoria ( $\Theta$ ) que, por sua vez, justificaria tal tecnologia.

Do lado do professor, Chevallard (2002) entende que “*ensinar um certo tema matemático*” é um tipo de tarefa para o professor que, de acordo com sua teoria, consiste em “*ensinar uma organização praxeológica de natureza matemática*” que, para ser breve, chama de Organização Matemática. Assim, para ele o problema praxeológico do professor de Matemática é construir praxeologias, pois estas podem envelhecer, quando seus componentes teóricos e tecnológicos tornam-se desacreditados, visto que novos tipos de tarefas problemáticas apresentam, a todo momento, a construção de novas praxeologias.

Para Moreira (1999), é indispensável uma análise prévia daquilo que se vai ensinar porque nem tudo que está nos programas, nos livros e em outros materiais educativos do currículo é importante. Além disso, a ordem que os principais conceitos e ideias da matéria de ensino aparecem nos manuais educativos e nos programas, muitas vezes, não é a mais adequada para facilitar a interação com o conhecimento prévio do aluno.

Conforme se pretende formar o professor para elaborar organizações didáticas para o ensino de algum tema matemático, com certeza, entraremos em contato com suas concepções, mas, segundo Thompson (1997) quanto mais é aprendido sobre as concepções da matemática e do ensino de matemática do professor, mais se torna importante entender, como estas concepções são formadas e modificadas, acreditando que:

[...] qualquer esforço para melhorar a qualidade do ensino de matemática deve começar por uma compreensão das concepções sustentadas pelos professores e pelo modo como estas estão relacionadas com sua prática pedagógica. (Ibid, p.14)

Para a autora, os padrões de comportamento característicos dos professores apresentam-se em função de seus pontos de vista, crenças e preferências. Nesses

padrões de comportamento, encontra-se o próprio domínio do conteúdo matemático, que é preocupação de autores, como Azanha (1998) quando afirma:

A triste realidade é que o professor da escola pública paulista [...], em sua grande maioria, é atualmente mal formado. [...] No último concurso estadual para professores de nível III [...] 94.281 compareceram às provas e apenas 8.142 foram aprovados, isto é, mais ou menos 8%. (Ibid, p.51-52)

Nesse sentido, Moreira e David (2005) acreditam que os saberes fundamentais à prática pedagógica escolar não são devidamente discutidos no processo de formação e que a prática docente escolar não é capaz de produzir os saberes associados à ação pedagógica do professor.

Dessa forma, partindo do pressuposto de que um professor de matemática, depois de alguns anos de carreira, cumpre de maneira rotineira a tarefa de ensinar números fracionários, colocamo-nos frente a uma situação problemática: construir uma Organização Didática para o ensino de números fracionários para uma quinta série que se apóie em uma Organização Matemática previamente construída que considere resultados de pesquisas. Acreditamos como Shulman (1987) que a transformação dos conteúdos em produtos de ensino é uma maneira de observar a compreensão do professor sobre um determinado assunto e sua capacidade para ensiná-lo.

Assim, com o propósito de observar as concepções de números fracionários que os professores mobilizam, quando se propõem a ensinar esse conteúdo à quinta série, pretendemos responder, nesta pesquisa, a seguinte questão:

*Que organização didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação?*

Como hipótese de resposta para essa questão, acreditamos que os professores apresentarão uma Organização Didática para o ensino pretendido, apoiada em atividades de livros didáticos e associadas sobretudo à concepção parte-todo de números fracionários do que propriamente a formação recebida como resultado de uma resistência a possibilidade de mudança de algo que acreditam ter pleno domínio.

## 2.2 Relação professor-aluno no processo de ensino e aprendizagem de números fracionários

Pretendendo estimular professores em formação continuada para uma reflexão a respeito do ensino de fracionários, cabe olhar para as dificuldades de aprendizagem desse tema pelos alunos, bem como da relação entre professores e alunos, para que a aprendizagem ocorra.

Quanto à aprendizagem dos números fracionários, Adjiage e Pluinage (2000, p. 43, tradução nossa) afirmam que “*as aquisições referentes a números racionais evidenciam dificuldades que tomam muito tempo para serem ultrapassadas*”, e a apresentação simultânea de dois números inteiros – numerador e denominador – é um obstáculo<sup>2</sup> para aceitação de que uma fração descreve um único número, visto que essa dissociação leva a uma mobilização errônea da concepção de números inteiros, assim como um tratamento inadequado das representações, porque para o aluno dispõe-se de inteiros, mas não se tem o direito de tratá-los como tal.

Estes obstáculos foram tratados em Silva (1997), sendo alguns deles classificados e analisada sua interferência no ensino e aprendizagem de números fracionários. Entre eles, a autora destaca: a representação simbólica, a negação da necessidade de quantidades fracionárias, a aceitação das frações como representação de números, o conhecimento dos naturais, a passagem do discreto para o contínuo. Segundo Brousseau (1983) esses obstáculos são inerentes ao próprio saber e podem ser percebidos nas dificuldades que os matemáticos encontraram na história e, por isso, “*não podemos deles escapar nem deixá-los escapar*” (p. 178, tradução nossa).

Silva e Campos (2001) em pesquisa sobre formação de alunos de magistério, a respeito de fracionários, afirmam que o conhecimento prévio adquirido de forma mecânica, sem reflexão, interferia em cada momento do trabalho, embora a maioria dos alunos tenha apresentado, no pós-teste, melhor desempenho no tratamento com números fracionários relacionados à concepção de medida.

Por outro lado, para Lipman (2001) as crianças descobrem, aos poucos, que o ambiente escolar não é animador nem desafiador, pelo contrário, suga qualquer iniciativa, inventividade e reflexão que trazem, mesmo quando o enfoque do processo educativo não seja a aquisição de informações, mas a percepção das relações contidas nos temas investigados com a expectativa de que os alunos pensem, reflitam e desenvolvam o uso da razão, bem como a capacidade de serem criteriosos.

Para Santos (2004), existe uma estreita relação entre aprendizagem e formação do professor, sendo grande parte das dificuldades de aprendizagem dos alunos relacionada ao preparo dos professores e ao tratamento dispensado ao ensino de Matemática nas salas de aula.

---

2 Segundo Brousseau (1983) a noção de obstáculo permite uma nova maneira de olhar os erros dos alunos. Estes erros, em um mesmo sujeito, estão ligados entre si por uma causa comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica ou um conhecimento antigo que tem êxito em todo um domínio de ações e não em outro.

O conhecimento específico da disciplina ocupa sim um lugar importante no espectro de saberes necessários ao professor que ensina Matemática. [...] Emerge, como urgente, a necessidade de aprofundar o conhecimento do professor e do futuro professor sobre os processos envolvidos na relação ensino e aprendizagem, bem como, nas suas dificuldades. (Ibid, p. 5)

Para Chevallard (1999), uma das dificuldades didáticas mais comuns para um professor é “*dar um lugar aos alunos*”, pois:

O drama didático determinado pela palavra “lugar” se estabelece no jogo do professor, que deve estar presente, mesmo quando ausente, e deve saber se ausentar quando presente, a fim de deixar o aluno livre para conquistar certa independência. (Ibid, p. 249, tradução nossa)

Para o autor, não se deve observar apenas a atividade do professor, pelo contrário, deve-se perceber, também, a atividade do aluno, considerando a qualidade e a quantidade de trabalho autônomo, que lhe é exigido para assegurar um melhor rendimento em termos de aprendizagem. O aluno deve aceitar o professor, como um orientador de seu estudo, renunciando às enganosas facilidades que, a cada momento, lhe possa oferecer.

Entendemos que o professor deve criar um lugar que dê ao aluno o sentimento “*de ter um verdadeiro papel a desempenhar*” que solicita um professor atento para a construção de significados por seus alunos quando considera que um desses papéis é a própria construção de conhecimentos, de acordo com Chevallard (1999).

Assim, uma formação continuada para professores de matemática deve ajudá-los a desenvolver estratégias que os encaminhem a pensar em seus alunos, durante a resolução de tarefas que visem a aprendizagem de qualquer tema matemático, como agentes de sua própria aprendizagem que têm uma certa autonomia.

A reflexão dos professores sobre sua prática em sala de aula é primordial para percebermos o lugar que o professor reserva a seu aluno no momento em que acredita estar ensinando.

Desse modo, interessa-nos ver a possibilidade de os resultados da formação atingirem a sala de aula, tentando responder à seguinte questão:

*É possível encaminhar professores de matemática a reflexões que possibilitem mudanças nas concepções que têm de seus alunos proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar?*

A hipótese é que os professores não aceitem facilmente que alunos de quinta série possam resolver as tarefas propostas sem uma “revisão” ou “ensino” prévio do conteúdo pertinente à série sobre números fracionários

### 2.3 Reflexões sobre a formação continuada

A necessidade de novos pontos de vista para a Organização Matemática dos números fracionários, bem como um olhar aos alunos que nos permita vê-los como aprendizes, levam-nos a refletir sobre a formação de professores, em especial a continuada e seu desenvolvimento profissional.

O quadro geral do ensino brasileiro mostra a necessidade de discussões que priorizem a relação entre ensino e aprendizagem. É do senso comum que, geralmente, o professor acredita que sempre ensina, da melhor maneira possível. No entanto, quando se detecta que o aluno não aprende, o professor não consegue discernir as causas dessa não aprendizagem, questionando raramente suas estratégias de ensino. Na realidade, este assunto é delicado e ainda há dúvidas a respeito da existência de uma relação direta entre ensino e aprendizagem, como constatamos no *Referencial para a Formação de Professores* quando afirma que:

Se, por um lado, existem inúmeros indicadores de que a habilitação e a formação em serviço não garantem melhores resultados na aprendizagem dos alunos, por outro lado, há evidências que confirmam essa relação, embora não entendida como uma relação mecânica e diretamente proporcional. (MEC, 1999, p. 20)

Pavanello (2001) pesquisou a percepção que, alunos e professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, têm das relações entre os conceitos de área e de fração, como partição de grandezas contínuas. Observou que os professores não demonstram estabelecer tais relações e, por conseguinte, parece que não proporcionam condições necessárias, para que seus alunos as estabeleçam. Notou, ainda, um paralelismo entre as dificuldades apresentadas por alunos e professores que, em relação ao tema, podem sugerir que as dificuldades dos professores poderiam refletir na concepção das crianças.

A autora considera necessário que os cursos de formação de professores de matemática, para esse nível de ensino, realizem trabalhos que possibilitem a integração de diferentes temas da Matemática para a efetivação de umas aprendizagens mais significativas que conduziriam à superação das dificuldades dos professores e, conseqüentemente, dos alunos desse nível de ensino.

A integração de distintos temas matemáticos, por outro lado, apresenta-se como um problema de difícil trato, pois, quando explicitada para professores, estes justificam essas dificuldades como carências da formação. Mas, a despeito da complexa malha de problemas que o professor enfrenta, o primeiro passo é fazê-lo perceber que é o agente da formação do aluno e que possíveis mudanças do sistema escolar só serão facilitadas por seu desenvolvimento profissional.

Para Tardif (2000, p. 10) a profissionalização na educação é vista como uma tentativa de reformular e renovar os fundamentos epistemológicos do ofício de professor. Entende como epistemologia da prática profissional “*o estudo do conjunto de saberes utilizados realmente pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar todas as tarefas*”.

Para o autor citado, além da natureza dos conhecimentos de cada profissão, são exigidos de qualquer profissional autonomia, discernimento, a construção de julgamentos em ação e, ainda, a formação contínua, após os estudos iniciais, porque a evolução e o progresso desses conhecimentos profissionais impõem-se.

Mas, para Shulman (1987), as discussões referentes à base dos conhecimentos profissionais, raras vezes, especificam seu caráter para converter o ensino em algo mais do que um trabalho individual, pois não se refere ao que os professores deveriam saber, fazer, compreender ou professar, para que seja considerada entre as profissões douradas.

Para o autor, a maior parte do ensino tem características específicas, de acordo com a matéria que trata e tem como objetivo fazer com que os alunos aprendam a compreender e a resolver problemas e a pensar crítica e criativamente.

Na busca de estratégias de formação que, efetivamente, proporcionem o desenvolvimento profissional de professores, optamos, no projeto de pesquisa que participamos: *Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas*, realizado na PUC/SP, com verba da FAPESP de 2000 a 2002, a trabalhar com sequências desenvolvidas para o ensino desse conteúdo no Ensino Fundamental, pois os professores alegavam ter pouco conhecimento do assunto e nem sabiam como ensiná-lo.

Durante esse projeto, Manrique (2003) desenvolveu sua tese de doutorado e constatou algumas mudanças na prática de um, dos dois grupos, de professores que participaram do trabalho:

Os processos de mudança estudados explicitaram a procura de autonomia por qual passou o professor, bem como a necessidade de reflexão a respeito do contexto escolar e das próprias práticas pedagógicas. [...] Salientaram, também, a importância de um processo de formação que valorize os saberes docentes (porque são construídos e reconstruídos nas interações e relacionamentos do professor) e que aja sobre as capacidades individuais, propiciando a construção de meios de ação. (Ibid, p. 158)

A autora constata, além da possibilidade de mudanças nas práticas dos professores com relação à Geometria, também, a necessidade que sentem de reflexão sobre sua prática, na busca de autonomia para suas próprias ações, apresentando, assim, a autonomia como um foco de novas investigações. Sabemos que as aulas

da maioria dos professores espelham-se nos livros didáticos e dificilmente elaboram uma sequência didática para o ensino de algum tema da Matemática, pelo contrário, quando sentem tal necessidade, normalmente, buscam nas capacitações que participam, embora para Nacarato:

[...] apesar de todas as dificuldades pelas quais o professor vem passando, há ainda aqueles que aceitam o desafio e tentam fazer seu trabalho dignamente. São poucos? Talvez! Infelizmente, as denúncias vêm sempre contra os que não fazem, raramente os que fazem têm o seu trabalho valorizado. No entanto, nossa vivência e passagem por diferentes grupos, têm nos possibilitado conhecer trabalhos muito interessantes sendo realizados na escola pública – que no meu entender, ainda possibilita um trabalho autônomo ao professor. (NACARATO, 2004B, p. 6)

Não resta a menor dúvida que alguns professores realizam bons trabalhos na rede pública de ensino, mas, de acordo com Lipman (2001), os pensadores autônomos são os que “pensam por si mesmos”, que fazem seus próprios julgamentos, formando sua própria visão do mundo e desenvolvendo suas próprias concepções a respeito do tipo de indivíduos que querem ser e o tipo de mundo que gostariam. Nesse sentido, acreditamos que professores e alunos, com tal nível de autonomia, poderiam mudar o sistema escolar instituído, mas sabemos que estes são poucos.

Contudo, há os que acreditam que a formação contínua é o veículo de tal conquista e pode provocar a formação de um novo sistema didático, interrompendo a prática mecanizada instituída. Um deles é Chevallard (1999), para quem a prática mecanizada das tarefas do professor acontece pelo abandono de problemáticas didáticas que poderiam ser provocadas por situações que levem o professor a construir um novo saber-fazer.

Embora o autor acredite que a formação de um novo sistema didático interrompa o fluxo normal da atividade escolar e apareça como fonte de confusão, a escola nas sociedades modernas é uma maneira de gerenciar aprendizagens, pois nela consolida-se socialmente a ideia de didática e de estudo, ou seja, de fazer qualquer coisa a fim de aprender qualquer coisa (“saber”) ou aprender a fazer qualquer coisa (“saber-fazer”). Explícita como uma dificuldade do professor criar uma exposição adequada de um tema matemático de estudo que possibilite ao aluno desempenhar um trabalho autônomo, propiciando bons rendimentos em termos de aprendizagem.

Nesse sentido, Bosch e Gáscon (2001) atribuem como tarefas dos professores, de qualquer disciplina escolar, resolver os problemas da diversidade na aula, da avaliação dos alunos que não querem estudar, etc. enquanto outras seriam específicas de uma área matemática concreta. Destas, consideram algumas como rotineiras e

bem definidas, por não colocarem grandes problemas para o professor: escolher um livro, preparar um curso, organizar o programa, realizar as aulas, escolher os exercícios que os alunos devem fazer, propor uma prova, corrigir os deveres etc.

No entanto, como nem sempre aquilo que se encontra como rotineiro é eficaz; entendemos que a formação continuada de professores de Matemática atinge um alto nível de complexidade, porque atrás dessas rotinas estão escondidas as diversidades das formações iniciais que receberam que fazem com que um grupo de professores seja bastante heterogêneo no cumprimento de suas tarefas.

Essas rotinas e heterogeneidades devem ser então consideradas quando se pretende proporcionar ambientes de reflexão a respeito do ensino de números fracionários e dar autonomia para que os professores possam aplicar em sua prática, os resultados encontrados durante a formação.

Este ponto de vista foi discutido no I Seminário Nacional de Licenciatura em Matemática promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática onde se constatou que:

A partir de 1995, um novo foco começa a se fazer presente nas pesquisas sobre formação continuada de professores: o processo de se constituir professor a partir da prática docente. [...] As pesquisas [...] apontam a reflexão, a investigação da própria prática e os saberes da experiência como elementos para a constituição e o desenvolvimento profissional do professor. (SBEM, 2003, p. 12)

Para Lipman (2001, p. 27) “a reflexão sobre a prática constitui o questionamento da prática, e um questionamento efetivo inclui intervenções adequadas” sendo este o foco das formações continuadas atualmente.

Diante do exposto, buscamos estratégias de formação que propiciem esse ambiente de reflexão, preparando as ações formativas, baseadas em uma Organização Matemática que enfoque resultados de pesquisas anteriores privilegiando as concepções de números fracionários apresentadas por Behr e outros (1992) com o objetivo de permitir sua análise didática pelos professores e a consequente confrontação com suas próprias concepções.

Assim, focando as ações formativas desenvolvidas nos trabalhos de pesquisa pretendemos responder à seguinte questão:

*É possível em uma formação continuada promover ações que permitam aos professores alguma mudança em sua prática de ensino de números fracionários para uma quinta série?*

Temos como hipótese que os professores apresentarão resistência a um novo olhar no ensino de fracionários para essa série, procurando manter-se em sua prática rotineira, pois esta lhes transmite segurança.

Em continuidade a nosso trabalho, apresentaremos a seguir os procedimentos metodológicos que adotaremos para buscar respostas às questões apresentadas.

### **3 Metodologia e procedimentos metodológicos**

Com o intuito de responder as questões pretendidas, adotamos a pesquisa-ação como metodologia e alguns procedimentos metodológicos para a coleta das informações, baseados nas escolhas que norteiam o projeto de pesquisa em que este trabalho está inserido.

#### **3.1 Alguns princípios da pesquisa-ação**

Nossa pesquisa desenvolveu-se conforme uma abordagem metodológica qualitativa, na qual adotamos como metodologia a pesquisa-ação que, segundo Thiollent (2003), é um tipo de pesquisa social com base empírica concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo.

Uma pesquisa é assim qualificada quando houver uma ação não trivial, por parte das pessoas envolvidas no problema sob observação, na qual tanto os pesquisadores, como os participantes da situação ou do problema envolvem-se de modo cooperativo ou participativo.

Neste estudo, essa ação traduziu-se na elaboração de uma sequência didática para o ensino de fracionários para a quinta série pelos professores em formação. Conforme Thiollent (2003), essa estratégia metodológica da pesquisa social apresenta os seguintes aspectos:

- a) há uma ampla e explícita interação entre pesquisadores e pessoas implicadas na situação investigada;
- b) desta interação, resultam a ordem de prioridade dos problemas que serão pesquisados e as soluções que serão encaminhadas, sob a forma de ação concreta;
- c) o objeto de investigação não é constituído pelas pessoas e, sim, pela situação e pelos problemas de diferente natureza encontrados na situação;
- d) o objetivo da pesquisa-ação consiste na resolução ou, pelo menos, na explicitação dos problemas da situação observada;
- e) durante o processo, há um acompanhamento das decisões, das ações e de toda a atividade intencional dos atores da situação;
- f) a pesquisa não se limita a uma forma de ação: pretende aumentar o conhecimento dos pesquisadores e o conhecimento ou o “nível de consciência” das pessoas e grupos considerados.

Esta metodologia aplica-se a nosso objetivo de realizar uma investigação colaborativa que, de acordo com Reason (1988 apud Boavida e Ponte, 2002),

é uma pesquisa que atravessa “uma série de passos lógicos” incluindo a identificação de questões, o estabelecimento e a implementação de um plano de ação e reflexão sobre a experiência entrelaçados com processos emocionais. Para o autor, é importante:

que o projecto que o iniciador quer desenvolver faça sentido para um grupo potencial de membros; e ter cuidado para quaisquer diferenças de poder ou estatuto derivadas de posições organizacionais ou sociais não tornem impossível negociar um contrato aberto. (Ibid, p. 21 apud p. 9)

Conforme Thiollent (2003), a especificidade da pesquisa-ação consiste em relacionar dois tipos de objetivos:

- O prático: contribuir para o melhor equacionamento do problema central da pesquisa.
- O de conhecimento: obter informações que seriam de difícil acesso por outros procedimentos.

Para o primeiro caso, temos como objetivo colaborar com os professores nas reflexões necessárias na elaboração da sequência de ensino pretendida, no sentido de ajudar a solucionar os problemas que podem se apresentar durante a ação formativa. No segundo caso, do lado da pesquisa, pretendemos contribuir para uma melhor compreensão dos conhecimentos de números fracionários mobilizados pelos professores, assim como suas relações com o ensino do assunto e com os alunos.

No desenvolver do trabalho, nosso interesse foi que os professores produzissem novos conhecimentos e adquirissem alguma experiência para discutir, levantar questões e propor soluções para problemas, não só a respeito do objeto de estudo, mas também sobre outros assuntos que apresentavam durante a formação.

Como a presente pesquisa está inserida em um projeto maior, que adota essa metodologia, utilizamos os mesmos instrumentos para coletar informações: questionários, observações, mapas conceituais e documentos escritos pelos professores. No que segue, apresentamos a justificativa sobre a escolha desses instrumentos.

### 3.2 Questionário

Um questionário inicial foi aplicado, em 11 de abril de 2003, com o intuito de caracterizar os professores participantes do projeto. A primeira parte identificava o professor segundo: gênero, idade, estado civil, tempo de atuação profissional, grau de ensino que leciona, quantidade de aulas semanais, quantidade de

escolas onde leciona, formação acadêmica e participação em algum processo de formação nos últimos três anos.

Na segunda parte, questionamos a respeito do acesso à informação que possuía. Na terceira parte, focalizamos a utilização de publicações que o auxiliavam em suas estratégias em sala de aula: Parâmetros Curriculares Nacionais, *Experiências Matemáticas* e Livros Didáticos. Na quarta parte, buscamos suas opiniões sobre a importância de alguns temas específicos da Matemática, como situações que os colocavam frente a supostas respostas de alunos, para tarefas que envolviam números fracionários.

### 3.3 Observações

A formação foi realizada e coordenada pela própria pesquisadora de agosto de 2003 a abril de 2004. Os encontros foram observados por pelo menos três participantes do projeto durante 29 semanas, em encontros de três horas cada um. Estes observadores eram alunos de mestrado ou doutorado em Educação Matemática da PUC/SP que participam do Projeto de Pesquisa. Além das anotações realizadas pelos observadores, fizemos gravação em áudio das discussões de cada grupo em atividade.

O grupo de professores foi observado de forma a obter uma descrição dos comportamentos, durante a realização das atividades propostas, sendo permitida a eventual intervenção do observador, tanto para ajudá-los quando necessário como para solicitar algum esclarecimento sobre suas ações. Este tipo de observação é chamado de entrevista-ação porque: *“insere-se dentro da ação que se desenvolve e constitui um processo de recolha de dados que se situa entre a entrevista e a ação”* (ESTRELA, 1994, p. 35).

Para o autor, existem quatro características para esse tipo de observação: o papel do observador não se altera perante o observado; podem-se realizar análises sobre a origem e a finalidade das ações do observado, porque suas opiniões podem ser confrontadas durante a ação; as inferências do observador podem ser defrontadas com as opiniões do observado e as informações são ricas em detalhes, embora sejam restritas aos aspectos e situações específicas. O princípio da análise do comportamento em situação deve se sobrepor ao da análise em si mesma que faz com que a observação desempenhe uma função central na elaboração do dispositivo experimental.

Os mesmos procedimentos de observação foram empregados durante a aplicação da sequência, elaborada durante a formação em uma sala de quinta série, no mês de abril de 2004, sendo observada e discutida por todos os elementos do grupo no final de cada aula.

### 3.4 Documentos escritos pelos professores

Durante a formação, coletamos todas as produções do grupo de professores e, no final, solicitamos que escrevessem individualmente, fora do ambiente de formação, a respeito de sua experiência durante todo o processo de elaboração e aplicação da sequência, a fim de obter opiniões livres de interferências e poder confrontá-las com as observações realizadas.

Nesse sentido, uma das vantagens dos documentos é, segundo Ludke e André (1986), permitir a obtenção de dados, quando a interação com os sujeitos puder alterar seu comportamento ou seus pontos de vista, podendo complementar as informações obtidas pela observação. Consideramos documentos “*qualsquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano*” de acordo com Phillips (1974, p. 187, apud Ludke e André, 1986, p. 38).

### 3.5 Mapas conceituais

Os mapas conceituais são esquemas gráficos que, segundo Faria (1995), têm como objetivo representar a estrutura básica de partes do conhecimento sistematizado, na forma de uma rede de conceitos e proposições relevantes desse conhecimento. Os mapas permitem analisar e reorganizar a estrutura inerente a um determinado conhecimento sistematizado para descobrir, entre outras, concepções equivocadas a respeito de um conceito.

Os professores elaboraram mapas conceituais, para evidenciar interrelações entre seus conhecimentos, suas concepções, suas emoções e seus sentimentos em relação ao ensino e aprendizagem de números fracionários e também para:

que os professores pudessem estruturar palavras que viessem à mente relacionadas à palavra chave dada *a priori*. Como os mapas conceituais são esquemas que as pessoas estruturam a partir de um conjunto de conceitos, não teremos obrigatoriamente duas pessoas elaborando um mesmo mapa quando se deparam com o mesmo conjunto de palavras. Apesar de a técnica dos mapas conceituais ser usada para estruturar conceitos, explicitando relações e proposições entre esses conceitos, nós a utilizamos como uma atividade “criativa”. (MANRIQUE, 2003, p. 40)

Durante a realização dos mapas conceituais, os próprios professores listaram as palavras individualmente e em grupos elaboraram os mapas que foram apresentados aos demais grupos. Após a apresentação, um espaço era aberto para

que todos pudessem comentar a respeito dos mapas e suas possíveis semelhanças e diferenças.

Esses mapas foram realizados em dois momentos: no início da formação, em 8 de agosto de 2003, e no encerramento dos trabalhos do semestre, em 12 de dezembro de 2003. Em ambos, a palavra-chave foi fração. Para finalizar, apresentamos no Quadro 1 a síntese dos métodos de coleta de informações adotados em nossa pesquisa.

**Quadro 1** – Síntese dos instrumentos de coleta de informações.

<b>Questionário</b>	<b>Inicial</b>
Observações realizadas nos encontros	29 encontros de 3 horas cada um totalizando 87 horas, de 01/08/2003 a 16/04/2004.
Mapas conceituais	I) no início da formação em 08/08/2003 II) no final da formação em 12/12/2003
Observações realizadas em sala de aula	Aplicação pelos professores da sequência de ensino elaborada.
Documentos escritos pelos professores	Relatório final

No que se segue, apresentaremos os estudos realizados como base teórica para a formação dos professores com relação ao objeto matemático: números fracionários.

## Segunda parte

# Estudos preliminares para a formação

Nesta parte de nossa pesquisa, mostramos três estudos sobre números fracionários que servirão de base teórica para a formação dos professores. O primeiro, diz respeito à terminologia utilizada para identificar o objeto matemático em estudo e seus significados que se justifica pela confusão conceitual provocada pelos termos: fração, número fracionário e número racional.

O segundo consiste de um estudo epistemológico que busca as concepções de números fracionários mobilizadas na gênese desses números, que se justifica pela necessidade de identificar a razão de ser desses números e o caminho percorrido por sua construção conceitual.

Finalmente, o terceiro versa sobre uma Organização Matemática, que se apóia no estudo epistemológico, nas diversas concepções de números fracionários e em resultados de pesquisas anteriores, justificado pelo nosso interesse em permitir o acesso de tais resultados a professores em atuação e a necessidade de um referencial teórico a respeito do objeto em estudo para a formação pretendida.

## 1 Uma questão de terminologia e significados

Afinal, frações, números racionais ou números fracionários?

A questão nos persegue desde o início de nossos estudos, quando percebemos, em contatos com professores, que muitos não aceitam como número fracionário, um número irracional escrito na forma  $a/b$ , ( $b \neq 0$ ), como  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , pois um irracional não pode ser escrito na forma de fração, mas aceitam  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  como fracionário, pois temos de racionalizar o denominador.

Às vezes, levam um tempo para perceber que se trata do mesmo número. Por outro lado, aceitam as “frações algébricas”, em  $\mathfrak{R}$ , como representação fracionária, mas emudecem, quando se substitui o  $x$  por um número irracional qualquer.

Provavelmente, o fato justifique-se pela identificação do conjunto dos racionais, como sendo o “conjunto das frações”, embora durante o Ensino Fundamental e Médio trabalhem com números fracionários do tipo  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $\frac{x+1}{x}$  ou  $\frac{2+3i}{5}$ , aplicando inclusive as mesmas regras operatórias.

Assim, procuramos em textos de matemática ou de seu ensino, algum consenso para essa terminologia que apresentaremos, a seguir, com os termos empregados pelos autores.

Nicolas Rouche em seu livro *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* Mostra poeticamente em sua introdução, o quão complexo é o entendimento do que é *fração*:

Uma fração é uma coisa bem pequena: uma barra horizontal, um número em cima e um número embaixo. Mas que representa esta coisa? Um pedaço de torta? Uma razão? Uma nova espécie de números? A resposta está longe de ser clara para todo mundo. (ROUCHE, 1998, p. 1, tradução nossa)

O autor fala da dificuldade de esclarecer o que queremos e apresenta o termo fração associado à representação simbólica: “*um número em cima e um número embaixo*” e a contextos em que pode ser identificada como novo número.

Bell (1996) discorrendo a respeito da ampliação do sistema de números naturais associa o termo frações a uma nova classe de números, embora coloque a palavra número entre aspas:

As primeiras ampliações do sistema de números naturais foram às frações babilônicas e egípcias. Estas ilustram um prolífico método de engendrar os novos números a partir dos já aceitos, e com seu mesmo conceito, a inversão. Para resolver o problema “por qual número há que se multiplicar 6 para que produza 2?” Há que se inventar uma nova classe de “número”, a fração  $1/3$ . (Ibid, p. 182, tradução nossa)

Por outro lado, Paul Karlson trata as frações do ponto de vista de notação e seu caráter operatório, quando afirma que:

O cálculo com frações simples desenvolveu-se antes mesmo da regulamentação definitiva da divisão, que realmente era – cumpre dizê-lo – trabalho fácil enquanto faltava uma notação numérica adequada. Todas as velhas civilizações, desde os egípcios e babilônios até hindus e chineses, conheciam sem exceção as frações, sabendo mesmo manejá-las, com relativa destreza. (KARLSON, 1961, p. 51)

No entanto, o autor associa o termo frações aos números não racionais quando apresenta a expressão  $\frac{1}{2\pi}$  e a fórmula:  $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} B \cdot b$  para o volume da pirâmide, considerando  $B$  a medida da área da base triangular e  $b$  a medida da altura dessa pirâmide. Logo a seguir escreve: “o volume de uma pirâmide é, portanto, igual ao produto da base pela altura, dividido por 3” (p. 149). Vemos que no discurso substitui o número fracionário  $1/3$ , utilizado na fórmula, por “divisão por 3”.

O mesmo acontece, quando trata de trigonometria, apresenta a relação  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  e escreve: “basta que invertamos a fração e extraíamos a raiz. Resulta então:  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ” (Karlson, 1961, p. 248). Claramente, podemos perceber que embora o autor tenha, a princípio, associado o termo fração aos números racionais, apresenta também escritas fracionárias para números irracionais.

Ao discutir a respeito de expressões numéricas referentes a medições, Caraça apresenta o número fracionário  $\frac{11}{3}$  como razão de dois números, que sempre será tratada como quociente desses dois números, na seguinte definição:

Sejam os dois segmentos de recta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento  $u$  –  $\overline{AB}$  contém  $m$  vezes e  $\overline{CD}$  contém  $n$  vezes o segmento  $u$ . Diz-se, por definição, que a medida do segmento  $\overline{AB}$ , tomando  $\overline{CD}$  como unidade, é o número  $\frac{m}{n}$ , e escreve-se  $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$  quaisquer que sejam os números inteiros  $m$  e  $n$  ( $n$  não nulo) [...] o número  $\frac{m}{n}$  diz-se *fraccionário*. (Ibid, p. 35)

A seguir, apresenta o que chama de campo racional:

Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais ou campo racional – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários, estes são de facto, os números novos. (Ibid, p. 36)

Para Caraça, os inteiros são racionais, mas não são números fracionários, embora presente no estudo dos números racionais os inteiros escritos na forma  $a/b$ , tal fato fica claro quando apresenta a seguinte classificação para os números reais:

$$\text{Números reais} \left\{ \begin{array}{l} \text{racionais} \left\{ \begin{array}{l} \text{inteiros} \\ \text{fraccionários} \end{array} \right. \\ \text{irracionais} \end{array} \right.$$

(CARAÇA, 1984, p. 83)

Entretanto, quando define seno de um ângulo, transfere a possibilidade da escrita fracionária e do quociente para os irracionais.

Chama-se seno do ângulo  $\alpha$ , e representa-se por  $\text{sen}\alpha$ , ao cociente do segmento  $\overline{PM}$  (orientado, sempre com origem em P, qualquer que seja a posição de M) pelo raio  $r$ :  $\text{sen}\alpha = \frac{\overline{PM}}{r}$ . (Ibid, p. 145)

Já, Davis e Hersch (1985, p. 458) chamam os racionais de fração, quando definem o número racional como: "qualquer número que seja a razão de dois inteiros:  $1/1$ ,  $-6/7$ ,  $21/102$ ,  $4627/1039$ . Uma fração".

Chevallard, Bosch e Gascón (2001) apresentam a seguinte questão: "Racionalizar o denominador das seguintes frações:" explicitando que se trata de tornar racional o denominador de uma fração, apresentando como primeiro exemplo  $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ .

Alphonse, ao tratar de problemas didáticos ligados às escritas dos números, tenta a princípio diferenciar frações de números, associando a fração a um operador de fracionamento.

A priori as frações não são números. Mas, no contexto, são operações de medidas, associadas de maneira natural às grandezas fracionadas. Uma fração evoca, então, um operador de fracionamento. Esta origem subsiste igualmente no enunciado:  $\frac{3}{4}$  não se lê "três sobre quatro", mas, "três quartos". Para Euclides também as razões de grandezas não são números. Aliás, uma escrita antigamente corrente,  $a:b :: c:d$  que significa  $a$  está para  $b$  assim como  $c$  está para  $d$ , leva a não considerar as razões de grandezas como números. (ALPHONSE, 1995, p. 36, tradução nossa)

Apresenta também a possibilidade da fusão de fração e razão: Mas temos igualmente uma aparição de frações em um contexto aritmético como: a fração é um elemento do resultado de uma divisão que não termina. Quando as "frações" adquirem o estatuto de número, com a escrita  $\frac{a}{b}$ , algumas propriedades serão introduzidas. Obtém-se igualmente uma articulação entre a notação e a concepção de um lado e de outro, as operações, em consequência um tipo de fusão entre fração e razão que se opera. Por outro lado, a noção de número racional feita historicamente muito tardia toma, também, a designação canônica  $\frac{a}{b}$  (ALPHONSE, 1995, p. 37, tradução nossa).

Nunes e Bryant, quando tratam das dificuldades do ensino de frações, diferenciam os termos número racional e frações, dizendo que:

Esses estudos servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em

frações e números racionais. (Usaremos a expressão “números racionais” de uma forma mais geral e frações apenas quando nos referirmos a problemas parte-todo). (NUNES e BRYANT, 1997, p. 193)

Tratando da sofisticação da ideia de números fracionários, D’Augustine afirma que:

A ideia de números fracionários é um conceito sofisticado, que requer da criança mais maturidade e maior base matemática do que o conceito de número natural. Enquanto um número natural é a propriedade de um determinado conjunto, um número fracionário pode ser associado a:

1. A partilha de um conjunto determinado.
2. A razão das propriedades numéricas de dois conjuntos.
3. Um número associado à partilha de um conjunto contínuo.
4. Um número que representa o cociente de dois números naturais (sendo o divisor diferente de zero). (D’AUGUSTINE, 1976, p. 144)

Observamos que o autor associa os números fracionários à distribuição de grandezas discretas e contínuas, embora esta última possa levar a representação fracionária de números reais. No entanto, diferencia número fracionário de fração na seguinte definição:

Define-se número fracionário como o cociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja diferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são números naturais e  $b \neq 0$ . Uma fração pode ser definida como o símbolo ou o nome para o número fracionário e pode ter a forma  $\frac{a}{b}$ , em que  $a$  e  $b$  designam números naturais. É importante saber que uma fração designa um número fracionário, bem como é também importante saber quando duas frações designam o mesmo número fracionário. (D’AUGUSTINE, 1976, p. 146)

Entendemos que, para o autor, o número fracionário ou racional pode ser representado por uma classe de frações, isto é, as frações são representações de um número racional. Já, quando trata de razão, o autor a apresenta relacionada a problemas da realidade:

Há muitas ocasiões que, em nossa sociedade, estamos interessados em estabelecer a correspondência vários-a-vários. Por exemplo, se se vendem balas à razão de três por dez centavos... Quando usamos um par de

números em correspondência vários-a-vários numa situação social referimo-nos a este par de números como um par de razões. Definimos dois pares de razão  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  como sendo equivalentes somente se  $a \times d = b \times c$ . (D'AUGUSTINE, 1976, p. 238)

Associa, também, o número fracionário à porcentagem, dando a esta seu caráter notacional e de aplicação comercial.

A notação de porcentagem é muito usada em nossa sociedade. Como ela é muito útil para reduzir os dados estatísticos a uma forma mais fácil de ser entendida e para comunicar as relações da aplicação comercial do número, será importante desenvolver não apenas o significado matemático de porcentagem (porcentagem é uma outra notação usada para representar números fracionários), mas também a sua função de comparação. (D'AUGUSTINE, 1976, p. 240)

Entendemos que, para Alphonse, o número fracionário é representado por uma classe de frações e que razão não é número, mas, uma relação entre dois números inteiros, embora possa ser representada na forma de fração.

Niven afirma que nem o conjunto dos naturais nem o dos inteiros são “fechados em relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{7}{6}$ ,  $-\frac{2}{5}$ , etc.” e acrescenta que “o conjunto de todas as frações como estas é o conjunto dos racionais”. A seguir, define: “um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma  $\frac{a}{d}$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d$  não é zero” (NIVEM, 1984, p. 30).

Mais à frente, o autor observa que “enquanto os termos número racional e fração ordinária são, às vezes, usados como sinônimos, a palavra fração, sozinha é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador como por exemplo:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{17}{x}$  ou  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$ ” (p. 31).

Esclarece ainda que a inclusão das palavras “pode ser colocado na forma  $\frac{a}{d}$ ” na definição de número racional, é para que sejam incluídos, nessa definição, os infinitos modos de descrever um dado número racional (por exemplo,  $\frac{2}{3}$  pode ser escrito como  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{6}{9}$ , ... ou  $\frac{2\pi}{3\pi}$  ou  $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$  ou  $\frac{-10}{-15}$ , mencionando, apenas alguns). Acrescenta que:

Uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número, assim só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa ou não um número racional. Considere, por exemplo, os números  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ , nenhum dos quais está na forma  $\frac{a}{d}$  com

$a$  e  $d$  inteiros. Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas com a primeira expressão e obter  $2e$ , e, portanto,  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$  é racional, o que não acontece com  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$  que representa  $\sqrt{5}$ . (NIVEM, 1984, p. 32)

Conforme as concepções de números fracionários, Ciscar e Garcia (1998), afirmam na introdução de seu livro que:

A ideia de fração apoiada em situações em que está implícita a relação parte-todo. Esta relação é uma das possíveis interpretações da fração. Mas por outro lado, também podemos representar, mediante uma fração, situações em que está implícita uma relação parte-parte (ou todo-todo), que nos levam a interpretação da fração, como razão. Ainda existem outras interpretações das frações: operador, quociente de dois números, etc. O constructo teórico que sintetiza todas elas, constitui o número racional. Há, portanto, um grande caminho a percorrer entre as primeiras ideias intuitivas de “metades” e “terços” até a consideração das frações como elementos integrantes de uma estrutura algébrica. (Ibid, p. 1, tradução nossa)

Buscando a fração, como elemento integrante de uma estrutura algébrica, encontra-se em Hernstein (1970) a seguinte definição:

O corpo de frações de um anel de integridade: Recordemos que um anel de integridade é um anel comutativo  $D$  com a propriedade adicional de não possuir divisores do zero, isto é, se  $ab = 0$  para certos  $a, b \in \mathfrak{R}$ , então pelo menos  $a$  ou  $b$  é necessariamente zero. O anel dos inteiros é, evidentemente, um exemplo padrão de um anel de integridade. O anel dos inteiros possui a característica atraente de que podemos estendê-lo para o conjunto dos racionais, que é um corpo. Podemos efetuar uma construção semelhante para qualquer anel de integridade? (Ibid, p. 122-123)

A resposta a essa questão vem quando apresenta e demonstra o seguinte teorema: “*todo anel de integridade pode ser imerso num corpo*”.

Demonstração. Antes de proceder formalmente com os detalhes da demonstração, tomemos um ponto de vista informal do problema. Seja  $D$  nosso anel de integridade; em termos não rigorosos, o corpo que procuramos deve ser constituído de todas as frações  $\frac{a}{b}$  onde  $a, b \in D$  e  $b \neq 0$ . Evidentemente, em  $D$ ,  $\frac{a}{b}$  pode muito bem não ter sentido. O que devemos exigir destes símbolos  $\frac{a}{b}$ ? Evidentemente, precisamos ter uma resposta às três perguntas seguintes: (1) Quando é  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ? (2) O que é  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?

(3) O que é  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ ? Para responder (1), nada mais natural do que afirmar que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se, e somente se,  $ad = bc$ ? Quanto a (2) e (3), por que não tentar o óbvio, isto é, definir  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  e  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ?

De fato, no que se segue faremos destas considerações nosso guia. Portanto, deixemos de heurística e entremos no domínio da matemática, com definições precisas e deduções rigorosas. (HERNSTEIN, 1970, p. 124)

O autor conclui que sendo F um corpo de frações e D um anel de integridade: “F é usualmente denominado o corpo de frações de D. No caso particular em que D é o anel dos inteiros, o F assim construído é, evidentemente, o corpo dos números racionais” (Ibid, p. 125).

Mas, se todo corpo é um anel de integridade e sabemos que Q,  $\mathfrak{R}$  e C são corpos, podemos, então, construir o corpo de frações desses anéis e falar de frações para números racionais, reais e complexos. Acrescentando os anéis de polinômios, podemos construir o corpo de frações dos polinômios que nos levam às frações algébricas que são tratadas com esse nome no Ensino Fundamental.

As questões da introdução das frações nas séries iniciais são delicadas e obrigam a buscar situações apropriadas para fazê-lo, sem excluir a questão da nomenclatura utilizada. Esta, por sua vez, está impregnada da crença milenar de que fração não é número e da enfática afirmação de que o conjunto dos racionais é o conjunto das frações ou dos números fracionários que provocam distorções na formação que leva muitos professores a situações de conflito, quando se fala de números fracionários ou de frações que não sejam racionais, o que, certamente, refletir-se-á no ensino.

Assim, no intuito de distinguir o objeto de suas diferentes representações e, de adotar um termo que não deixe dúvidas e que seja, suficientemente, abrangente, utilizaremos o termo número fracionário para indicar aquele que pode ser representado por uma classe de frações,  $\frac{a}{b}$  com  $b \neq 0$  e a, b pertencentes a um anel de integridade. Como, neste trabalho, estamos interessados no Ensino Fundamental, a e b podem ser números reais ou polinômios. Por exemplo, o número fracionário  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  poderá ser representado por uma classe de frações:  $\frac{2\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}, \dots$  e no caso dos polinômios, consideraremos a fração algébrica como um polinômio escrito na forma de fração e, por exemplo, a fração algébrica  $\frac{x+3}{5}$ , pode ser representada, também, por uma classe de frações algébricas:  $\frac{2x+6}{10}, \frac{3x+9}{15}, \dots$  que, por sua vez, poderá ser associada a uma classe de números fracionários, dependendo do valor que x pode assumir.

Daqui em diante, trataremos por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações.

Mas, além da questão da terminologia, que acabamos de apresentar, abordaremos ainda a origem da palavra fração e de seus significados culturais e em outras áreas de conhecimento, pois, algumas dessas ideias podem estar presentes no cotidiano das pessoas.

A palavra árabe que designa fração, *al-kasr*, é derivada do radical do verbo que significa “quebrar” que, com o passar do tempo, levou os termos fração e “número quebrado” a serem utilizados como sinônimos. Isso se deve, provavelmente, ao fato de a maioria das aritméticas americanas antigas utilizavam o termo “número quebrado” para distinguir as frações ordinárias das frações decimais.

As formas latinas *fractio* e *minutum ruptus* eram traduzidas, por antigos autores da língua inglesa, como “broken numbers” (números quebrados). Buscando a etimologia da palavra fração, Cunha (1997), cita que sua origem está na palavra *fraccion* que significa o ato de partir, quebrar, dividir ou à parte de um todo que faz associar à palavra fração uma ação de partição.

Segundo Ferreira, o termo fração é usado atualmente para designar, entre outros:

Fração [Do lat. *Fractione*.] S. f. 1. Ato de partir, rasgar ou dividir. 2. Parte de um todo: “Com o movimento do ônibus, há um instante, uma fração de segundo em que o vitral chameja” (Osmã Lins, *Nove, Novena*, p. 198). 3. Facção (4). 4. *Arit.* Número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais; número fracionário. 5. *Quím.* Qualquer mistura parcial que se obtém num processo de separação dos componentes de um sistema.

Fração contínua. *Mat.* Sequência que se obtém mediante frações nas quais o denominador se forma pela adição, em cada uma, de uma fração própria ao denominador da antecedente. Fração decimal. *Mat.* Fração própria cujo denominador é uma potência de dez. [Tb. se diz apenas decimal.] Fração de empacotamento. *Fís. Nucl.* Quociente da diferença entre a massa atômica e o número de massa de um elemento pelo número da massa deste. Fração do pão. *Rel.* 1. A missa. 2. A comunhão. Fração Molar. *Fís.-Quím.* Medida da concentração de um componente numa mistura, igual ao quociente do número de moles do componente pelo número total de moles da mistura. (FERREIRA, 1986, p. 806)

Podemos notar que o termo fração significa, tanto uma ação de partição como é sinônimo de número fracionário; ao mesmo tempo, em que significa uma medida na Química ou um quociente na Física, ou ainda, uma sequência na Matemática. Por outro lado, embora alguns afirmem que a ideia de fração não faz

parte do dia-a-dia das pessoas, podemos encontrar, em rápida incursão na internet, o termo associado a muitos temas da atualidade como, por exemplo:

- fração do bilhete de loteria.
- fração amostral utilizada no censo.
- fração ideal do solo e das partes comuns de um edifício
- fração lipídica (óleo bruto) de grãos de soja.
- reciclagem da fração mineral dos resíduos de construção e demolição.
- fração de espalhamento na região de mamografia.
- fração de bonificação em aplicações
- remédios fracionados estarão disponíveis nas farmácias.

O fato nos leva a supor que o ensino de frações deve tentar construir seus inúmeros significados diferenciando, o objeto número fracionário, de sua representação: classe de frações equivalentes.

Assim, é necessário perceber nessa construção que é diferente do inteiro, em que fica clara a distinção entre um número e suas representações, pois, quando nos referimos ao número cinco, por exemplo, sabemos que representações como: “cinco” ou “5” ou “V” ou “lllll” evocam o referido número, mas não o próprio número, pois este não passa de uma ideia. Quando operamos com os inteiros, realizamos o cálculo com base na manipulação da representação escolhida:  $2 + 3 = 5$  ou  $II + III = V$ , por exemplo, o que não acontece com os fracionários. Nesse caso, manipulam-se representações do mesmo tipo para indicar um mesmo número, por exemplo,  $\frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \frac{9}{18} \dots$  todas são frações que representam o número fracionário  $\frac{1}{2}$ .

Feita a escolha, em termos de terminologia, e uma breve introdução a respeito da origem do termo fração e alguns de seus significados; em continuidade, apresentaremos um breve estudo da gênese dos números fracionários no sentido de buscar as situações que estão na razão de ser desses números.

## 2 Breve estudo da gênese de número fracionário

Nesta parte da pesquisa, faremos um breve estudo da gênese dos números fracionários, no sentido de identificar a emergência das concepções relacionadas com tal saber.

Este estudo apóia-se em Artigue (1990) para quem a análise epistemológica, ancorada no desenvolvimento histórico do conceito, conduz o pesquisador em Educação Matemática a diferenciar uma variedade de concepções, sobre um dado objeto, e a reagrupá-los em classes pertinentes para a análise didática.

Conforme a autora citada (p. 245), esta análise ajuda o pesquisador “a se desprender da ilusão de transparência dos objetos que manipula em nível do saber e o ajuda a se libertar de representações epistemológicas errôneas que tendem a induzir sua prática de ensino” (tradução nossa). Além disso, acredita que “os

*problemas que motivaram a introdução, de um ou outro conceito e aqueles que governaram sua evolução, são constitutivos da significação deste conceito e o pesquisador em didática confronta-se necessariamente com o problema da significação dos conceitos”* (Ibid, p. 246, tradução nossa).

Dessa forma, decidimos identificar os tipos de tarefa que pedem a mobilização das concepções de números fracionários em textos da História da Matemática.

Para realizar este estudo, apoiamos-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), porque situa a atividade matemática e, em consequência, a atividade de estudo da matemática, no conjunto de atividades humanas de instituições sociais. Conforme Chevallard (1999, p. 223), nessa teoria *“uma obra matemática, como toda obra humana, surge sempre como resposta a um conjunto de questões e como meio de realizar determinadas tarefas problemáticas em determinada instituição”*.

Segundo a TAD, o saber matemático, como forma particular de conhecimento, é resultado da ação humana em instituições que produzem, utilizam ou ensinam tal saber, embora este possa migrar de uma instituição para outra. A noção de praxeologia vem como um método que permite a análise de práticas sociais tanto por sua descrição como pelo estudo das condições em que tais práticas se realizam.

Consideramos, então, como instituição, as publicações a que se teve acesso desde a Antiguidade como, voltadas ao ensino de Matemática, apoiando-nos para esta consideração em Schubring (2003), quando afirma que há evidência da existência do ensino institucionalizado de matemática na Mesopotâmia, a partir da necessidade da função de escriba e de centros para sua formação. O autor cita os papiros de Rhind e de Moscou, como os mais antigos textos conhecidos destinados ao ensino, e os *“Dez Manuais Matemáticos”* ou *“Dez Clássicos”*, como sendo a primeira lista oficial de livros textos autorizados na China em 656.

Provavelmente o mais antigo e conhecido dos *“Dez Clássicos”* seja os *“Nove capítulos sobre a arte de calcular”*. A tradição da matemática chinesa está fundamentada nesse manual que apresenta 246 problemas com a apresentação feita em três níveis: propor o problema, dar sua solução numérica, fornecer a regra pronta para calcular a solução com base nos dados. (Ibid, p. 28)

De acordo com Bosch e Chevallard (1999), a TAD parte do princípio de que podemos analisar uma prática institucional, de diferentes pontos de vista e formas, a partir de um sistema de tarefas que, para serem realizadas exigem que se coloque em ação uma técnica.

Um certo tipo de tarefas determinará uma maneira de cumprir ou realizar as tarefas desse tipo, o que significa que tal organização deve conter, pelo menos, uma técnica que identifica um certo saber-fazer.

A produção de técnicas para realizar determinadas tarefas implica a produção de praxeologias, matemáticas ou didáticas, que se compõem de dois aspectos: o prático constituído pelas tarefas ou questões que se colocam, e as técnicas que se usam para resolver essas tarefas (bloco técnico-prático). O discurso racional sobre essa prática apresenta dois níveis, um tecnológico, que justifica as técnicas e outro teórico, que justifica o nível tecnológico (bloco tecnológico-teórico).

Chevallard (1999) define uma praxeologia ou organização pontual (OMP), em uma instituição, quando a organização trata de um único tipo de tarefas, que poderá se combinar em organizações locais (OML), quando centradas sobre uma determinada tecnologia e depois, em organizações regionais (OMR) ao redor de uma teoria. Para o autor, toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente.

Mediante o exposto, pretendemos identificar os tipos de tarefas que estão na gênese dos números fracionários, que têm suas técnicas justificadas pelas concepções de números fracionários, detendo-nos sobretudo no bloco técnico-prático, geralmente, sem explicitar o bloco tecnológico-teórico, porque segundo Chevallard (1999) na aritmética elementar o discurso tem dupla função: porque permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado solicitado (função técnica) e justificá-lo como correto (função tecnologia).

Assim, pretendemos neste estudo identificar nas publicações que tivemos acesso, os tipos de tarefas que, provavelmente, deram origem ou utilizaram números fracionários agrupados de acordo com as concepções que lhes podem ser associadas, ou relações entre elas.

Essas concepções baseiam-se na classificação de Behr e outros (1983), quando considera que o conceito de número racional se constrói com base nas interpretações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador que serão estudadas em detalhes na Organização Matemática que escolhemos para a formação dos professores.

Analisaremos cada tópico desta parte do trabalho apresentando alguns exemplos, preferencialmente aqueles que apresentem a técnica explícita utilizada, embora muitos do mesmo tipo possam ser encontrados em épocas diferentes da história.

## 2.1 As situações de medições e seus registros escritos

Desde a Antiguidade, encontramos na gênese da numeração fracionária algumas práticas sociais, como as medições realizadas pela determinação de unidades que permitissem quantificar a grandeza a ser medida e a comparação dessa unidade com o objeto a ser medido. O número fracionário surge, então, da necessidade de dividir a unidade escolhida, para que a medição se concretize.

Os egípcios antigos empregavam os nomes de partes do corpo para nomear suas unidades de medida de comprimento, sendo a principal o *cúbito* (52,3 cm) que era dividido em sete *palmas* que, por sua vez, era dividido em quatro *dedos*. Utilizavam, também, a unidade *khet* para representar 100 cúbitos e, neste caso, 1 cúbito corresponderia a 1/100 do *khet*.<sup>1</sup>

Na China antiga, identificamos, já no século II a.C. nos “*Nove capítulos sobre os procedimentos matemáticos*”, a presença de unidades utilizadas, geralmente, para medir tecidos, como o *pi* que equivale a 4 *zhang* que, por sua vez, equivale a 10 *chi*. Em alguns problemas, relacionados à medição de seda, encontra-se ainda a unidade *jin* que corresponde a 16 *liang* que, por sua vez, equivale a 24 *zhu*. Para medições de terras, utilizavam o *bu* para comprimentos e o *mu* para áreas que corresponde a 240 bu (quadrados) além do *ging* que equivale a 100 mu.

Nota-se que o estabelecimento de unidades para medições fez emergir a criação de tabelas de conversões, tanto para as unidades e suas subunidades como para unidades diferentes, necessárias principalmente nas relações comerciais.

No início da obra *Lilavati* de Bhaskara (nascido na Índia em 1114), uma tabela para conversão de algumas unidades de medidas de comprimento como a *angula* (dígito) que corresponde a oito *yavodaras*, uma *hasta* (cúbito) que são quatro vezes seis *angulas*, a *danda* (vara) que equivale a quatro *hastas* e a *krosa* que corresponde a duzentas *hastas*, entre outras.

Nessa mesma época, na Inglaterra, o rei Henrique I oficializava a *jarda* como padrão de medida de comprimento, porque era uma unidade amplamente utilizada por alfaiates para medir tecido que corresponde a distância da ponta do nariz ao polegar do rei com o braço esticado. Algumas subunidades da *jarda*, foram estabelecidas e tornaram-se obrigatórias para medições de comprimentos: 1 *milha terrestre* a 1760 jardas, 1 *jarda* equivale a 3 pés e 1 *pé* equivale a 12 *polegadas*, ainda utilizadas atualmente.

No ano de 1590, foi criada a *Aula da Esfera*, no Collégio da Companhia de Jesus de Santo Antão, em Portugal que, segundo Valente (2002) era direcionada à formação de pilotos do mar.

Com o passar do tempo esse curso deixando de ser um curso prático, passa a oferecer o ensino de Matemática. Em fragmentos de apostilas, manuscritas pelo Padre Gonzaga, professor da *Aula da Esfera* a partir de 1700, encontramos a *scala mensoria* que trata das unidades de medidas dos antigos romanos, gregos, hebreus, árabes e modernos.

---

1 Os problemas apresentados nesta parte do trabalho, que não apresentam referência específica, foram retirados do site <http://www.malhatlantica.pt.mathis/> acessada em 16/06/2004.

No Brasil, o *Exame de Artilheiros* de 1744 e o *Exame de Bombeiros* de 1748, considerados os primeiros livros didáticos brasileiros e ambos escritos por Alpoim, eram estruturados por meio de perguntas e respostas. Neles, alguns exemplos de números fracionários são apresentados baseados na conversão de unidades do antigo sistema de medidas como, por exemplo:

68. Querendo reduzir arrobas a arratéis, como cada arroba tem 32 arratéis, multiplicaremos o número das arrobas, por 32 arratéis e temos reduzido; como quero reduzir 6 arrobas a arratéis, multiplicando 6 por 32, produz 192 arratéis e tantos tem 6 arrobas.

69. Pode-se reduzir uma grandeza inteira a quebrado de um certo nome, por exemplo, temos a grandeza inteira 4, que queremos reduzir a quebrado, que tenha o nome 6; multiplicando 4 por 6, o produto 24 será o numerador e o denominador 6, como se pedia, desta sorte  $24/6$ . Esta grandeza reduzida a quebrado fica sempre com o mesmo valor,  $24/6$  é igual a 4 inteiros. (VALENTE, 2002, p. 52-53)

Podemos supor que necessidades sociais provocaram a exigência de medir grandezas contínuas que, por sua vez, fez emergir o objeto matemático: números fracionários com a concepção de medida.

Assim, as tarefas de medições eram resolvidas pela escolha de uma unidade de medida e sua divisão em subunidades, mas, para que essa técnica se tornasse rotineira foi necessário a criação de tabelas que relacionassem, tanto as subunidades de uma determinada unidade como unidades diferentes para uma mesma grandeza.

Tendo em vista a necessidade do fracionamento da unidade de medida, emergiu naturalmente a concepção *parte-todo*, pois a unidade que será utilizada deve ser dividida em partes de mesma medida para garantir a realização do ato de medir.

Por outro lado, visto que se colocam paralelamente, desde a Antiguidade, as necessidades de medir e registrar, por meio da escrita os resultados dessas medições, estudaremos, a seguir, o desenvolvimento dessas representações escritas, em algumas sociedades antigas.

### 2.1.1 Egito

Embora o sistema de numeração egípcio fosse de base 10, com símbolos distintos para as potências de 10, foi desenvolvido para registrar os novos números, um sistema de representações fracionárias unitárias e toda uma aritmética para calcular com tais números.

Desse modo, os números  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$  e  $2/3$  tinham símbolos especiais e aos outros colocavam, inicialmente, uma pequena elipse (que significava parte), acima do símbolo de um número natural utilizado como denominador. Com o tempo, a elipse transformou-se em um ponto e com os símbolos numéricos atuais, por exemplo,  $1/5$  seria representado por  $\overset{\cdot}{5}$ . Os registros encontrados nos papiros não justificam a escolha por tais representações.

Para os egípcios, não existia um símbolo para o número  $2/5$ , por exemplo, para representá-lo utilizavam a soma  $1/3 + 1/15$ , o que obrigava o desenvolvimento de uma técnica para o cálculo da soma de frações unitárias.

Provavelmente, para tornar essa tarefa rotineira, encontramos no papiro de Rhind (1600 a.C.) uma tabela que apresenta a decomposição em frações unitárias de números do tipo  $n/10$ , com  $n$  variando de 1 a 9, representada no Quadro 2.

**Quadro 2** – conversão egípcia de números do tipo  $n/10$  em soma de frações unitárias.

<b>n</b>	<b>n/10</b>	<b>n</b>	<b>n/10</b>
1	$1/10$	6	$1/2 + 1/10$
2	$1/5$	7	$2/3 + 1/30$
3	$1/5 + 1/10$	8	$2/3 + 1/10 + 1/30$
4	$1/5 + 1/5$	9	$2/3 + 1/5 + 1/30$
5	$1/2$		

Outra tabela encontrada no papiro de Rhind, representada em parte no Quadro 3, é para números do tipo  $2/n$ , com denominador ímpar entre 5 e 101.

**Quadro 3** – conversão egípcia de números do tipo  $2/n$  em frações unitárias.

<b>n</b>	<b>2/n</b>	<b>n</b>	<b>2/n</b>
5	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	17	$\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$
7	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	19	$\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$
9	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	21	$\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

(continua)

**Quadro 3** – conversão egípcia de números do tipo  $2/n$  em fracionários unitários. (continuação)

n	$2/n$	n	$2/n$
11	$\frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	23	$\frac{1}{12} + \frac{1}{276}$
13	$\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	25	$\frac{1}{15} + \frac{1}{75}$
15	$\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	27	$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}$

De acordo com Struick (1997), essa representação egípcia foi utilizada por séculos e pode ser encontrada ainda na *Métrica* de Heron (100 d.C. aproximadamente), em que uma aproximação para  $\sqrt{63}$  é representada por  $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ . Já para Eves (2004), no papiro de Ackmin (uma cidade junto ao rio Nilo) escrito entre 500 e 800 d. C., aparece um algoritmo para se obter a decomposição em fracionários unitários:  $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$ , em que  $r = \frac{p+q}{z}$  (p. 82). A preferência por representações fracionárias unitárias, segundo Struik (1997) persistiu até a Idade Média, quando Fibonacci a utilizou em seu *Liber Abaci* de 1202.

### 2.1.2 Babilônia

Partindo de um sistema de numeração posicional de base 60, em sua escrita cuneiforme, os babilônios criaram um sistema posicional ambíguo para representar os números fracionários, pois o símbolo  $\text{v} \frac{30}{60}$ , por exemplo, poderia representar  $1 \times 60 + 30$  ou  $1 + \frac{30}{60}$ . Tudo leva a crer que a utilização de números fracionários, pelos babilônios, deveria ser frequente, porque aparece diversas vezes no Código de Hamurabi (1694 a.C.) em algumas leis, como valores de multas:

29. Se seu filho for muito jovem e não puder tomar posse,  $1/3$  do campo e jardim deverá ser dado à sua mãe, que deverá educar o menino
276. Se alguém alugar um navio de frete, ele deverá pagar 2  $1/2$  gerahs por dia.
277. Se alguém alugar um navio de sessenta gur, ele deverá pagar  $1/6$  de shekel em dinheiro de aluguel por dia<sup>2</sup>.

2 Retirado do site: <http://www.geocities.com/CollegePark/Quad/8357/hamurabi.htm> acessado em 16/06/2004.

Estas representações, de alguma forma, revelaram-se mais apropriada para alguns estudos como, por exemplo, a astronomia. Em *O Almagesto*, do ano 150, Ptolomeu de Alexandria explicita sua preferência pela representação fracionária sexagesimal em detrimento da representação para fracionários utilizada pelos gregos.

### 2.1.3 China

Os chineses usavam nove dígitos diferentes para representar os números de um a nove e outros para representar os nove primeiros múltiplos de dez, em seu sistema de “numerais em barra”. Com base nesses 18 símbolos alternadamente, em posições contadas da direita para a esquerda, escreviam números tão “grandes” quanto desejassem.

Os “numerais de barra” de 300 a.C. não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo, mas verdadeiras barras de bambu, marfim ou ferro carregadas em uma sacola pelos administradores para auxiliarem nos cálculos. *“Na numeração de barras, a escrita do número 12 | || podia ser confundida com a de 3 ou de 21, a de 25 || ||||, com a de 7, 34, 43, 52, 214 ou 223, além da confusão pela ausência de um sinal especialmente concebido para o zero”* (IFRAH, 1997, p. 581).

Posteriormente, desenvolveram uma escrita decimal utilizada, em especial, para pesos e medidas, representada por números fracionários. Para Boyer:

Nenhuma descrição da numeração chinesa seria completa sem uma referência ao uso de frações. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Como em outros contextos, viam analogias com as diferenças entre os sexos, referindo-se ao numerador como “filho” e ao denominador como “mãe”. [...] também na china a adesão à ideia decimal em pesos e medidas teve como resultado um hábito decimal no tratamento de frações que pode ser encontrado já no século quatorze a.C. (BOYER, 1974, p. 145-146)

### 2.1.4 Grécia

Os gregos utilizavam os números fracionários em tratados teóricos e demonstrações que aparecem inseridas em textos matemáticos de cálculos e em documentos da prática como: declaração de propriedade, cálculos e registros de câmbio de moedas, taxas, realizações da arquitetura, etc.

Representavam os números por um sistema alfabético de base 10, para os números fracionários colocavam um pequeno traço vertical ao alto e à direita dos símbolos dos números inteiros que representava o denominador de fracionários unitários.

Os fracionários não unitários eram representados pelo numerador seguido do denominador acentuado. Posteriormente, os números fracionários passaram a ser escritos de maneira mais próxima à notação moderna – um numeral sobre o outro – com o denominador na parte superior e, geralmente, sem nenhum traço entre numerador e denominador, conforme Gundlach (1992).

Segundo Boyer (1974, p. 41) da mesma forma que os egípcios, os gregos sentiram-se tentados a usar *frações unitárias*, mas passam a utilizar a representação fracionária sexagesimal, sobretudo em tabelas astronômicas.

### 2.1.5 Índia

Há indícios do sistema posicional de base 10 na obra de Aryabhata (n. 476) quando diz: “*de lugar para lugar cada um vale dez vezes o precedente*”, embora não se saiba exatamente como efetuava seus cálculos (Boyer, 1974, p. 144). Mas, para Struik (1997), a referência mais antiga ao sistema de valor de posição dos hindus, fora da Índia, encontra-se em um trabalho de 662, escrito pelo bispo sírio Severus Sebokt.

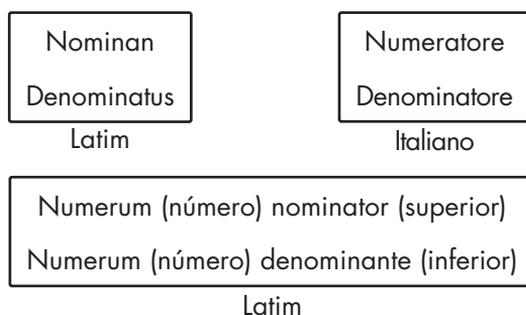
No século IX, Al-Khwarizmi (entre 780-830 a 850) introduziu, em seu Tratado de Aritmética, os nove símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero, explicando como escrever um número no sistema decimal de posição utilizando esses símbolos. Alguns séculos depois, Bhaskara (1114 – cerca de 1185) também trata do sistema de numeração indiano nos primeiros versos de seu livro Lilavati.

No entanto, conforme Ifrah (1989) cita, por causa de suas notações, os antigos, não foram capazes nem de unificar a noção de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

### 2.1.6 Europa

Na Europa, onde os algarismos romanos predominavam, foi lenta e gradativa a aceitação do sistema de escrita posicional de base 10, com os símbolos indianos. A primeira referência a tal sistema é creditada a Leonardo de Pisa (cerca de 1180 a 1250), conhecido como Fibonacci, em seu livro *Liber Abaci* de 1202, no qual apresentava tanto a escrita fracionária quanto a terminologia que utilizamos atualmente.

Quando, acima de um número qualquer aparecer uma barra (virgula), e, acima dessa, for escrito outro número qualquer – o número superior está para o inferior –, o inferior é chamado denominador, e o superior, numerador.



**Figura 2** – *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (1202)<sup>3</sup>.

Mesmo, considerado o mais produtivo matemático do século XIII, segundo Boyer (1974), Fibonacci preferia a representação fracionária unitária, pois em seu *Liber Abaci* que serviu de modelo a praticamente todas as aritméticas comerciais das épocas medieval e renascentista, apresentava tabelas de conversões *de frações comuns* para unitárias.

Um estranho capricho de sua notação levou-o a exprimir a soma de  $1/5$ ,  $3/4$  e  $1/10$   $2/9$  como  $\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}1$ , a notação  $\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}1$ , significando nesse caso:  $\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}$ . É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional – sua aplicabilidade a frações – escapasse quase completamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. [...] Fibonacci [...] usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais e unitárias – mas não frações decimais. Usou muito as comuns e as unitárias. (BOYER, 1974, p. 185)

Em 1579, Vietè utilizava uma barra vertical para separar a parte inteira da fracionária e recomendava a representação de fracionários decimais no lugar dos sexagesimais. Em 1585, Simon Stevin, para representar décimos, centésimos, milésimos, etc. colocava em um círculo, acima ou depois de cada dígito, a potência de dez assumida como divisor e recomendava o sistema posicional decimal, tanto aos números fracionários como aos inteiros.

Embora os europeus utilizassem os símbolos indianos para registrar o numerador e o denominador de números fracionários, o sistema posicional decimal

3 Em <http://www.prandiano.com.br> acessado em 10/06/2004.

não justifica a escrita do número fracionário, propriamente dito, pois este é um número escrito por dois números.

Conforme Struik (1997), ainda no século XVI o sistema decimal posicional não se estendia aos números fracionários, pois em tabelas astronômicas e trigonométricas os autores limitavam-se aos inteiros escrevendo 1,753 como 1753 em termos de mil como unidade.

O uso de uma vírgula decimal como separatriz é atribuído, tanto ao cartógrafo G. A. Magim (1555-1617) em seu *De planis triangulis* de 1592 quanto ao jesuíta Cristoph Clavius (1537-1612) que a utilizou em uma tabela de senos de 1593. O ponto decimal tornou-se realmente popular quando Napier o usou mais de vinte anos depois no desenvolvimento dos logaritmos, tornando-se padrão na Inglaterra a partir de 1619, de acordo com Boyer (1974).

Entendemos que a necessidade de administração do estado foi o que, provavelmente, propôs a tarefa de medir grandezas, bem como a de registrar os resultados dessas medições que, na maioria das vezes, se tratava de medir quantidades de terra, para que pudessem ser tributadas. A primeira foi resolvida a partir da determinação de unidades e subunidades de medidas. Mas, a segunda, da escrita dos fracionários resultantes das medições, nem sempre foi cumprida de maneira satisfatória, embora geralmente, se justifique pelo sistema de escrita dos números desenvolvidos em cada sociedade.

Em consequência, à medida que as tarefas de medições e os registros e cálculos de seus resultados tornaram-se rotineiros e mais necessários, tiveram que migrar para instituições de ensino, para que outros pudessem aprender a resolver tais tarefas. Isso ocorre desde a Antiguidade, fazendo com que as técnicas de medições e a escrita e cálculos de seus resultados percorra outro caminho que não o da prática.

Assim, na sequência de nosso estudo epistemológico identificamos tarefas que associam as concepções de números fracionários, bem como as técnicas desenvolvidas para cumpri-las.

## 2.2 Consequências da emergência da concepção de medida

O ensino, provavelmente, impôs a necessidade de elaborar, além das tabelas egípcias já vistas, situações que associassem a concepção de medida, para a aprendizagem de cálculos com os resultados de medições, além da busca de generalizações para cálculos de medidas como áreas e volumes. Nesse sentido, dois tipos de tarefas sobressaem-se: a solicitação do cálculo propriamente dito e a procura de valores desconhecidos.

### 2.2.1 Cálculo com números fracionários

Uma das primeiras consequências das medições e do registro de seus resultados foi a necessidade de se efetuar cálculos com tais resultados. Na aritmética egípcia:

A redução à soma de frações unitárias era possível através de tabelas, que davam a decomposição de frações da forma  $2/n$  – a única decomposição necessária por causa da multiplicação diádica. [...] O princípio [...] não é claro (por exemplo quando  $n = 19$ , a redução é  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{76}$ ,  $\frac{1}{114}$  e não  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{57}$ ,  $\frac{1}{128}$ ?). Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um carácter complicado e pesado, mas apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média. (STRUIK, 1997, p. 53)

Quanto à divisão envolvendo fracionários, Boyer (1974) discute o problema 70, do papiro de Rhind, que pede a divisão de 100 por  $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  e apresenta como resultado  $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$ , afirmando que tal resultado é obtido pela técnica da duplicação sucessiva do divisor. Primeiro obtemos  $15 + \frac{1}{4}$ , depois  $31 + \frac{1}{2}$  e, finalmente, 63 que é 8 vezes o divisor. Mas, como dois terços do divisor dão  $5 + \frac{1}{4}$ , o divisor quando multiplicado por  $8 + 4 + \frac{2}{3}$  dará  $99 \frac{3}{4}$  faltando  $\frac{1}{4}$  para o produto 100, que se deseja. Para Boyer, este foi um ajuste inteligente, pois, como 8 vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por  $\frac{2}{63}$  produzirá  $\frac{1}{4}$ . Da tabela para  $2/n$ , sabe-se que  $\frac{2}{63}$  é  $\frac{1}{42} + \frac{1}{126}$ ; portanto, o quociente procurado é  $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$ .

Para a multiplicação, os egípcios utilizavam duas técnicas. Mostraremos aqui a conhecida por método direto, que consiste em fazer a distributiva da primeira expressão pela segunda e, em seguida, a adição como, no exemplo:

Problema do Papiro de Rhind, Egito, 1600 a.C.<sup>4</sup>

Multiplicar a fração  $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$  por  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Resolução: Para multiplicar  $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$  por  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  o escriba multiplica cada fração da primeira expressão por cada uma da segunda.

1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{14}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{56}$
$1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{56}$

Como  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} = 1$ , o produto da multiplicação inicial é 1. O método utilizado para somar é o seguinte: soma-se

4 Anotações baseadas em <http://www.malhatlantica.pt/mathis/> acessado em 16/06/2004.



Resolução: Multiplica 2 cúbitos, a largura, por 2,5 nindan, o comprimento. Verás 5/12 (a área). Multiplica 5/12 por 18, a altura. Verás 7,5 (7,5 sar de volume). Multiplica 7,5 por 6, o coeficiente da parede. Verás 45. Os tijolos são 45 sar<sub>b</sub><sup>6</sup>. O método.

Não podemos esquecer que, na época em que essas tarefas foram elaboradas, os fracionários não eram considerados números, mas sim, uma razão ou relação entre inteiros e que, tal quadro, permaneceu até a definição de números racionais como par de inteiros e classes de equivalência. Durante tal percurso, Aryabatha, em seu tratado de matemática de 499, apresenta todas as operações com números fracionários, calculando a adição e subtração após a redução ao mesmo denominador.

Cem anos depois, aproximadamente, Brahmagupta enuncia a divisão de fracionários: “*depois de ter invertido o denominador e o numerador do divisor, o denominador do dividendo é multiplicado pelo (novo) denominador e seu numerador pelo (novo) numerador*”. (Boyer, 1974, p. 144), o que já mostra a presença de um discurso tecnológico-teórico para a divisão de fracionários que se tornará explícito e formal só muito tempo depois.

O interesse em tornar rotineira a execução de cálculos com fracionários, isto é, encontrar técnicas práticas para esses cálculos fez com que, provavelmente, tenha surgido outro tipo de tarefa que propõe a procura de um valor fracionário desconhecido, que já apresentam os germes do cálculo algébrico.

### 2.2.2 Cálculo de valores desconhecidos

Tarefas desse tipo podem ser identificadas desde as tábuas babilônias, passando pelos papiros egípcios, pelos Nove Capítulos chineses, pelas obras de Aryabhata (499), de Alcuíno de York (782), de Bhaskara (1150), de Fibonacci (1202) até nossos dias. Os exemplos, a seguir, mostram tarefas que solicitam a procura de um valor desconhecido acompanhadas das equações do primeiro grau que as representariam em notações atuais.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (24)

Uma quantidade, 1/7 desta adicionada a esta, fica: 19.

Solução:  $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

Equação:  $x + \frac{1}{7}x = 19$

6 4 1/6 nindan<sup>3</sup> equivale a 250 sar<sub>b</sub> que por sua vez equivale a 2,5 iku<sub>b</sub>.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (31)

A quantidade, os seus  $\frac{2}{3}$ , a sua  $\frac{1}{2}$  e o seu  $\frac{1}{7}$ , adicionadas, dão 33. Qual é a quantidade?

Solução:  $14 + \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$

O escriba resolve o problema dividindo 33 por  $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ .

Equação:  $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$

499, Índia, Aryabhata

Ó, bela donzela com olhos radiantes, diz-me, uma vez que compreendes o método da inversão, qual é o número que multiplicado por 3, aumentado por  $\frac{3}{4}$  do produto, dividido por 7, reduzido em um terço do resultado, depois multiplicado por ele próprio, depois reduzido de 52, cuja raiz quadrada é então extraída antes de ser adicionado 8 e dividido por 10, dá o resultado final 2?

Equação: 
$$\left( \sqrt{\left[ \left[ \left( 3x + \frac{3}{4} \times 3x \right) \div 7 \right] \times \frac{1}{3} \right]^2 - 52 + 8} \right) \div 10 = 2.$$

Para resolver tal tipo de tarefa, identificamos três técnicas que associam sobretudo a concepção de operador:

### 2.2.2.1 Método da falsa posição

Esta técnica foi muito utilizada e consiste em supor um valor específico, provavelmente, falso para assumir o valor desconhecido. A primeira tarefa com equação  $x + \frac{1}{7}x = 19$ , seria resolvida supondo que o valor de  $x$  é 7, por exemplo. Nesse caso,  $x + \frac{1}{7}x$  dá 8, em vez de 19, como pede o problema. De acordo com Boyer (1974) a proporção utilizada para comparar esses resultados, hoje representada por  $\frac{7}{8} = \frac{x}{19}$ , encaminha à percepção de que como  $8 \left( 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 19$  deve-se multiplicar 7 por  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  para obter a resposta:  $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ .

### 2.2.2.2 Método da divisão

Esta técnica consiste em “fatorar a equação” e fazer uma divisão. O exemplo do papiro de Rhind, representado pela equação  $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$  seria então, resolvido pela divisão de 33 por  $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ .

Essas técnicas como ações para cálculos com números fracionários tornaram-se obsoletas e foram substituídas por regras operatórias próprias para números fracionários. No entanto, visto que as situações são essencialmente de natureza

algébrica, percebemos, por trás de tais técnicas, o embrião do discurso tecnológico-teórico das equações de primeiro grau que só viria a ser desenvolvido, explícita e formalmente, séculos depois com base no tratado de álgebra de Al-Khwarizmi, por volta de 830.

### 2.2.2.3 Método da inversão

Este método consiste em partir do final do problema e voltar a seu enunciado, aplicando as operações inversas às citadas. Na tarefa de Aryabatha, vemos o método explicitado em seu enunciado. Nesse caso, iniciando com o número 2 e operando para trás, obtemos  $[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196$ , como  $\sqrt{196} = 14$ , temos  $(14)(3/2)(7)(4/7)/3 = 28$  que é a resposta. Para Eves (2004), a substituição de cada operação por sua inversa responde pelo nome inversão.

O método da inversão, no entanto, ainda pode ser encontrado no livro de Matemática de Osvaldo Sangiorgi, como resolução de um problema, apresentado apenas com números naturais, que teria como objetivo, provavelmente, o trato com esses números:

(SANGIORGI, 1960, 1ª série ginásial, p. 62)

Pensei em um certo número, a seguir acrescentei 7 a esse número e multipliquei o resultado por 4. Subtrai depois 6 e obtive o número 310. Que número pensei?

Basta, para resolver o problema, partir do resultado encontrado 310 e fazer as operações inversas das que foram indicadas.

Assim:  $310 + 6 = 316$ ;  $316 : 4 = 79$ ;  $79 - 7 = 72$

Logo: o número pensado foi 72.

Prova:  $72$ ;  $72 + 7 = 79$ ;  $79 \times 4 = 316$ ;  $316 - 6 = 310$ .

Equação:  $[(x + 7) \times 4] - 6 = 310$

Mas, a tarefa de calcular com números fracionários, a partir da procura de valores desconhecidos, reserva outras facetas: uma delas é a que apresenta o despontar das equações de segundo grau, a partir do Teorema de Pitágoras que podem ser identificadas desde a Mesopotâmia, em tarefas que pedem a mobilização da concepção de medida para números fracionários:

Entre 1650 e 1200 a.C., Mesopotâmia (9).

Uma trave de comprimento 0,5 GAR está encostada a uma parede. O seu topo está 0,1 Gar abaixo do que deveria estar se estivesse perfeitamente direita.

A que distância da parede está a sua parte de baixo?

Resolução: Faz o seguinte: quadra 0,5, obtendo 0,25. Subtrai 0,1 de 0,5 fica 0,4. Quadra 0,4 obtendo 0,16. Subtrai 0,16 de [0,25], ficando 0,09. Qual é a raiz quadrada de 0,09? A parte de baixo está a [0,3] da parede. Quando a parte de baixo está a 0,3 da parede, que distância é que o topo escorregou para baixo? Quadra 0,3, obtendo 0,09.

Nota: Este é um dos primeiros problemas envolvendo o teorema de Pitágoras. 1519, Europa, Gaspar Nicolas.

É uma árvore de 50 braças e está ao pé de um rio de 30 braças de largura e esta árvore quebrou por tal altura que foi a ponta além da borda do rio.

Demando: por onde quebrou?



**Figura 3** – Imagem do livro de Gaspar de Nicolas para teorema de Pitágoras.

Atualmente, encontramos problemas desse tipo nos livros didáticos, como a aplicação do Teorema de Pitágoras. Mas, a princípio a resolução resumia-se à procura do que chamamos hoje ternas pitagóricas.

Na tábua 322, dos babilônios, aparecem colunas ordenadas de listas de números que parecem se ajustar a lados de triângulos retângulos, visto que estão ordenados, segundo a expressão  $a/b$ , hoje, secante do ângulo  $C$  em um triângulo retângulo em  $A$  e de catetos medindo  $b$  e  $c$ . Não existe nada parecido com a medida de ângulos, o que leva a crer que seguiram critérios baseados em proporcionalidade de segmentos.<sup>7</sup>

A técnica de procura dessas ternas, fundamentada na prática, ainda não é justificada por um discurso tecnológico-teórico explícito e formal que incluiria o teorema de Pitágoras, embora já possa ser percebido com os chineses quando explicitam tal teorema pelo nome de *regra Gougu* com o seguinte enunciando:

<sup>7</sup> Anotações baseadas em [http://descartes.cnice.mecd.es/taller\\_de\\_matematicas/](http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/), acessado em 16/06/2004.

Adiciona o quadrado do *gou* e do *gu*, tira a raiz quadrada [da soma] dando a *xian* [hipotenusa]. Para eles *gou* corresponde, normalmente, ao cateto menor do triângulo retângulo e *gu* ao maior.<sup>8</sup>

Uma outra faceta desse tipo de tarefa é procurar mais que um valor desconhecido em tarefas que pedem a mobilização da concepção de medida para números fracionários com base na resolução de equações de segundo grau, como as seguintes:

Entre 2000 a 1600 a.C., Mesopotâmia.

Adicionei onze vezes o lado do meu quadrado à sua área, obtive  $25/4$ .

Resolução: Multiplique  $25/4$  por 11, obtém  $275/4$ . Parta 7 ao meio. Multiplique  $7/2$  por  $7/2$ . Adicione  $49/4$  com  $275/4$ , resultado 81. Este é o quadrado de 9. Subtraia  $7/2$ , que multiplicou, de 9; resultado  $11/2$ . O recíproco de 11 não pode ser encontrado. Por quanto devo multiplicar 11 para obter  $11/2$ ? Obtenho  $1/2$ . O lado do quadrado é  $1/2$ .

Equação:  $x^2 + 11x = \frac{25}{4}$

830, Al-Khwarizmi, árabe.

Dividi dez em duas partes e dividi a primeira pela segunda e a segunda pela primeira e a soma dos quocientes é  $2 + 1/6$ . Descobri as partes.

Equações:  $x + y = 10$  e  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{6}$ .

Essas tarefas de natureza algébrica, provavelmente, tinham como objetivo tornar rotineira a tarefa do cálculo com fracionários baseadas em técnicas que mais tarde receberiam o nome de resolução de equações do segundo grau.

A concepção de medida para fracionários predomina nesses tipos de tarefas até o surgimento das notações algébricas, que permitirão a utilização de letras para representar tais valores desconhecidos, fazendo com que essas tarefas migrem para o campo algébrico.

Pode ser observado que tarefas desses tipos associam também a concepção de operador, isto é, a ideia de um número fracionário transformando grandezas contínuas ou discretas:

---

8 Os problemas desta parte do trabalho, sem referência, foram retirados do site <http://www.malhatlantica.pt.mathis/> acessada em 16/06/2004.

1202, Europa, Líber Abaci de Fibonacci (11).

Um certo jovem viveu alguns anos; se viver tanto como já viveu, e de novo a mesma quantidade de anos, e  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  dos anos que já viveu, e mais um ano, ele terá vivido 100 anos.

Outro ponto observado que merece ser mencionado, independente de tratar de fracionários é o fato de o ensino tratar de situações artificiais, fora da realidade. O mais antigo que encontramos, é o seguinte:

Entre 1800 a 1600 a.C., Mesopotâmia.

Encontrei uma pedra, mas não a pesei. Depois somei-lhe a sétima parte do seu peso e depois a décima primeira parte desse novo peso. Pesei o total: 1 *mana*. Qual é o peso original da pedra?

Solução: O peso da pedra era  $\frac{2}{3}$  *mana* 8 *gin* 22  $\frac{1}{2}$  *še*<sup>9</sup>.

$$\text{Equação: } \frac{1}{7}x + \frac{1}{11} \times \frac{1}{7}x = 1$$

Provavelmente, esse problema ocorra na transposição da tarefa da instituição de origem (administração do estado) para a instituição de ensino (formação de escribas) e pode ser observado até hoje em livros didáticos. Nossa suposição é reforçada por Miorim quando afirma que:

Essas situações-problema, consideradas concretas por muitos autores, apresentam muitas vezes elementos improváveis para uma situação real. Isso pode indicar que o mais importante era o treino do algoritmo, ou melhor, o treino dos passos a serem seguidos para a obtenção da solução de um determinado tipo de problema, e não a sua concretude. (MIORIM, 1998, p. 11)

### 2.2.3 Evolução do discurso tecnológico-teórico para técnicas de medidas

Tarefas que solicitam a medição de áreas, volumes, capacidades, ... encaminham o aperfeiçoamento de técnicas para o cálculo de tais medidas buscando possíveis generalizações. Identificamos técnicas para o cálculo de medida da área de triângulos, trapézios, círculos, etc. em muitas situações, entre elas:

Entre 200 e 100 a.C., China, Nove Capítulos (26).

Tarefa 2: Dado um outro terreno triangular, com base  $5 \frac{1}{2}$  bu e altura  $8 \frac{2}{3}$  bu . Diz: qual é a área?

9 Um mana equivale a 60 gin, 1 gin equivale a 180 še.

Solução:  $23 \frac{5}{6}$  bu quadrados

Regra para terrenos triangulares: Multiplica metade da base pela altura.

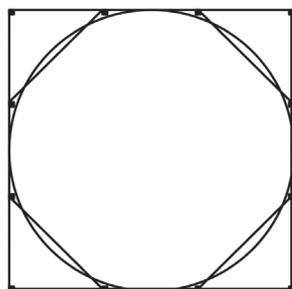
1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (52)

Qual é a área de um triângulo truncado de 20 khet de lado, 6 khet de base e 4 khet de linha de secção?

Resolução: Ahmes resolve da seguinte maneira: soma a base do triângulo linha de secção, obtendo o valor 10. Para obter um retângulo, divide 10 por 2 obtendo 5. Em seguida, multiplica 5 por 20 e obtém a área desejada: 100.

De acordo com Boyer (1974) a regra egípcia para calcular a medida da área de uma superfície circular é considerada um dos maiores sucessos da época. A medida da área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de 8 unidades, o que supõe para  $\pi$  uma aproximação de  $3 + \frac{1}{6}$ .

O autor afirma ainda que na resolução do problema 48 do Papiro de Rhind, Ahmes calcula a área de um círculo inscrito em um quadrado, aproximando-a pela área do octógono, conforme a Figura 4, que permite considerar para  $\frac{\pi}{4}$  uma aproximação de  $\frac{64}{81}$ .



**Figura 4** – Figura suporte para o cálculo aproximado da área de um círculo.

Identificamos, também, o embrião da fórmula para o cálculo da medida de volumes de um tronco de pirâmide já nos egípcios:

1890 a.C., Egito, Papiro de Moscou.

Se te é dito, um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo.

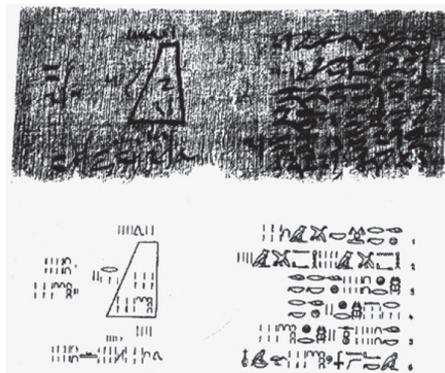
Resolução: Calcula com este 4, quadrando. Resultado 16. Dobra este 4. Resultado 8.

Calcula com este 2, quadrando. Resultado 4.

Adiciona este 16 com este 8 e com este 4. Resultado 28. Calcula  $\frac{1}{3}$  de 6. Resultado 2.

Calcula o dobro de 28. Resultado 56.

É 56. Encontraste o resultado certo.<sup>10</sup>



**Figura 5** – Imagem do papiro de Moscou para um tronco de pirâmide.

Boyer (1974, p. 14) afirma que a medida do volume, nesse problema, foi calculada, de acordo com a fórmula moderna  $v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$  sendo  $h$  a medida da altura e  $a$  e  $b$  as medidas das bases. Essa fórmula embora não apareça explicitamente, já era conhecida e utilizada pelos egípcios.

Outros problemas desse tipo podem ser encontrados como o cálculo do volume de um cilindro ou de um tronco de cone, entre outros.

Arquimedes, no livro do Método, afirma que Demócrito I, que viveu no fim no século V a.C., foi o primeiro a enunciar que o volume de um cone é  $\frac{1}{3}$  do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura, o que foi demonstrado por Eudoxo (409 a 356 a.C.) pelo método da exaustão.

Entretanto, é atribuída a Demócrito a demonstração de que o volume da pirâmide é igual a  $\frac{1}{3}$  da medida da área da base multiplicada pela medida da altura, embora este procedimento seja utilizado desde os egípcios.

Quando se analisam essas tarefas, entende-se a afirmação de Valente:

Os cálculos numéricos imensos, contas e mais contas são uma imposição da prática para quem quer que seja. O antigo sistema de medidas está diretamente relacionado a isso. Um sistema complicadíssimo de unidades de medidas de difícil conversão. [...] O cálculo, a conversão de unidades, a obtenção de montantes são uma necessidade fundamental dentro dessa realidade. (VALENTE, 2002, p. 82)

10 Imagem retirada do site <http://www.matematica.br/historia/> acessado em 16/06/2004.

Com o passar do tempo, percebemos que tanto os tipos de tarefas que associam a concepção de medida como o estudo de sistemas de medidas e tabelas de conversões conquistaram um lugar próprio no ensino que permanece até hoje nos livros didáticos, ao passo que a representação fracionária de medidas é abandonada, quase completamente, para dar lugar à representação decimal.

A mobilização da concepção *parte-todo* de números fracionários permanece na determinação de subunidades de medida por meio do fracionamento do que se considera como unidade. A concepção de *operador*, por sua vez, mobilizada nas técnicas para cálculos ou associada diretamente na situação apresentada, tem sua esfera de mobilização ampliada nas generalizações do cálculo de certas medidas, como áreas e volumes.

#### 2.2.4 A relação entre as concepções de medida e parte-todo

O fracionamento de uma unidade de medida dá lugar rapidamente ao fracionamento de um todo com base em alguma medida. A seguir, as situações nos mostram essa relação em contextos de medidas de comprimento e de tempo:

Entre 200 e 100 a.C., China, Nove capítulos

Um reservatório tem cinco canais que o encham de água. Quando, apenas, o primeiro está aberto, o reservatório enche-se em  $\frac{1}{3}$  de um dia. O segundo canal enche o reservatório num dia, o terceiro canal em  $2\frac{1}{2}$ , o quarto em 3 dias e o quinto em 5 dias. Se se abrirem todos os canais, quanto tempo levará a encher o reservatório?

Solução: Em  $\frac{15}{74}$  dias

Século V, Antologia Grega

Este é Polyphemus o ciclope de bronze, e se nele alguém fizer um olho, uma boca, e uma mão, interligando-os com canos. Quase parece que estava a deitar água, e também parece que a estar a jorrar da sua boca. Nenhuma das suas bicas é irregular, pois a sua mão, quando funciona, encherá uma cisterna em três dias, e o seu olho num dia, e a sua boca em dois quintos do dia. Dir-me-ás o tempo que demorará quando todos os três estiverem a funcionar.

Resposta:  $\frac{6}{23}$  do dia de 12 horas

1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginásial, p. 69

O caminho da lesma (que não conhecia muito matemática!). Uma lesma quer chegar ao cimo de uma árvore de 14 metros de altura. Cada dia a lesma sobe 5 m e de noite o seu próprio peso a faz descer 4 m (caprichos de lesma!). Depois de quantos dias atingirá a lesma o seu destino? (Atenção para a resposta: não são 14 dias e sim..... 10).

1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginásial, p. 153

Duas torneiras despejam água num mesmo tanque. A primeira sozinha o enche em  $\frac{1}{5}$  de hora e a segunda sozinha em  $\frac{1}{6}$  de hora. Em quanto tempo encherão o tanque as duas torneiras juntas?

Solução: 1ª torneira: Enche o tanque em  $\frac{1}{5}$  de hora ou  $\frac{60}{5}$  min = 12 min.

12 min  $\rightarrow$  1 tanque

1 min  $\rightarrow$   $\frac{1}{12}$  do tanque.

2ª torneira: Enche o tanque em  $\frac{1}{6}$  de hora ou  $\frac{60}{6}$  min = 10 min

10 min  $\rightarrow$  1 tanque

1 min  $\rightarrow$   $\frac{1}{10}$  do tanque

1ª + 2ª: 1 min  $\rightarrow$   $\frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{(5 + 6)}{60} = \frac{11}{60}$

Logo:  $\frac{11}{60}$  do tanque  $\rightarrow$  1 min

$\frac{1}{60}$  do tanque  $\rightarrow$   $\frac{1}{11}$  do min

$\frac{60}{60}$  do tanque  $\rightarrow$   $\frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11}$  min.

Resposta: As duas torneiras enchem o tanque em  $5 \frac{5}{11}$  minutos.

Nos problemas acima, podemos perceber que o número fracionário está presente, ou no enunciado da tarefa ou no resultado encontrado e este, muitas vezes, não faz sentido no dia-a-dia. No penúltimo exemplo, o resultado obtido é  $5 \frac{5}{11}$  do minuto.

Nessas situações, podemos identificar a mobilização das concepções de operador e parte-todo para números fracionários na técnica utilizada na resolução do problema.

Este tipo de tarefa ainda é encontrado hoje, em alguns livros, geralmente, como desafio, mas, apresentado com números inteiros, provavelmente, porque o interesse não seja mais o treino do cálculo com números fracionários, mas a atenção do aluno em sua resolução, como se vê no penúltimo exemplo.

### 2.2.5 A relação entre as concepções de medida e razão

Identificamos ainda, neste estudo, tipos de tarefas que associam a concepção de medida, fazendo emergir a concepção de razão. No Egito encontramos tarefas que tratam da qualidade do pão ou da cerveja com base na quantidade de trigo ou de cevada utilizada em sua fabricação:

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (69).

$3+1/2$  heqats de farinha são transformados em 80 pães. Descubra a quantidade de farinha em cada pão e o “pesu”<sup>11</sup>.

Solução:

Multipliquemos  $3+1/2$  por 320, pois num heqat existem 320 ro e pretende-se saber o número de ro em  $3+1/2$ .

1                    320

2                    640

$1/2$                   160

Logo em  $3+1/2$  heqats existem 1120 ro.

Agora divide-se 1120 pelos 80 pães:

1                    80

10                  800

2                    160

4                    320

logo  $1120 = 800+320$  e  $1120/80 = 10+4=14$ .

Então tem-se 14 ro por cada pão.

Para determinar o *pesu* de cada pão, divide-se 80 por  $3+1/2$ .

1                     $3+1/2$

10                  35

20                  70

2                    7

$2/3$                    $2+1/3$

$1/21$                  $1/6$

$1/7$                    $1/2$

Como  $70+7+2+1/3+1/6+1/2 = 80$ , tem-se que  $80/(3+1/2) = 20+2+2/3+1/21+1/7 = 22+2/3+1/21+1/7$ . O *pesu* é  $22+2/3+1/21+1/7$ .

Para Struik (1997), esses problemas egípcios mostram a origem prática dessa aritmética pouco cômoda e de uma álgebra primitiva, mas entendemos que tais tipos de tarefas mostram a tentativa de trazer situações da realidade, não só para ensinar, mas, como tratar situações que envolvam o cálculo com números fracionários. A concepção de razão, por sua vez, quando mobilizada é tratada como o quociente de dois números.

Além do *pesu*, os egípcios criaram também o *seqt* para relacionar a altura de uma pirâmide a seu afastamento em relação à base (inclinação):

11 O *pesu* é a razão entre o número de pães confeccionados ou o número de jarros de cerveja produzidos com o número de héqats de cereal (trigo ou cevada) utilizado na sua produção.

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind (56).

Exemplo do cálculo de uma pirâmide.

Altura 250, base 360 cúbitos.

Qual é o seqt?

Resolução: Descobre  $\frac{1}{2}$  de 360, 180.

Divide 180 por 250,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$  cúbitos.

Agora um cúbito tem 7 palmos.

Então multiplica 7 por  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$  cúbitos.

...  $5 + \frac{1}{25}$ . Este é o seqt.

Identifica-se na técnica utilizada a relação direta da razão à divisão e a utilização da conversão de unidades de medidas. As razões entre medidas aparecem também entre os babilônios, identificadas em uma tábua do grupo de Susa, em uma tabela que compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. Para o caso do

pentágono, apresentam  $1;40$  (ou  $1\frac{40}{60}$ ) que está correto para dois algarismos significativos, de acordo com Boyer (1974).

Pode-se identificar, ainda, desde a Antiguidade, problemas financeiros que tratam de juros:

Entre 200 a 100 a.C., China, Nove Capítulos (20).

Um homem de negócios investiu dinheiro em Shu. Os juros eram  $\frac{3}{10}$ . Ele levantou 14000 da primeira vez; 13000 da vez seguinte; 11000 da vez seguinte; 10000 da última vez. Depois dos 5 levantamentos, o capital que investiu e os juros esgotaram. Diz: o capital e os juros, quanto é cada um?

Solução: Capital  $30468+84876/371293$  moedas, juros  $29531+286417/371293$

1150, Índia, Lilavati de Bhaskara, verso 100.

A soma de 94 niskas, foram emprestadas em três partes com um juro de  $\frac{1}{20}$ ,  $\frac{3}{100}$  e  $\frac{1}{25}$ , obteve-se um lucro igual de cada uma das partes, em 7, 10 e 5 meses, respectivamente. Diz, matemático a quantidade de cada parte.

Solução: 24, 28 e 42 niskas.

Percebe-se que essas tarefas associam a concepção de razão quando estipulam ou pedem uma taxa de aplicação, da mesma forma, que fazemos hoje, pode ser interpretada como operador e transformar-se em quociente durante o tratamento de suas representações.

Por outro lado, esses exemplos apresentam os resultados, mas não a técnica utilizada, supomos que, para resolver o primeiro exemplo, seja necessário

encontrar qual o expoente de  $6/5$  que dê resultado 2. Segundo Eves (2004), os babilônios buscavam potências de  $6/5$  que dessem um valor menor e outro maior que 2, isto é  $(6/5)^2$  e  $(6/5)^4$  e, por proporcionalidade, obtinham a resposta procurada.

O autor afirma ainda que existem algumas tábuas babilônias que parecem representar tabelas de  $an$  para  $n$  variando de 1 a 10 e  $a$  valendo 9, 16, 100 e 225, que poderiam ser úteis para resolver equações exponenciais nesse tipo de tarefas.

No segundo exemplo, dos Nove Capítulos, também não sabemos a técnica aplicada, mas podemos ver que o resultado não faz sentido, o que mostra o distanciamento da realidade para situações de ensino, faz com que grandezas discretas, como é o caso das moedas, sejam tratadas como contínuas, produzindo respostas que seriam impossíveis em uma situação real.

## 2.3 As situações de distribuição

Além das práticas de medições, os antigos também sentiram necessidade de resolver problemas, envolvendo a distribuição de bens e heranças que propiciaram a emergência da concepção de quociente para números fracionários.

### 2.3.1 A concepção de quociente

Podemos identificar a emergência de tal concepção, desde a Antiguidade, em situações do tipo:

Entre 200 e 100 a.C., China, Nove Capítulos

Um dique com uma largura inferior de 2 zhang e uma superior de 8 chi, uma altura de 4 chi e um comprimento de 12 zhang e 7 chi. Diz: qual é o volume.

Solução: 7112 chi (cúbicos)

Cada trabalhador tem uma cota de Inverno pelo seu trabalho de 444 chi [cúbicos]. Diz quantos trabalhadores são precisos?

Solução: 6 2/111 trabalhadores.

Regra para construir uma muralha de cidade, muro, dique, vala, fosso e canal: Adiciona as largura de cima e de baixo, depois parte ao meio, multiplica pela altura ou profundidade, depois multiplica pelo comprimento, dando o volume.

A técnica empregada para resolver a segunda parte da tarefa resume-se à aplicação da operação de divisão que, por sua vez, apresenta procedimentos e estudos próprios nas diferentes sociedades. No primeiro exemplo, vemos claramente a técnica usada pelos egípcios.

No entanto, podemos encontrar numerosos exemplos, como o segundo, em que o número fracionário não pode aparecer como resultado da divisão, pois a situação trata de grandeza discreta. Hoje, diríamos que o problema deve ser resolvido no campo dos naturais e não dos racionais. Podemos questionar esse resultado alegando a possibilidade de algum engano na tradução, mas, de qualquer forma, sabemos que resultados desse tipo apareciam até bem pouco tempo em livros didáticos e no discurso de futuros professores das séries iniciais<sup>12</sup>, como resultados possíveis na Matemática, mas, não na realidade.

Por outro lado, estando correta a tradução, podemos supor que tais respostas vêm de longo tempo, dando-nos a impressão que a divisão pode ser aplicada em qualquer situação. Até hoje, a divisão com resto apresenta problemas para o ensino e aprendizagem, sendo um deles, sua relação com os fracionários, pois esta depende da grandeza, contínua ou discreta apresentada na situação, isto é, do campo numérico em que se trabalha.

### 2.3.2 A relação entre as concepções de operador e quociente

Identificamos algumas tarefas de distribuição que associam a concepção de operador em suas técnicas, pois utilizam cálculos de medidas e de divisão, nos quais os fracionários surgem como operador, sendo tratados como quocientes.

782, Europa, Alcuíno de York

Há uma cidade triangular que tem um lado de 100 pés, outro lado de 100 pés e um terceiro de 90 pés. Dentro dela quero construir uma estrutura de casas de tal forma que cada casa tenha 20 pés de comprimento e 10 pés de largura. Quantas casas devem estar contidas [nesta estrutura]?

**Solução:** Dois lados da cidade adicionados fazem 200; tirando metade de 200 faz 100. Mas como a frente é 90 pés, tire metade de 90, fazendo 45. E uma vez que o comprimento de cada casa é 20 pés, enquanto a largura é 10, faça 20 em 100, fazendo cinco. A décima parte de 40 é quatro, por isso, faça quatro vezes cinco, fazendo 20. Este é o número de casas.

1202, Europa, Líber Abaci de Fibonacci.

Um certo homem tem uma peça de material que tem 100 cúbitos de comprimento e 30 cúbitos de largura, do qual quer fazer panos de linho, cada um dos quais tem de comprimento 12 cúbitos e de largura 5 cúbitos. Donde se procura, quantos panos de linho é que ele pode fazer.

12 Ver resultados a esse respeito em SILVA, 1997.

Não encontramos problemas desse tipo mais antigos, o que nos leva a supor que aparecem com mais persistência a partir do século VIII. Pelas soluções apresentadas, vemos que a técnica utilizada para tais tarefas é a divisão de medidas de áreas, sendo a concepção de operador mobilizada e associada à concepção de quociente no tratamento de suas representações, como podemos ver na solução do primeiro exemplo, de Alcuino de York, quando diz “*a décima parte de 40 é quatro*”, em que fica implícito o cálculo da divisão de 40 por 10.

No entanto, acreditamos que o objetivo de tais tarefas tenha sido o de ensinar a técnica do cálculo de medida de área, pois esta justificaria relacionar terrenos triangulares, como no terceiro exemplo de Alcuino, com a quantidade de casas retangulares possíveis de serem construídas nesse terreno. Embora o problema permita a divisão de medidas de áreas a resposta obtida é impossível de ser feita.

### 2.3.3 As relações entre as concepções de razão, operador e quociente

Identificamos, ainda, situações que, provavelmente, se originaram em divisão de heranças que relacionam as concepções de razão, de operador e de quociente, entre elas, as que tratam de divisão proporcional, tanto para números inteiros como para fracionários:

1600 a.C., Egito, Papiro de Rhind.

Divida 700 pães por quatro homens na proporção dos números  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , e  $\frac{1}{4}$ . Diga-me a parte que cada homem recebe.

Primeiro faz-se a seguinte soma  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ . Depois, efetua-se a divisão de 700 por  $\frac{7}{4}$  que dá 400. Multiplica-se este número por cada uma das frações  $\frac{2}{3}$ , ... obtendo-se a respectiva quantidade de pão de cada homem.

Entre 200 e 100 a.C., China, Nove capítulos.

Dados cinco oficiais de diferentes patentes: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao e Gongshi caçaram 5 veados. Diz: Quanto é que cada um recebe, se o veado é distribuído consoante sua patente?

**Solução:** Dafu obtém  $1 \frac{2}{3}$  do veado, Bugeng obtém  $1 \frac{1}{3}$  do veado, Zanniao obtém 1 veado, Shangzao obtém  $\frac{2}{3}$  do veado e Gongshi obtém  $\frac{1}{3}$  do veado.

782, Europa, Alcuino de York.

Um certo bispo ordenou que 12 pães fossem divididos entre o clero. Estipulou que cada padre recebesse dois pães; cada diácono metade de um

pão e cada leitor a quarta parte. Então descobriu que o número de clérigos e de pães era o mesmo. Quantos padres, diácono e leitores havia?

1519, Europa, Gaspar de Nicolas.

O quintal do cravo vale 100 cruzados e a canela 60 e o gengibre 40. Chega um mercador e quer tanto de uma especiaria como da outra e quer 350 cruzados. Demando, quanto tomará de cada uma?

Solução: Faze como na passada (pergunta): soma os preços e farás 200 cruzados e este é o teu partidor e a partição é o próprio dinheiro que o mercador quer empregar, 350, os quais parte por 200 e vem  $1 \frac{3}{4}$  e tanto tomará de cada uma das especiarias: 1 quintal e 3 arrobas.

Prova: Toma 1 quintal e 3 arrobas daquele de 100 e acharás que se monta 175; e daquele que vale a 60 acharás que se monta 1 quintal e 3 arrobas 105 e aquele que vale a 40 acharás que se monta em 1 quintal e 3 arrobas 70 cruzados. Ora soma estes números todos três, 105 e 175 e 70, e farás justamente os ditos 350 cruzados».

1960, Osvaldo Sangiorgi, 1ª série ginásial, p. 150.

Um barril com a capacidade de 42 litros está cheio de vinho, que deve ser repartido entre três pessoas. A primeira pessoa deve receber a fração equivalente a  $\frac{2}{3}$  do vinho contido no barril, a segunda a fração equivalente a  $\frac{1}{7}$  e a terceira o restante. Quanto deve receber cada pessoa?

1963, Osvaldo Sangiorgi, 3ª série ginásial, p. 57.

Dividir 144 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 12.

Solução: Reduzindo as frações ao mesmo denominador, vem:  $\frac{9}{12}$ ,  $\frac{8}{12}$  e  $\frac{6}{12}$ . Divide-se agora, 92 em partes diretamente proporcionais aos números 9, 8 e 6. Isto é  $x = (92 \times 9) / 23 = 36$ ,  $y = (92 \times 8) / 23 = 32$ ,  $z = (92 \times 6) / 23 = 24$ .

Resposta: As partes procuradas são: 36, 32 e 24.

A solução do primeiro problema é encontrada, de acordo com Boyer (1974), a partir do quociente de 700 pela soma dos fracionários da proporção. Neste caso, o quociente de 700 por  $1 \frac{3}{4}$  é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ . O resultado é 400, Calculando  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$  do resultado obtido, 400, chega-se às parcelas de pão requeridas.

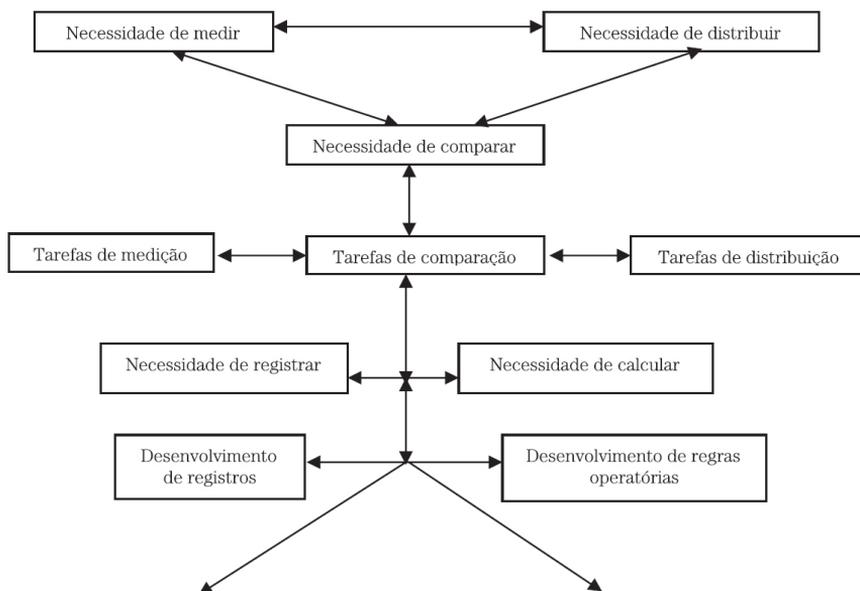
Percebemos que tais tarefas pedem a mobilização da concepção de razão, na distribuição proporcional, a técnica associa a concepção de operador que, por sua vez, leva a manipulação do fracionário, como um quociente. Mas, a história nos

mostra que, com o passar do tempo, esses tipos de tarefa assumiram um caráter algébrico, como podemos ver no último exemplo.

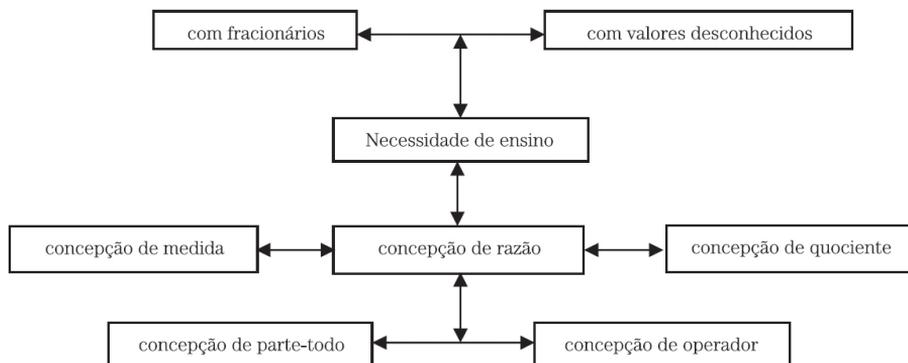
Em algumas tarefas, identificamos mais uma vez o efeito da transposição de situações reais para o ensino, pois, embora tratem de situações reais solicitam ações que não fariam sentido na vida real como, por exemplo, a proposta de se dividir um veado em terços ou a proposta do bispo para dividir os pães.

Para finalizar esta parte de nosso estudo, elaboramos o esquema, apresentado na Figura 6 que mostra uma síntese do desenvolvimento do ensino dos números fracionários baseada na busca de técnicas que resolvessem algumas tarefas necessárias às sociedades da Antiguidade.

Embora o esquema dê a impressão de linearidade dos fatos ou de ordem cronológica, isso não é verdade, pois, como vimos no estudo que apresentamos, tanto as necessidades de medir, distribuir e comparar quanto a de buscar as técnicas para cumprir essas tarefas apresentaram-se simultaneamente na Antiguidade. Como consequência imediata, a necessidade de registro de tais técnicas e de cálculos com os novos números encaminham a necessidade do ensino do conhecimento desenvolvido. Esse ensino, por sua vez, verifica-se por meio de tarefas que enfatizam o cálculo com fracionários e a descoberta de valores desconhecidos e associam as concepções medida, quociente e razão para fracionários que se relacionam entre si e com as concepções parte-todo e operador.



**Figura 6** – Esquema da gênese histórica de números fracionários. *(continua)*



**Figura 6** – Esquema da gênese histórica de números fracionários. *(continuação)*

A complexidade crescente das sociedades impõe a criação de escolas para formar escribas que se deparam com a necessidade de desenvolver tarefas para o ensino de cálculo com fracionários especificamente ou procura de valores desconhecidos.

Pautado nesses tipos de tarefas que as concepções de números fracionários e as relações entre elas, emergem, tanto da própria tarefa como das técnicas desenvolvidas para resolvê-las.

Assim, em continuidade a este estudo epistemológico, buscamos o desenvolvimento do discurso tecnológico-teórico no ensino dos números fracionários, a partir do século XVIII, quando aparecem os tratados para as escolas de artilharia e marinha que serviram de base para os livros utilizados, inicialmente, na escola do tipo que temos atualmente. O objetivo é buscar o desenvolvimento do ensino de fracionários da forma que conhecemos hoje.

## 2.4 O número fracionário na escola moderna

Cabe lembrar que *Os Nove Capítulos* influenciaram toda a matemática chinesa e foram utilizados como manual de ensino, na China e em regiões próximas, até por volta de 1600, quando a ciência ocidental chega ao oriente.

De acordo com Neyret (1995), na obra *Cours de mathématiques* de Étienne de Bézout (1739-1783) elaborado para candidatos à escola da marinha e muito utilizado, no final do século XVIII e início do século XIX, aparece pela primeira vez a representação fracionária tratada efetivamente como representante de números.

Na primeira página, Bézout afirma que o número expressa de quantas unidades ou partes de unidades uma quantidade é composta e o classifica em três tipos: os inteiros, as frações e os números fracionários se “*a quantidade é composta de unidades inteiras, de unidades inteiras e partes da unidade ou de partes da*

*unidade*” respectivamente. Classifica-os, também, por abstratos: “*quando enunciamos sem designar a espécie de unidade*” ou por concretos: “*quando enunciamos ao mesmo tempo a espécie de unidade*” (Ibid, p. 65).

Bézout utiliza o termo *fração* para indicar, o que hoje chamamos de números mistos e o termo *números fracionários*, para o que hoje chamamos de frações ordinárias ou frações menores que a unidade.

Os números fracionários são apresentados, no tratado de Bézout, segundo Valente (2002), com base em uma estrutura que ainda pode ser notada em livros atuais: operações com fracionários, vários exemplos numéricos e aplicações práticas para utilização desses números. O autor apresenta um exemplo de aplicação do tratado de Bézout:

Após o que dissemos (item 96), é fácil ver como se pode avaliar uma fração. Pede-se por exemplo, quanto valem os  $\frac{5}{7}$  de um livre. Sendo que os  $\frac{5}{7}$  de um livre são a mesma coisa (item 96) que a sétima parte de 5 livres, reduzo os 5 livres em fols (item 57) e divido os 100 fols que obtenho por 7, o que irá me dar 14 fols para quociente e 2 fols de resto; reduzo esses 2 fols em deniers e divido 24 deniers por 7, terei então 3 deniers  $\frac{3}{7}$ , assim os  $\frac{5}{7}$  de um livre são 14 fols 3 deniers e  $\frac{3}{7}$  de denier (VALENTE, 2002, p. 83).

Notamos, nesse exemplo, que a primeira concepção de fracionário mobilizada é a de operador em “ *$\frac{5}{7}$  de um livre são a mesma coisa que a sétima parte de 5 livres*”. A seguir, associa a concepção de quociente, utilizando a transformação de unidade de medida, por conta da impossibilidade da divisão de 5 por 7, completando com “*divido 100 fols por 7*”, que é entendido como sendo “*um sétimo de 100*”.

De acordo com Valente (2002), da mesma forma que os autores da Idade Média, Bézout apresenta uma tábua de unidades para moedas, pesos, comprimentos e tempo e trata dos “números complexos” – quantidades expressas em múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida – para garantir a representação de resultados de medição por números inteiros.

Afirma ainda que os livros de Belidor e Bézout representam a universalização da matemática escolar ensinada na Europa, e o último tornou-se referência do saber escolar matemático em Portugal, com sua tradução em 1773 e utilização pela Universidade de Coimbra e pela Academia de Marinha, passando, inclusive, a ser usado no Curso de Artilharia a partir de 1786. O autor conclui que a morte de Bézout, em 1783, fez com que vários autores reeditassem suas obras, entre eles, Reynaud que, em 1812, acrescenta notas importantes que contribuíram, para que a Aritmética de Bézout fosse indicada pelo ministro francês da Instrução Pública ainda em 1849.

Segundo Neyret, o número fracionário, para Reynaud, é escrito na forma  $n\frac{a}{b}$  indicando:

[...] o quociente do numerador pelo denominador ou como expressam que a unidade foi dividida em tantas partes iguais quantas as unidades que existem no denominador e que tomamos tantas dessas partes quanto há de unidades no numerador. (NEYRET, 1995, p. 77, tradução nossa)

Entendemos, por essa afirmação, que Reynaud mobiliza as concepções de quociente ou de parte-todo nas situações que envolvem números fracionários. Reynaud usa o nome genérico de frações, segundo Neyret (1995), para se referir, tanto aos números fracionários como às frações utilizadas por Bézout.

Ainda emprega em seu livro o termo “número decimal” e apresenta seu estudo, tratando da redução aos decimais e introduzindo os decimais periódicos: “*nos quais vários Algarismos se repetem na mesma ordem e ao infinito*”, além de obter a geratriz desses periódicos.

No Brasil, de acordo com Valente (2002), com base nas obras de Bézout e Belidor a aritmética e a geometria passam a ser tratadas separadamente e tornam-se, posteriormente, duas disciplinas autônomas na escola, acrescentando que:

Será essa matemática, inicialmente ligada diretamente à prática, que, desenvolvida pedagogicamente nas escolas técnico-militares, organizada, dividida e didatizada para diferentes classes, passará para os colégios e preparatórios do século XIX, e orientará os autores brasileiros a escreverem seus próprios livros didáticos. (Ibid, p. 88)

O ensino de matemática, pouco a pouco, será unificado em relação aos conteúdos e adoção de livros, fazendo com que novos manuais como os de Lacroix, Legendre e Euler tornem-se referência no ensino de matemática no primeiro ano da Academia Real Militar, que era equivalente a um ensino secundário inexistente no Brasil, até então.

Assim, em nosso país, a obra de Lacroix (1765-1843) foi a primeira referência para o ensino do novo sistema métrico e da álgebra. Nela, Lacroix define as dízimas periódicas, mostra que o conjunto dos números racionais é a reunião dos decimais exatos com essas dízimas e, também, que os fracionários decimais fazem com que o novo sistema métrico decimal seja introduzido, naturalmente, de acordo com Valente (2002).

Por outro lado, Neyret (1995) afirma ainda que Laplace (1749-1827), também, trata do assunto em sua primeira lição na Escola Militar de Paris, quando

mostra a ligação dos números inteiros e dos números decimais com os números obtidos pelo uso do novo sistema métrico.

Para Laplace, uma razão escrita na forma  $a/b$ , representa o quociente desses dois números que pode resultar em inteiros, racionais ou irracionais.

Escreve uma proporção sob a forma  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  e a substitui pela forma equivalente  $ad = bc$ , o que reduz as proporções a simples equações do primeiro grau. Laplace acrescenta ainda que a concepção de razão é um elemento unificador importante aos sistemas de números, porque relaciona, sobretudo, “*fração, divisão, frações de frações e frações de decimais*” (NEYRET, 1995, p. 73, tradução nossa).

As primeiras obras didáticas escritas no Brasil para as escolas, cursos preparatórios e, posteriormente, liceus e colégios, segundo Valente (2002), começam a surgir por volta de 1830. Em 1837, com a intenção de servir de modelo de escolarização secundária no país, é criado o Imperial Colégio de D. Pedro II. Nele a matemática figura em todas as oito séries e a obra *Elementos de Geometria* de Lacroix, traduzida para o português, é adotada, porque era referência no ensino dos liceus franceses. Em 1838, o capitão de fragata Francisco de Paula Leal oferece ao Colégio Pedro II exemplares de seu tratado para o estudo de Aritmética chamado *Elementos de Aritmética, para uso da mocidade brasileira nas escolas de primeiras letras* que segue exatamente o texto de Bézout.

O autor comenta que os primeiros autores de livros didáticos brasileiros orientam-se em Bézout e Lacroix, porque foram mestres da Academia da Marinha e Academia Militar, onde esses autores eram adotados. Essas obras brasileiras foram reeditadas até meados do século XIX quando os compêndios de matemática foram atualizados, com base no que estava sendo produzido nas escolas francesas da época.

Em 1845, no Rio de Janeiro, Cristiano Benedito Ottoni publica *Juízo Crítico sobre o Compêndio de Geometria Adoptado pela Academia da Marinha do Rio de Janeiro* em que, de acordo com Valente (2002), analisa obras francesas, como um matemático, entendendo, por exemplo, os textos de Bourdon e Vincent – professores de matemática – como textos científicos e não didáticos.

Em 1817, Bourdon escreveu *Éléments d'Algèbre e Éléments d'Arithmétique*, que foram reimpressos mais de vinte vezes até o final do século XIX. Na edição de 1897, Bourdon, ainda na introdução, cita que:

O sinal da divisão, que consiste em dois pontos: que se coloca entre o dividendo e o divisor, ou ainda, em uma barra  $\frac{\quad}{\quad}$ , acima e abaixo do qual se coloca respectivamente o dividendo e o divisor. Assim,  $24 : 6$  ou  $\frac{24}{6}$  se enuncia 24 dividido por 6, ou o quociente de 24 por 6.  $\frac{a}{b}$  ou  $a : b$  se enuncia  $a$  dividido por  $b$ . Se diz ainda  $a$  sobre  $b$ . A notação  $\frac{a}{b}$  é a mais utilizada. (BOURDON, 1897, p. 2)

Podemos notar que Bourdon, efetivamente, associa a operação de divisão ao número fracionário independente de qualquer contexto. Esta associação permanece e pode ser encontrada ainda no livro de Álgebra Elementar de 1938 publicado pela editora FTD onde se encontra a respeito do sinal de divisão, que:

O sinal  $\div$  (dividido por) indica uma divisão;  $a \div b$  significa que é preciso dividir  $a$  por  $b$ . Muitas vezes, indica-se a divisão por meio de uma fração; então, o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor; assim,  $\frac{a}{b}$  (lêr  $a$  sobre  $b$ ) ou  $a/b$  ou  $a \div b$ , indicam o quociente de  $a$  por  $b$ . (VALENTE, 2002, p. 190)

De acordo com Valente, em 1929, Euclides Roxo publica o Curso de Mathematica Elementar tratando das frações da seguinte maneira: “Quando a unidade suposta é dividida em um certo número de partes iguais e se tomam uma ou mais dessas partes, o resultado assim obtido chama-se fração” apresentando como exemplo inicial: “Seja AB um segmento que representa a unidade de comprimento dividida em 20 partes iguais, de modo que cada parte é um-vigésimo da unidade” (Valente, 2004, p. 118-119).

Conforme Valente, as explicações de Euclides Roxo, com a ajuda de imagens geométricas, tiveram a intenção de facilitar o entendimento de seus leitores. Percebemos que Euclides Roxo mobiliza a concepção parte-todo e a associa à de medida, quando emprega o termo unidade no lugar de um inteiro qualquer e reforça tal associação, quanto usa a representação geométrica de um segmento, como exemplo.

Não sabemos quando o ensino criou ou decidiu mobilizar a concepção parte-todo na introdução dos fracionários, apoiado na representação de superfícies, abandonando sua origem e adotando como técnica a dupla contagem para resolver as tarefas que pedem a mobilização de tal concepção.

Segundo Vizcarra e Sallán (2005), a origem do significado parte-todo teria que ser situada na prática educativa e colocada entre os recursos didáticos criados por necessidades do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Os autores detectaram a presença do significado parte-todo nos textos escolares espanhóis no início do século XX, para abreviar os períodos de instrução, pois esse significado permite uma introdução rápida da representação simbólica da fração, com altos níveis de êxito a curto prazo.

No livro de Matemática para a primeira série do curso ginásial, escrito por Osvaldo Sangiorgi, identificamos esse novo enfoque, em que apresenta os números fracionários com base no que chama noção intuitiva de fração, utilizando a figura de um chocolate dividido em três partes iguais acompanhada da seguinte afirmação: “A primeira ideia de fração nos é dada quando dividimos um objeto

(que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e consideramos uma ou algumas dessas partes”. A seguir, define: “Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais” (SANGIORGI, 1960, p. 117).

A definição apresentada privilegia a concepção parte-todo para os fracionários, com base na imagem de um chocolate, que até hoje é uma constante para a introdução de fracionários, com a técnica da dupla contagem das partes para a identificação da parte considerada do inteiro.

No mesmo livro, quando o autor trata de quocientes aproximados, afirma que: “pode-se sempre, ampliando o estudo das divisões, quer de números inteiros, quer de números decimais, determinar o quociente da divisão com uma aproximação desejada” (SANGIORGI, 1960, p. 163).

Apresenta ainda o exemplo da aproximação da divisão de 73 por 14 como sendo  $5 < \frac{73}{14} < 6$ , pois 5 é o quociente por falta e 6 o quociente por excesso. A seguir, trata da divisão de 730 por 14 aproximando por  $52 < \frac{730}{14} < 53$  para, então, concluir que  $5,2 < \frac{73}{14} < 5,3$ . O exemplo conclui apresentando a regra prática para a divisão baseada na contagem de casas decimais e eliminação de vírgula.

Embora tenha apresentado os números fracionários mobilizando a concepção parte-todo, associa agora o termo “quociente” à representação fracionária e decimal, institucionalizando a representação fracionária, como representação da operação de divisão.

## 2.5 Nossas considerações

Os resultados de pesquisas anteriores evidenciam problemas provocados pelo ensino que enfatiza tarefas que associam a concepção parte-todo mobilizando representações de figuras planas, que são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes.

Com base nessa constatação, decidimos elaborar uma Organização Matemática que considerasse as demais concepções de números fracionários, além de relações entre essas concepções. Identificamos, também, em um estudo epistemológico, as tarefas que estão na gênese do ensino dos números fracionários, procurando as concepções associadas e possíveis relações entre elas. Estes estudos foram usados como suporte para a formação dos professores do Ensino Fundamental engajados em nosso projeto de pesquisa, nesta fase, que tratou do ensino e aprendizagem de fracionários na quinta série.

Nossos estudos mostraram que na Antiguidade a necessidade de medições de terras pelos administradores do estado fez emergir os números fracionários e, conseqüentemente, a exigência de registros e de cálculos com os resultados das medições.

Surge, assim, a figura do escriba e a demanda de uma escola para formar escribas que impõe a elaboração de praxeologias didáticas com tarefas de diversos tipos e técnicas que as resolvam com o intuito de ensinar os conhecimentos necessários para se formar um escriba.

Com o crescente desenvolvimento das sociedades e novas formas de organização, os estados passaram a ter necessidade de preparar jovens aos cursos de Engenharia e para as Academias Militar e da Marinha, fazendo com que alguns tratados fossem editados e utilizados durante muito tempo para esses fins.

Posteriormente, as mudanças sociais ocorridas dão um novo lugar à criança e levam ao surgimento de um novo tipo de escola, especialmente para elas, as escolas de primeiras letras, que em determinado momento instituíram o ensino de Matemática nessas escolas.

No entanto, as referências para cumprir tal exigência baseiam-se nas publicações já existentes, os tratados matemáticos, que salvo algumas pequenas mudanças mantêm sua essência. No estudo, que realizamos, percebemos que os tipos de tarefas utilizados no ensino de fracionários sofreram poucas alterações, enquanto houve um avanço, não antes visto, no discurso tecnológico-teórico, promovido sobretudo pelo desenvolvimento da Álgebra.

As discussões a respeito do ensino e da aprendizagem passaram pela reforma da Matemática Moderna e culminaram com o surgimento da Didática da Matemática nos anos 70 do século XX, que se justificam, pelo menos, pela constatação de que não é possível ensinar da mesma forma crianças que entram na escola para uma educação geral e “crianças” que entravam na escola para ingressar em uma carreira militar.

A necessidade primordial da escola de primeiras letras seria, então sua adequação aos novos níveis de escolaridade, a seus objetivos e ao aluno que nela está presente. Vivemos, hoje, um momento semelhante, por motivos diferentes, um deles, evitar a evasão escolar.

O ensino de fracionários, em sua gênese, apresenta, tanto a concepção de operador quanto a concepção parte-todo associada à resolução de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida, quociente e razão. A concepção parte-todo com vida própria no ensino de fracionários, desvinculando-se da submissão a outras concepções, é orientação recente do ensino, em termos históricos, sendo mobilizadas em tipos de tarefas que não aparecem nos primórdios da construção do campo dos números fracionários. Provavelmente, porque as necessidades práticas do ensino anteriormente realizado não eram pertinentes ao ensino das crianças.

A inserção no contexto escolar do ensino de fracionários baseado na concepção parte-todo e apoiado na contagem, parece-nos um movimento no sentido de

auxiliar a criança no aprendizado dos novos números, utilizando seus conhecimentos dos números naturais.

No entanto, não se levou em conta consequências, como, a discretização do contínuo e o domínio de validade restrito que esse enfoque propicia. Da mesma forma não podemos dizer que antes o ensino fosse mais significativo, porque a presença de tarefas cuja resolução conduz a respostas que não fazem sentido na realidade em que a tarefa apresenta-se vem desde a Antiguidade.

Vimos que a história do desenvolvimento do ensino e do estudo dos números fracionários tem um marco importante no século XVI com a possibilidade da mudança de registro da escrita fracionária à escrita decimal e todo o desenvolvimento posterior das estruturas algébricas com operações e propriedades bem definidas.

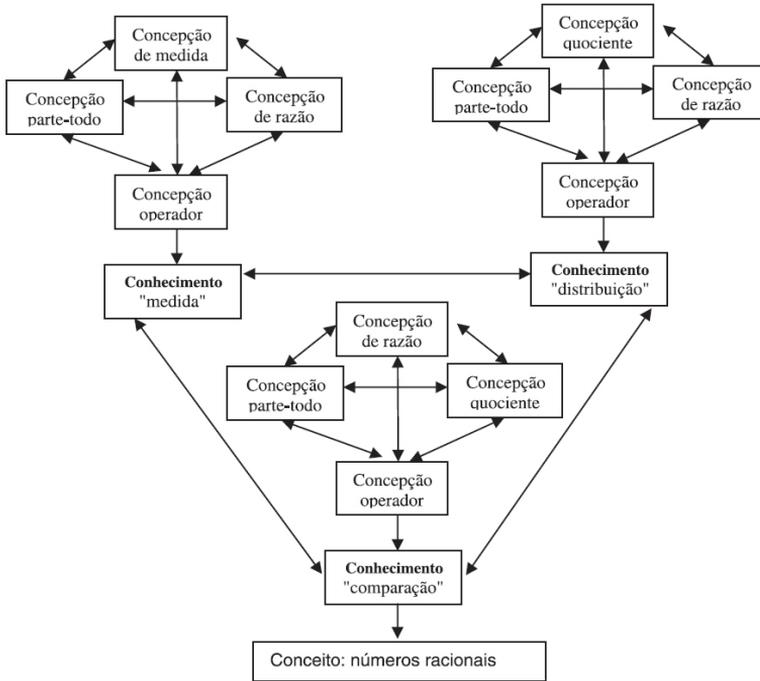
Estes desenvolvimentos teóricos acabam por afastar o ensino de fracionários de situações que pudessem lhes dar algum sentido ou mostrar sua razão de ser para privilegiar definições, como vimos no estudo anterior de terminologia e significados, do tipo: “*fração é divisão*” ou “*fração é o quociente de dois números*” ou “*razão é divisão*”, entre tantas outras.

Se nosso interesse é fazer com que as crianças construam o conceito de número racional, então, podemos entender que precisamos levá-las a construir os conhecimentos necessários para conceituar esse objeto matemático. Assim, entendemos que o estudo da gênese dos números fracionários mostra, como pode ser visto no esquema da Figura 7, que tipos de tarefas que associam a concepção de medida e que se associam diretamente ou mobilizam em suas técnicas as concepções parte-todo, razão e operador permitem a construção do conhecimento de medida relacionado aos números fracionários.

Da mesma forma, os tipos de tarefa que associam a concepção de quociente e de razão permitem construir os conhecimentos de comparação e de distribuição relacionados a esses números. Os conhecimentos de medida, comparação e distribuição permitem a percepção da razão de ser dos fracionários que relacionados facilitarão a construção do conceito de número racional pretendido.

No entanto, como nosso objetivo é trabalhar com a quinta série não podemos esquecer que os alunos dessa série possuem conhecimentos anteriores de números fracionários que, provavelmente, foram desenvolvidos baseados somente na concepção parte-todo.

Por isso, trataremos dessa concepção em nossa Organização Matemática e, também, da concepção de operador, visto que esta auxilia na conceituação dos fracionários como números.



**Figura 7** – Esquema da conceitualização de números racionais.

Falamos de conceituar números racionais por entender que a conceitualização de números fracionários concretizar-se-á no ensino médio com a relação do conceito de número racional já construído com outros conhecimentos como o de frações algébricas, números complexos, polinômios, etc. que permitirão formar o campo conceitual<sup>13</sup> do sujeito para números fracionários.

De acordo, com Artigue (1990), uma análise histórica e ou matemática auxilia na definição do conjunto de problemas significativos e operatórios na construção de processos didáticos. Nesse sentido, apresentaremos, a seguir, uma Organização Matemática que considera os estudos feitos anteriormente, além das concepções de fracionários e alguns resultados de pesquisa que utilizaremos como referência para a formação dos professores.

### 3 Uma organização matemática para a formação

Entendemos ser necessário, como preparatório para a formação de professores pretendida, ainda o estudo de uma Organização Matemática para os números

13 De acordo com Vergnaud (1989,1990, p. 62, tradução nossa) “um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.”

fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental, visto que pretendemos utilizar o estudo epistemológico na escolha dos tipos de tarefas e alguns resultados de pesquisa sobre o assunto.

Entenderemos esta organização, como uma produção de uma *instituição* universitária e nela visamos descrever tipos de tarefas que associam as diversas concepções de números fracionários, bem como as que solicitam relações entre tais concepções, verificando as técnicas que podem ser manipuladas na resolução de cada um desses tipos de tarefa.

Para isso, apoiamos-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e na noção de concepção de Artigue (1990), além de adotarmos, neste trabalho, o termo objeto matemático, de acordo com a definição de Chevallard (1991, p. 8) como:

algo que emerge de um sistema de práticas nas quais são manipulados objetos materiais que se destacam em diferentes registros semióticos: registro oral, palavras ou expressões pronunciadas; registro gestual; domínio da inscrição, o que se escreve ou desenha (grafismos, formulismos, cálculos, etc.) quer dizer, registro escrito. (apud GODINO e BATANERO, 1994, p. 332, tradução nossa)

Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da *Organização Matemática Local* (OML) que integram uma *Organização Matemática Regional* (OMR).

Para os autores citados, ainda que os processos de construção (ou reconstrução escolar) de OML podem ser muito diferentes, a análise conjunta da dinâmica de seu processo de estudo e de sua estrutura permitem determinar o grau de completitude da mesma, que dependerá do cumprimento das seguintes condições:

– *uma OML deve responder a questões que não podem ser respondidas por nenhuma Organização Matemática Pontual (OMP), que constitui sua razão de ser.*

Por exemplo, o tipo de tarefa: *identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada* constitui uma OMP. Quando várias OMP agrupam-se pelo fato de ter uma tecnologia que justifica as técnicas mobilizadas para resolver suas tarefas, diremos que temos uma OML.

Assim, para que se construa uma OML justificada pela concepção parte-todo seria necessário considerar nas tarefas, do tipo citado acima, figuras que representem grandezas discretas ou contínuas que permitam abordar técnicas

diferentes, além de outros tipos de tarefas que tenham suas técnicas justificadas pela concepção parte-todo para fracionários.

- *O processo de reconstrução deve ter momentos exploratórios que permitam comparar variações das técnicas que aparecem ao abordar as diferentes tarefas.*

Durante a reconstrução, o tratamento das diversas figuras permitirá questões a respeito da técnica que propicia, por exemplo, a percepção da limitação da dupla contagem das partes e o desenvolvimento de outras técnicas.

- *A exploração de uma OML deve incidir em um verdadeiro trabalho da técnica, provocando seu desenvolvimento progressivo.*
- *Na reconstrução de uma OML, devem aparecer novas questões matemáticas relativas às diferentes técnicas que irão surgindo (questionamento tecnológico).*

Considerando o tipo de tarefa “*identificar o fracionário que corresponde a uma figura apresentada*”, a apresentação de figuras de superfícies totalmente divididas em partes congruentes permite a compreensão da técnica da dupla contagem das partes; no entanto, há necessidade de fugir desse modelo de figura para que se perceba a limitação dessa técnica e a construção de outras técnicas possíveis. O trabalho com figuras de diversos tipos permitirá o desenvolvimento progressivo da técnica que, por sua vez, provoca questionamentos tecnológicos.

- *No processo de reconstrução de uma OML, é necessário institucionalizar os componentes explícitos da organização, não isolados, mas, no conjunto da organização.*

A institucionalização da OML que se justifica pela concepção parte-todo deve explicitar a importância das figuras na construção de técnicas diferentes e, conseqüentemente, do discurso tecnológico-teórico.

- *É preciso avaliar a qualidade dos componentes da OML construída. Esta avaliação mostrará a necessidade de articulá-la com outras OML para constituir uma OMR.*

Neste trabalho, construiremos OM Locais justificadas pelas diferentes concepções de números fracionários que não representarão uma OMR, porque não construímos OML que institucionalizasse o conjunto dos números racionais.

Nosso interesse reside na construção de OM Locais que colaborem na construção de significados às diversas concepções de números fracionários, tanto para os professores envolvidos como para alunos de quinta série.

Os autores concluem que o cumprimento de tais condições caracterizará uma OML relativamente completa e apresentam sete indicadores do grau de completude de uma OML: 1) integração dos tipos de tarefas, 2) diferentes técnicas e critérios para escolher, 3) independência dos *ostensivos* que integram as técnicas, 4) existência de tarefas e técnicas reversíveis, 5) interpretação do resultado de aplicar as técnicas, 6) existência de tarefas matemáticas abertas, 7) incidência dos elementos tecnológicos sobre a prática. Esta construção progressiva dos tipos de tarefa que se estudam, é também uma condição necessária para poder colocar e abordar em uma OML questões problemáticas cada vez mais abertas.

Por outro lado, Bosch e Gascón (2001, p. 5) postulam que a modelação de uma praxeologia didática espontânea do professor que considere a Organização Didática da instituição (como sistema a modelar) será mais pertinente, eficaz e fecunda do que tentar modelá-la sem sua relação com a praxeologia da instituição. “*Só mediante esta ampliação do sistema ‘empírico’ a modelar estaremos em condições de [...] nos situarmos no que Michele Artigue chama de ‘abordagem sistêmica global do didático’*”.

Assim, justificamos a elaboração de nossa Organização Matemática para a formação dos professores que entenderemos por diversas praxeologias locais, centradas nas concepções de fracionários, aqui entendidas por tecnologias que justificarão as técnicas consideradas que se baseiam na teoria dos números racionais. Nesta OM, não trataremos diretamente as operações com fracionários nem da institucionalização dos números racionais, visto que nosso foco encontra-se nas concepções de fracionários e suas relações.

A noção de concepção, por sua vez, de acordo com Artigue (1990), auxilia o estudioso da Didática por suas funções de: evidenciar a pluralidade de pontos de vista para um mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os tratamentos que lhes são associados, evidenciar sua adaptação à resolução de problemas, diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos.

Segundo a autora, evidenciar a pluralidade de pontos de vista possíveis para um mesmo objeto matemático, auxilia a negar a “ilusão de transparência” da comunicação didática, além de mostrar que diferentes concepções são mais adaptadas a distintas classes de problemas. Classifica assim, as concepções em dois tipos: a matemática que se relaciona ao conteúdo propriamente dito e as desenvolvidas pelos sujeitos culturalmente ou em processo de aprendizagem.

Assim, a concepção, além de ser um objeto associado ao saber e aos diferentes problemas, em cuja resolução intervém, “*irá se constituir em um instrumento*

*tanto para a análise do saber e a elaboração de situações didáticas quanto para a análise dos comportamentos do aluno” Artigue (1990, p. 270, tradução nossa).*

Baseados na TAD e na noção de concepção que acabamos de expor, apoiaremos nossa Organização Matemática sobre três pontos que consideramos fundamentais: as concepções de números fracionários associadas aos tipos de tarefas ou que podem ser mobilizadas na realização das tarefas, a abordagem de grandezas contínuas e discretas nessas tarefas, e as representações que serão manipuladas nas técnicas utilizadas no cumprimento dessas tarefas.

Nosso interesse pelas concepções de números fracionários, segundo a classificação de Behr e outros (1992), pode ser justificado por Post, Behr e Lesh quando afirmam que:

Por várias razões os conceitos de números racionais estão entre os mais importantes conceitos que a criança experienciará durante seus anos de pré-secundário. [...] Sob uma perspectiva psicológica a compreensão de número racional proporciona um solo rico no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuar seu desenvolvimento intelectual. De um ponto de vista matemático, a compreensão de número racional é a fundação sobre a qual as operações algébricas básicas apoiar-se-ão mais tarde. (POST, BEHR, LESH, 1982, p. 1, tradução nossa)

Quanto às grandezas, adotaremos, a definição de grandeza dada por Menezes:

Grandeza matemática é tudo quanto for possível de ser medido, direta ou indiretamente, por meio de outra grandeza da mesma espécie, e de valor conhecido considerada como padrão ou unidade que se toma para comparação. A medida de uma grandeza é denominada valor da grandeza ou quantidade. (MENEZES, 1959, p. 3)

Entendemos essas quantidades, como resultados de atos de contagem ou de medições, dependendo do que estamos quantificando: grandezas discretas ou contínuas. Acreditamos ser necessário levar para o ensino de números fracionários tais distinções, pois concordamos com Mello e Souza, que já em sua época, alertava para as questões do contínuo e do discreto quando dizia: *“Uma das grandes missões dos matemáticos de hoje é harmonizar o contínuo e o discreto, eliminar para esses conceitos toda a obscuridade e incorporá-los numa matemática de maior amplitude”* (MELLO e SOUZA, 1945, p. 280).

Por outro lado, são as representações, que darão vida ao objeto matemático. De acordo com Pluvillage (1998), utilizamos, normalmente: o registro da língua

natural, o registro algébrico, o registro figural-geométrico e o registro funcional-gráfico, enfatizando a necessidade de diferenciar o objeto matemático dos objetos físicos.

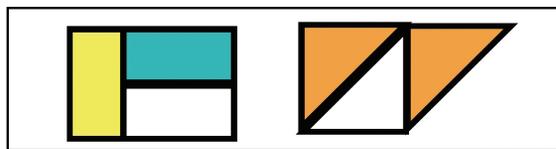
Conforme o autor, um objeto físico, como um pato, por exemplo, caracteriza-se pelo fato de que todo pato encontrado representa perfeitamente o objeto “pato”, enquanto um objeto cultural como, por exemplo, um quadrado, resulta de uma abordagem que seleciona algumas características e elimina outras, porque nenhum objeto real representa perfeitamente um quadrado.

Ampliando a discussão a respeito de representação, Bosch e Chevillard (1999), entendem que a conceituação, na atividade matemática, tende, geralmente, a reforçar as ferramentas matemáticas utilizadas, quando considera que os objetos sensíveis como discursos, escritas e grafismos centralizam não os próprios objetos, mas o que eles “representam” ou “significam”, isto é, seu sentido.

Dois tipos de objetos são, então, definidos pelos autores: os *ostensivos* como sendo aqueles perceptíveis aos sentidos humanos e que podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos; e os objetos *não ostensivos* como aqueles que, por si só, não podem ser vistos, ditos, entendidos ou percebidos porque para isso dependem da manipulação dos *ostensivos*.

Para os autores citados, na realização de uma atividade matemática, um complexo de objetos *ostensivos* são usados, em diversos registros, para permitir que um saber matemático e os conhecimentos por ele construídos materializem-se.

Supondo que, nas séries iniciais, o número fracionário é representado por um par de números naturais escritos na forma  $\frac{a}{b}$ , tomando, como exemplo, o *não ostensivo*: número dois terços (aqui representado em nossa língua natural, pode ter no sistema de escrita dos números fracionários outras representações como  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{6}{9}$ , ..., no sistema de escrita dos números decimais a representação será 0,6666..., no sistema figural, podemos ter, entre tantas outras, as figuras apresentadas na Figura 8.



**Figura 8** – Representações figurais de dois terços.

Além disso, o número dois terços pode representar situações que associam concepções diferentes e solicitar a manipulação de *ostensivos* em diversos registros de representação como, por exemplo:

- A relação existente entre partes que estão pintadas e o total de partes “iguais” em que a figura de um retângulo, por exemplo, foi dividida.



Duas das três partes em que o retângulo foi dividido, pode ser representado por  $\frac{2}{3}$ .

- Quanto custam dois terços de um queijo que inteiro custa R\$ 3,60?
- Se em uma classe tem quinze meninas e dez meninos, podemos dizer que: “dois terços da classe são de meninos”.

Nosso objeto de estudo, números fracionários, só existe com base nas representações que manipulamos para exprimi-los, a linguagem natural, falada ou escrita, é uma delas. No entanto, é necessário estabelecer uma convenção para a leitura da escrita fracionária: para os denominadores maiores que 10, e não potências de 10, devemos acrescentar a palavra “avo” ao número que determina a quantidade de partes em que a unidade foi dividida, o denominador.

Conforme o dicionário etimológico (Cunha, 1986), o termo foi deduzido da terminação da palavra latina oitavo, popularmente, interpretada como composta de oito + avo e começou a ser usado em nossa língua no século XX.

Para Alphonse (1995), quando a fração adquire o status de número, algumas características do sistema de escrita  $a/b$  devem ser consideradas: a) a representação não é única, por exemplo,  $\frac{6}{4}$  e  $\frac{9}{6}$ , designam o mesmo número racional; b) A posição do traço de fração, em relação à linha de escrita, determina uma prioridade operatória e preserva a designação da escrita na forma de fração, por exemplo,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  são escritas de números fracionários diferentes; c) Por causa da densidade dos números fracionários em relação aos reais, essa escrita possui um poder gerador que permite sempre intercalar um número fracionário entre dois fracionários dados que, por sua vez, leva a existência de uma infinidade desses números em um intervalo limitado; d) Podemos obter, um ou mais, processos de encadeamento, sem simplificação, que determinem uma convergência, por exemplo:  $\frac{22}{7}, \frac{221}{71}, \frac{2211}{711}, \dots$  e  $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \dots$ ;

e) A introdução de uma escrita limitada ou ilimitada permite a introdução do signo operatório em desenvolvimentos de frações contínuas que permite a designação de números fracionários do tipo  $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$  que representa  $\sqrt{2}$ <sup>(14)</sup>.

A seguir, apresentaremos, a Organização Matemática que servirá de referência para a formação dos professores e para elaboração da Organização Didática para o ensino de alunos da quinta série, não pretendendo, neste estudo, esgotar as possibilidades de tipos de tarefas ou técnicas associadas.

Com certeza, variações das tarefas apresentadas serão possíveis e, conseqüentemente, técnicas mais ou menos complexas poderão ser mobilizadas. Assim, trataremos de tarefas e técnicas que acreditamos ser fundamentais para a conceituação dos fracionários nesta série, pois essa conceituação vai além

14 Estas expressões são facilmente obtidas. Suponhamos que  $x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 1 \Rightarrow x(x + 2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2 + x}$ , como  $x = \sqrt{2} - 1$  temos:  $x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$

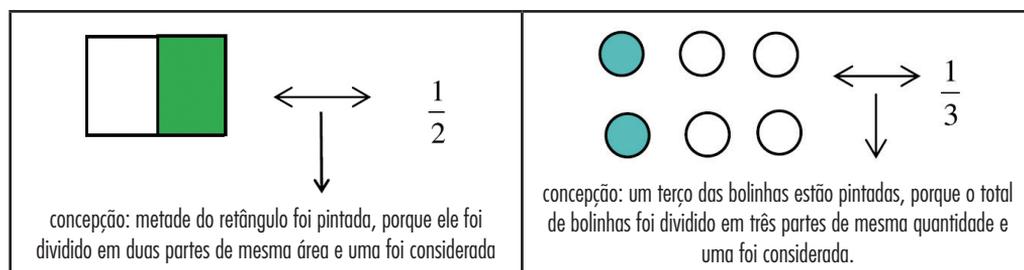
do Ensino Fundamental, exigindo organizações matemáticas com maior grau de complexidade.

### 3.1 A concepção parte-todo

Iniciamos por esta concepção porque, geralmente, as primeiras tarefas utilizadas no ensino de números fracionários sugerem a mobilização dessa concepção e, também, porque estão presentes na maioria das discussões a respeito de outras concepções.

A concepção parte-todo emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais em quantidades de objetos. Usualmente, são manipulados dois tipos de objetos *ostensivos*: o registro da escrita simbólica  $a/b$ , associado ao registro figural em que regiões ou conjunto de figuras, representando elementos discretos, aparecem divididos em partes “iguais”.

O sujeito para mobilizar a concepção parte-todo deve relacionar um, ou mais, registros escritos; uma, ou mais, figuras divididas de certa maneira e vice-versa, ou ainda, criar relações pertinentes como, por exemplo, as apresentadas na Figura 9.



**Figura 9** – Representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo.

O sujeito deve entender, genericamente, que o todo recebe também o nome de inteiro e que a escrita  $\frac{a}{b}$  descreve uma partição, em que o número  $b$  indica a quantidade de partes “iguais” em que o inteiro foi dividido.

Na realidade, é a partição do inteiro que permitirá nomear cada uma das partes em meios, terços, quartos, etc., sendo por isso chamado de denominador. O número  $a$ , por sua vez, representa a quantidade de partes que está sendo considerada do inteiro, sendo por isso, chamado numerador. Como o inteiro foi dividido em  $b$  partes, total de partições, a quantidade representada por  $a$ , não pode exceder o número  $b$ , o que obriga o número fracionário  $\frac{a}{b}$  a ser no máximo igual a um.

A esse respeito, Adjiage e Pluinage (2000) afirmam que a expressão “ $\frac{4}{3}$  de torta” é sempre incômoda e que juntar uma segunda torta não muda grande coisa, pois se falará sempre em  $\frac{4}{3}$  de uma torta, no singular.

Um dos tipos de tarefas que faz a concepção parte-todo ser mobilizada solicita, frequentemente, a quantificação ou identificação de parte de um inteiro, em figuras que representem grandezas contínuas ou discretas. A técnica empregada para cumprir esse tipo de tarefa é a dupla contagem das partes que, como já vimos, tem suas limitações.

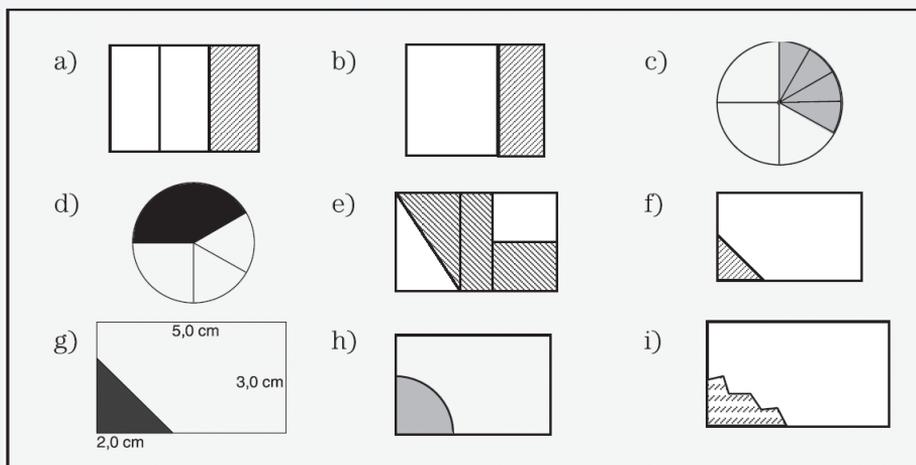
Nessas tarefas dois conhecimentos são indispensáveis: a natureza do inteiro e como ele pode ser dividido, e o que será considerado como parte desse inteiro. Disso dependerá a construção e ou escolha da técnica adequada para a percepção, inclusive, dos limites da dupla contagem das partes.

Para melhor compreensão desses pontos, a seguir, serão analisados alguns tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo, bem como possíveis técnicas de resolução.

As tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo envolvendo grandezas contínuas, geralmente, solicitam a manipulação de representações desse tipo de grandeza em figuras. Trataremos aqui somente de comprimentos e superfícies, por serem as mais utilizadas, pois a essência da técnica permanecerá no tratamento de outras grandezas, podendo apenas se tornar mais complexa.

### 1º tipo – Identificar o número fracionário que corresponde a uma figura apresentada.

Tarefa 1: *Que parte da figura está pintada?*



Nas tarefas desse tipo, é necessário apresentar figuras diferentes cuja manipulação permitirá construir técnicas distintas. A tarefa (1-a) apresenta uma figura usual que associa a técnica da dupla contagem das partes, porque basta contar o total de partes em que o inteiro foi dividido e as partes que estão pintadas e relacionar esses resultados ao fracionário  $\frac{1}{3}$ , pois, a figura foi apresentada totalmente dividida em partes congruentes.

Na tarefa (1-b), a técnica consiste em supor que a figura “esconde” um dos traços de divisão e, após medir a base do retângulo, para confirmar tal suposição, identificar três partes de mesma medida, igualmente, o fracionário  $\frac{1}{3}$ .

Na tarefa (1-c), embora todos os traços estejam explícitos, a técnica associada consiste em perceber que, pelo fato de a figura não estar dividida em partes de mesma área, é necessário identificar a equivalência da parte pintada com a não pintada para identificar o nome das partes pintadas, no caso doze avos, e como quatro delas estão pintadas, associar a fração  $\frac{4}{12}$ , que representa, também, o fracionário  $\frac{1}{3}$ , sem necessariamente ter de dividir toda a figura em partes congruentes para confirmar a dupla contagem.

Na tarefa (1-d) a técnica associada torna-se mais complexa porque as partes pintadas são quartos e sextos e, neste caso, é necessário perceber a equivalência entre as partes que estão pintadas, subdividindo-as ou não, e perceber que a parte pintada pode ser dividida em doze avos e associar  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{3}{12}$ , e  $\frac{1}{6}$  a  $\frac{2}{12}$ , concluindo que a parte pintada da figura corresponde ao número  $\frac{5}{12}$ , sem precisar dividir toda a figura. A esta técnica, poderia ser associada a adição de fracionários:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ .

Na tarefa (1-e), como a forma das partes é diferente, é preciso perceber que o triângulo e o retângulo pintados têm áreas equivalentes ao retângulo central. Para isso, basta comparar as medidas de cada segmento que compõe o lado maior do retângulo e constatar que os dois segmentos maiores medem, cada um, o dobro do segmento menor. Esta ação permitirá entender que a figura está dividida em cinco partes iguais, em medida de área, com três delas pintadas e associar, então, a essa figura o número fracionário  $\frac{3}{5}$ .

Na tarefa (1-f), a técnica exige a reconfiguração<sup>15</sup> da figura apresentada com base na percepção de que os lados do retângulo medem, respectivamente, duas e três vezes a medida do cateto do triângulo. A partir daí, mentalmente ou, agindo diretamente sobre a figura, colocando os traços que faltam, perceber que o retângulo pode ser dividido inteiramente em partes congruentes ao triângulo

---

15 A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas, que consiste em uma divisão de uma figura em subfiguras, em sua comparação e em sua reorganização eventual em uma figura de um contorno global diferente (Duval, 1995, p. 185, tradução nossa).

apresentado e, então, utilizando a contagem associar o número fracionário  $1/12$  a parte pintada da figura.

Para o cumprimento da tarefa (1-g), uma das técnicas associadas é semelhante à aplicada na tarefa anterior, pois o cateto do triângulo não cabe um número inteiro de vezes nos lados do retângulo. Embora a reconfiguração, a partir de uma malha de 1 cm de lado permita a contagem e a associação do fracionário  $4/30$  ou  $2/15$  (dois, quinze avos).

Uma outra técnica seria calcular a medida da área do triângulo e a do retângulo, para relacioná-las com base na mobilização da concepção de razão, obtendo diretamente o fracionário  $2/15$  (dois em quinze).

Esta tarefa solicita, inicialmente, a mobilização da concepção parte-todo, mas como a dupla contagem das partes ou a reconfiguração em partes congruentes a que está pintada, não são suficientes para resolver o problema, é necessário pensar em outro tipo de reconfiguração ou associar a concepção de razão entre a medida da área do triângulo e do retângulo apresentadas na figura.

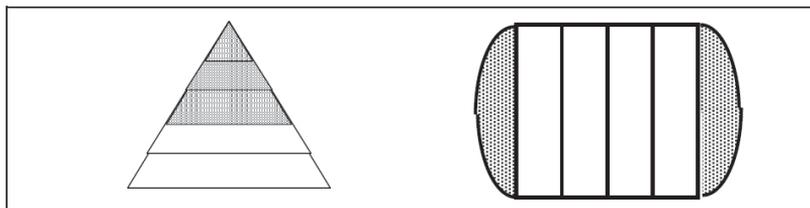
A tarefa (1-h) não poderá ser resolvida nem pela dupla contagem das partes, nem por reconfiguração. Neste caso, é necessário associar a concepção parte-todo à concepção de razão com técnicas para o cálculo de áreas para desenvolver a técnica adequada.

Na figura da tarefa (1-i), percebe-se que uma fração do retângulo está pintada, mas as técnicas anteriores não são suficientes. É necessário escolher uma unidade de medida de área para quadricular o retângulo e, então, determinar a fração aproximada que representará a parte pintada do retângulo pela dupla contagem das partes. Aliás, a técnica aqui utilizada pode significar um retorno, ao estudo de áreas, com base na utilização de malhas quadriculadas.

### 3.1.1 Dificuldades

A ênfase dada, pelo ensino, às tarefas em contextos contínuos, em que a concepção parte-todo é associada e a única técnica utilizada é a dupla contagem das partes pode constituir um obstáculo didático para o sujeito construir outras técnicas.

Em situações dos tipos (1-b) a (1-g), é comum procurar dividir a figura em partes congruentes para garantir a possibilidade da dupla contagem que se torna impossível nas situações (1-h) e (1-i). Como consequência, ainda, pode acontecer a produção de erros, algumas vezes, grotescos como afirmar que não é possível representar a parte pintada dessas figuras por um fracionário ou, simplesmente, aplicar a dupla contagem das partes em figuras que não estão divididas em partes “iguais”, em relação à forma ou à área, como no caso da Figura 10, em que se relacionam os números  $3/5$  e  $2/6$ , respectivamente.

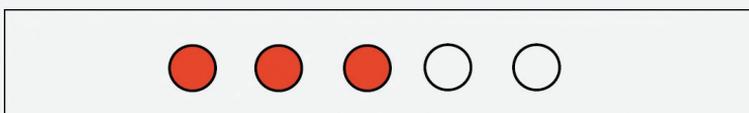


**Figura 10** – Dificuldades na concepção parte-todo, caso contínuo.

Entendemos que, se o ensino enfatiza esse tipo de tarefa, apresentando figuras que permitem somente o desenvolvimento da técnica da dupla contagem das partes, não dará a chance de os alunos construírem outras técnicas e, conseqüentemente, terão suas ações limitadas na resolução desse tipo de tarefa.

Além disso, pautado no ponto de vista parte-todo, não farão sentido as frações maiores que um, no caso de  $8/5$ , por exemplo: como entender que posso considerar oito partes, se o inteiro foi dividido em cinco? Se para tratar dessa questão acrescentarmos outro inteiro, a criança poderá pensar que passou a ter dez partes e não mais cinco. Um outro ponto a ser considerado, é entender o fracionário como quociente com base no modelo parte-todo: como entender  $2 \div 3$ , por exemplo, a partir de  $\frac{2}{3}$ , se este significa que um inteiro foi dividido em três partes e dessas consideramos duas?

Tarefa 2: *Que parte das bolinhas são vermelhas?*



As tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo associada a grandezas discretas, normalmente, são tratadas nas séries iniciais como “*fração de um número*” solicitando a manipulação de representações de coleções de objetos idênticos do dia-a-dia (como se isso fosse possível), como flores, animais, brinquedos, etc. Aqui, utilizaremos bolinhas representadas por círculos em três tipos de tarefa:

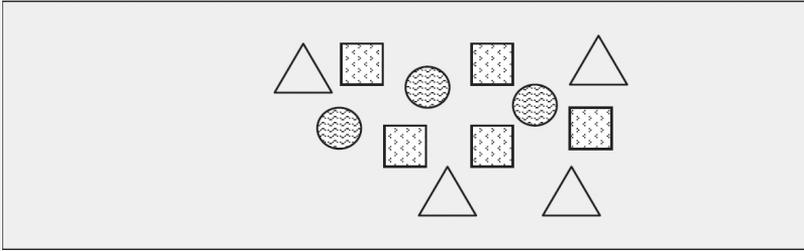
O conjunto de bolinhas, da tarefa 2, representa um inteiro de cinco bolinhas, em que três são vermelhas, o que permite relacionar a quantidade de bolinhas vermelhas com a quantidade total, isto é, a relação entre parte e todo, poderá ser descrita pelo número fracionário  $3/5$ .

Esta ação permite a compreensão de que cada bolinha compreende uma parte do conjunto e que três delas são vermelhas. A técnica empregada é a dupla

contagem: contar o total de bolinhas que, na representação simbólica, ocupará o lugar do denominador e contar as que são vermelhas que ocuparão o lugar do numerador na representação simbólica.

Como uma variação da tarefa anterior, pode-se apresentar uma figura, como a da tarefa 3 que mobiliza a concepção parte-todo em grandezas discretas, é possível solicitar, por exemplo, a parte do conjunto representada pelos quadrados.

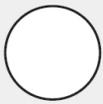
Tarefa 3: *determinar a fração das figuras que corresponde aos quadrados.*



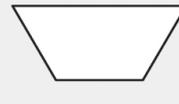
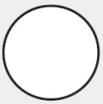
Neste caso, embora as figuras não representem objetos “idênticos”, nada impede que possamos falar “ $5/12$  das figuras desse conjunto que são quadrados”, pois perde sentido a “igualdade das partes”.

**2º tipo:** identificar um número fracionário dado em uma figura.

Tarefa 1: *Pinte metade da figura.*



Tarefa 2: *Pinte um terço da figura.*



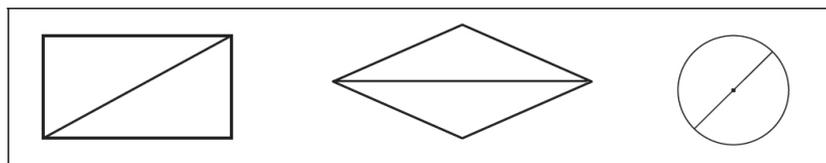
Tarefas deste tipo, que não são constantes no ensino, exigem do sujeito um planejamento para decidir onde colocar os traços de divisão da figura em partes e quais delas serão pintadas.

A concepção parte-todo mobilizada, neste tipo de tarefas, permite a manipulação do fracionário da linguagem natural para o registro  $a/b$  e o desenvolvimento

da técnica que consiste em dividir a figura apresentada em “ $b$ ” partes, de mesma área, para pintar “ $a$ ” dessas partes. Esta técnica pode variar, em complexidade, dependendo das variáveis didáticas escolhidas: o número fracionário e as figuras apresentadas.

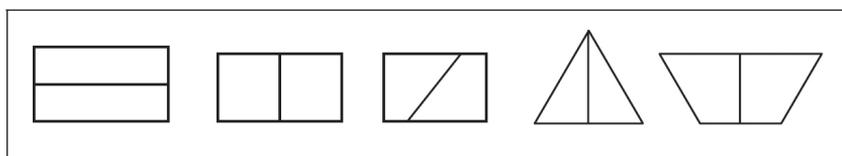
A divisão de uma figura em duas partes de mesma área pode ser obtida, da maneira direta, por um único traço:

- sem associar a concepção de medida: por exemplo, no caso em que a diagonal da figura ou o centro do círculo permite a divisão pretendida.



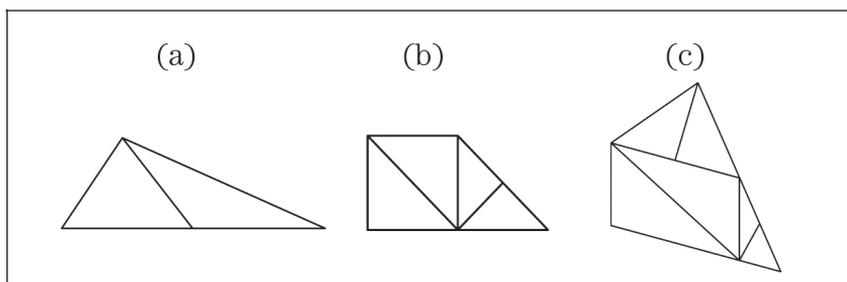
**Figura 11** – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (c).

- associando a concepção de medida: em que a técnica consiste em medir, por exemplo, um dos lados de um triângulo ou os dois lados opostos de um retângulo ou de um trapézio, para determinar a localização do traço de divisão.



**Figura 12** – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (d).

Dependendo da figura escolhida, a divisão, em duas partes de mesma área, não resulta em partes de mesma forma e pode solicitar conhecimentos de propriedades da Geometria ou mais do que um traço para a solução.



**Figura 13** – Concepção parte-todo, caso contínuo, 2º tipo (e).

Nesse sentido, no exemplo da Figura 13-a, precisamos perceber que o segmento, que une o ponto médio de um dos lados do triângulo com o vértice oposto, produz dois triângulos de mesma área, porque os dois têm mesma base e altura. Nas tarefas que envolvem as Figuras 13-b e 13-c a decomposição da figura permitirá encontrar duas partes de mesma área.

No primeiro caso, basta dividir o trapézio em um quadrado e um triângulo e, então, tomar a metade do quadrado e a metade do triângulo, da mesma maneira que na figura anterior. No segundo caso, é necessário buscar uma reconfiguração conveniente, neste caso, foi construído um paralelogramo, baseando-se nos dois lados da figura dada e depois a divisão dos triângulos restantes. Outras decomposições poderiam ser feitas. Neste tipo de tarefas, a escolha dos números fracionários e das figuras que serão apresentadas, permitirá a construção pelo sujeito, da maior variedade de técnicas possíveis.

Por outro lado, a divisão de superfícies em figuras desenhadas permite que se mantenha o inteiro, dado inicialmente que não aconteceria se fosse solicitada a divisão física (recorte) desse inteiro, pois poderia levar o aluno a considerar as partes obtidas como novos inteiros e a utilizar a contagem para obter a resposta solicitada, discretizando o contínuo.

Para o círculo, em particular, as partes de mesmo nome, sempre terão a mesma forma; no entanto, para a divisão é necessário, além da determinação do centro do círculo, conhecimentos de técnicas próprias do desenho geométrico ou dobradura para dividir em dois, quatro ou um número múltiplo de quatro de partes.

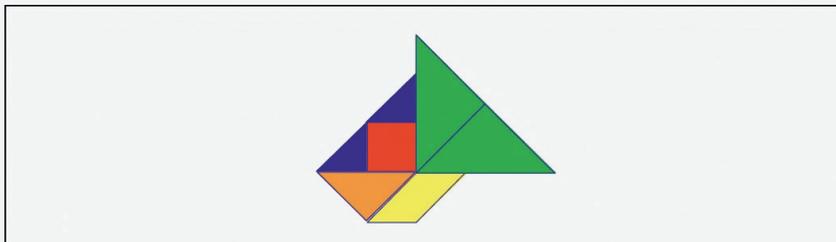
Para cumprir a tarefa 3, a técnica, consiste em contar a quantidade de bolinhas da figura, dividindo essa quantidade em quatro partes “iguais” (mesma quantidade de bolinhas), selecionar três dessas partes para serem pintadas, compreendendo por essa ação que nove bolinhas foram pintadas, porque estas equivalem a  $\frac{3}{4}$  das doze bolinhas apresentadas.

*Tarefa 3: Pintar três quartos das bolinhas da figura.*

Esta técnica encaminha diretamente a mobilização da concepção de operador, que veremos em detalhes mais à frente, na percepção de que  $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ , que, por sua vez, poderia ser associada à seguinte operação:  $\frac{3}{4} \times 12 = (12 \div 4) \times 3$ . O mesmo podendo acontecer na percepção de que  $\frac{1}{4} \times 12 = 3$ . Ao associar a técnica da dupla contagem à concepção de operador, podemos identificar a fração da quantidade de elementos de um conjunto, como uma ação de desagrupamento conveniente do inteiro apresentado.

### 3º tipo – Compor inteiros e determinar fracionários

Tarefa 1: *Construa uma figura com peças do tangran e determine a fração dessa figura, que corresponde ao quadrado vermelho.*

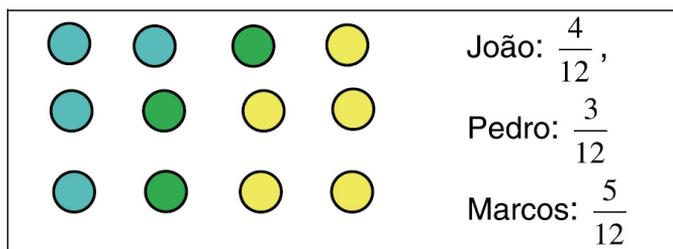


Neste tipo de tarefa, é possível solicitar a criação de figuras com base nas peças de um tangran, como a apresentada na tarefa 1, e a associação do número que representa a parte pintada de vermelho, por exemplo, pois a partir do quadrado-base do tangran é possível perceber a relação entre as áreas das peças, considerando o triângulo menor como peça de referência.

No caso dessa figura, a técnica consiste em relacionar a peça azul, de menor área, com as outras peças e concluir que a figura pode ser decomposta em 16 partes, equivalentes em área. A partir daí, pode-se associar à parte vermelha da figura, por exemplo, o número  $\frac{2}{16}$  ou  $\frac{1}{8}$ .

Tarefa 2: *Pedro tem 3 bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas. Que parte das bolinhas cada um tem?*

A situação pode ser ilustrada pelo desenho de doze círculos, conforme a Figura 14, com a parte que corresponde a cada criança pintada de uma cor, associando às bolinhas de cada cor, um número fracionário para representá-las.



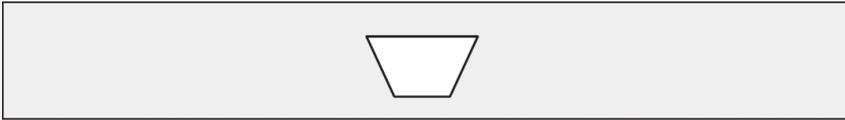
**Figura 14** – Concepção parte-todo, caso discreto, 3º tipo (a).

Neste caso, o conjunto de bolinhas apresentado no final, não possui partes de mesma quantidade, porque estas não resultam da divisão do inteiro, mas, sim,

do agrupamento de três partes, com quantidades diferentes de bolinhas para a constituição de um inteiro. Cada bolinha representará, então,  $1/12$  do total e a técnica consiste em agrupar as partes, identificar pela contagem a quantidade total de bolinhas e a parte relativa a cada criança para, então, representar o número fracionário.

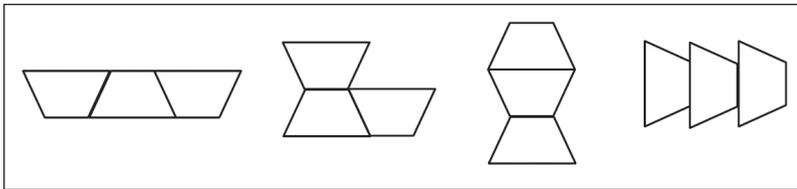
#### 4° tipo – Reconstituição do inteiro

Tarefa 1: *Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.*



Este tipo de tarefa permitirá a mobilização da reversibilidade da dupla contagem das partes, isto é, se para obter um terço de uma figura, fizemos a divisão em três partes de mesma área, então, quando apenas uma dessas partes for apresentada será necessário percorrer o caminho de volta, obter uma figura com três partes congruentes à figura dada para alcançar o inteiro.

Além de auxiliar na percepção visual das figuras e seu tratamento com base na composição, aprofunda a compreensão da concepção parte-todo. É necessário considerar que a resposta para essa tarefa não seja única, entre elas, poderemos obter as representações apresentadas na Figura 15:



**Figura 15** – Reconstituição do inteiro, parte-todo no contínuo.

Tarefa 2: *Se  $2/7$  das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?*

Da mesma forma, que na situação que envolve grandezas contínuas, aqui é necessário mobilizar a reversibilidade para resolver a tarefa. Neste caso, se dois grupos de  $1/7$  equivalem a 12 bolinhas, um desses grupos equivale a 6 bolinhas e, portanto, o inteiro é formado por 42 bolinhas que correspondem a sete grupos

de seis:  $7 \times 6$ , diferente da situação similar com grandezas contínuas, aqui a solução é única.

### 3.1.2 Dificuldades

Nos três tipos de tarefas que pedem a mobilização da concepção parte-todo associada a grandezas discretas, a técnica da dupla contagem cumprem-nas satisfatoriamente. No entanto, algumas dificuldades podem se apresentar quando, em tarefas do segundo tipo, se depara com a impossibilidade da divisão igualitária, isto é, se quisermos identificar  $\frac{1}{4}$  de um conjunto que tem 15 bolinhas.

Isso significa que a tarefa não admite nenhuma técnica, pois não se pode dividir uma bolinha em quatro partes, porque tal ação descaracterizaria o objeto. Esse tipo de tarefas só terá uma técnica associada, quando a quantidade de elementos do inteiro for um número múltiplo do denominador do número fracionário apresentado, caso contrário não apresenta solução.

Podemos concluir, assim, que os tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo, em contextos discretos ou contínuos, podem possibilitar a construção de diferentes técnicas, desde que sejam feitas escolhas convenientes das variáveis apresentadas na tarefa.

Na realidade, o desenvolvimento das técnicas dependerá da manipulação de *ostensivos* adequados e da maior variedade possível, pois uma simples alteração em uma figura, poderá desencadear uma nova manipulação e, conseqüentemente, uma nova técnica.

## 3.2 A concepção de medida

As tarefas envolvendo medições de comprimentos são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, como resultados de medições, e da necessidade de “novos números” para a quantificação adequada de comprimentos.

As tarefas de medição naturalmente associam a concepção de medida, solicitando a manipulação de um padrão, chamado de unidade de medição que, por sua vez, dependerá diretamente da grandeza em jogo. Entendemos que medimos grandezas contínuas e contamos grandezas discretas, embora possamos citar a moeda instituída por uma sociedade, como uma unidade que mede suas transações de compra e venda, como um caso de grandeza discreta. O poder de compra do cidadão de um certo país é medido por uma unidade monetária que pode ser comparada com a de outros países: um dólar compra mais que um real, por exemplo. No entanto, embora as unidades monetárias sejam divididas em cem partes: os centavos.

No Brasil, encontramos o preço da gasolina determinado por milésimos do real que, na realidade, não existe como moeda. É um caso em que o dado de realidade não faz sentido.

Neste trabalho, optamos por tratar apenas de tarefas que envolvem medidas de comprimento, por entender que a construção de técnicas apropriadas para tais tarefas garantirá o desenvolvimento de técnicas para o tratamento de outros tipos de grandezas, mesmo que mais complexas.

As tarefas associadas à concepção de medida de comprimento, geralmente, podem solicitar a manipulação de três tipos de objetos *ostensivos*: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário  $1/b$  que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em  $b$  partes para permitir a medição e o número fracionário  $a/b$  que representará o resultado da medição realizada.

A divisão da unidade escolhida, por sua vez, permitirá relacionar a concepção de medida a de parte-todo para possibilitar tal divisão. Em retas numeradas ou esquemas de medida, é necessário determinar o ponto de partida para a medição e o sentido em que a medição ocorrerá, podendo ser o zero ou um outro ponto qualquer.

O número fracionário  $a/b$  obtido permitirá a compreensão de que a subunidade  $1/b$  foi utilizada  $a$  vezes na medição efetuada. A utilização precoce da régua milimetrada para medições encaminha para a discretização do contínuo, porque exige como técnica somente a contagem de centímetros e milímetros escondendo suas origens como subunidades do metro. Alguns tipos de tarefas podem ser considerados.

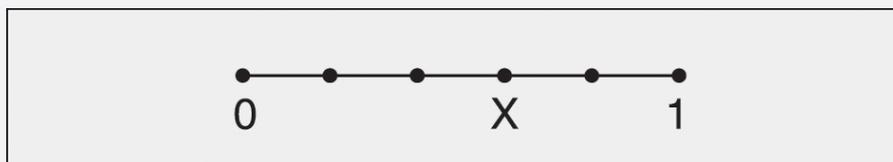
### **1º tipo** – Determinar medidas de comprimento de um objeto.

Este tipo de tarefa solicita medições de comprimentos e pode ser cumprida pela escolha de uma unidade de medição (tiras de papel, régua de polegada, régua milimetrada e outros instrumentos) para ser comparada com o comprimento que está sendo medido. Esta comparação permitirá a constatação da necessidade da divisão da unidade escolhida para possibilitar a quantificação do comprimento em jogo.

Nas primeiras tarefas deste tipo, o ideal é usar tiras de papel para facilitar a divisão da unidade. É relevante utilizar unidades de medida diferentes para o aluno perceber que a quantificação do comprimento depende da unidade escolhida, isto é, o número que representa a medida varia, de acordo com a unidade.

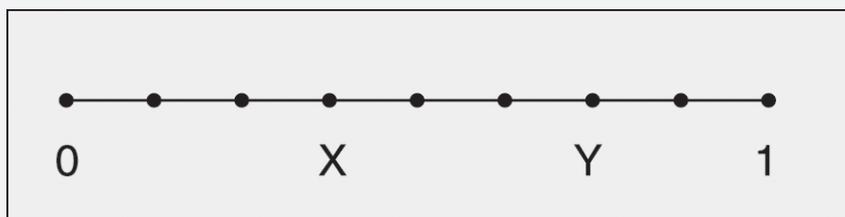
**2º tipo** – Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais.

Tarefa 1: *Qual a distância entre o X e o zero?*



Com o auxílio de um esquema de medida que apresenta a unidade dividida em partes iguais e o ponto que determina o comprimento a ser medido, a partir da origem. A tarefa poderá ser cumprida pela dupla contagem das partes, considerando que a unidade foi dividida em cinco partes de mesmo comprimento e que do ponto de origem até o ponto X existem três dessas partes, concluindo, assim, que a medida solicitada é  $\frac{3}{5}$  da unidade. A concepção de medida em tarefas desse tipo está diretamente associada à concepção parte-todo.

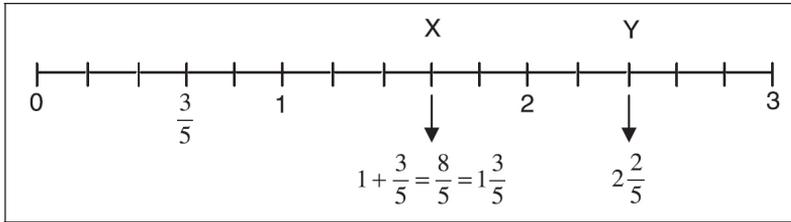
Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



Esta tarefa será cumprida também a partir da dupla contagem das partes. O sujeito deve perceber que a unidade foi dividida em oito partes congruentes e que entre o ponto X e o ponto Y existem três dessas partes, associando então a esse comprimento a medida  $\frac{3}{8}$ .

Nesses tipos de tarefas, a variação do objeto a ser medido ou do esquema apresentado permitirá ao sujeito mobilizar a concepção de medida de comprimento em tarefas mais complexas, como as que apresentam esquemas maiores que a unidade. Estas tarefas permitirão a manipulação de frações maiores que 1, tanto na forma mista como na imprópria, além de sua associação à soma de números fracionários, como podemos verificar na Figura 16.

No exemplo, da Figura 16, o sujeito perceberá que a distância de 0 a X pode ser representada por  $\frac{3}{5}$ , este é um número localizado entre o 1 e o 2 porque, diferente das tarefas anteriores, esse esquema permitirá uma ordenação dos fracionários que auxiliará, mais tarde, na conceituação do conjunto dos números racionais.



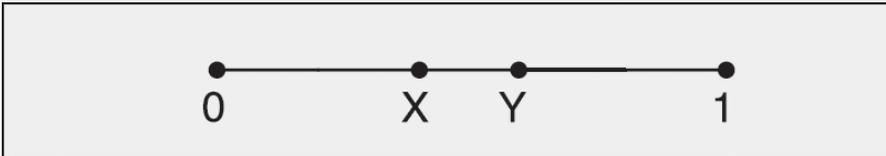
**Figura 16** – Concepção de medida, 3º tipo (b).

**3º tipo** – Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida.

Tarefa 1: *Qual a distância entre 0 e X?*



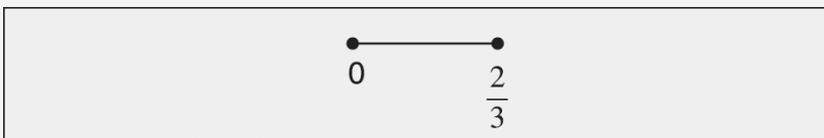
Tarefa 2: *Qual a distância entre X e Y?*



Nestes casos, é necessário dividir, convenientemente, o inteiro em partes de mesma medida que possibilitará utilizar a dupla contagem para encontrar a medida de 0 a X ou de X a Y.

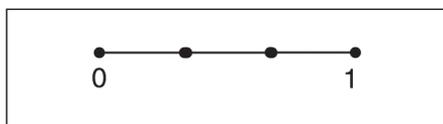
**4º tipo** – Reconstituição da unidade.

Tarefa: *Se o desenho abaixo representa  $\frac{2}{3}$  da unidade, qual é a unidade?*



Para cumprir esta tarefa, é necessário perceber que se esse segmento representa dois terços, então, a unidade original foi dividida em três partes de mesmo comprimento e, destas, duas foram consideradas, isto é, temos duas vezes um terço.

Logo, para recompor a unidade original é necessário dividir o segmento dado em duas partes de mesma medida para identificar  $\frac{1}{3}$  e elaborar uma nova figura com três dessas partes, conforme a Figura 17.



**Figura 17** – Concepção de medida, reconstituição da unidade.

Acreditamos que os tipos de tarefas que associam a concepção de medida constituem o ambiente ideal para tratar os números fracionários maiores que um, para introduzir a notação mista desses números e a adição de dois fracionários de mesmo denominador.

Permitem ainda a introdução da equivalência entre fracionários, baseada no reconhecimento de que a mesma parte pode receber nomes diferentes, em função de novas divisões da unidade ou a familiarização com tais conhecimentos se estes já foram trabalhados anteriormente.

### 3.3 A concepção de quociente

As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quociente para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuições de grandezas. O *ostensivo*  $a/b$  que representa o resultado de uma distribuição significa que  $a$  foi distribuído em  $b$  partes, ou seja,  $a$  foi dividido em um número  $b$  de partes iguais. Diferente dos tipos de tarefas que associam as concepções tratadas anteriormente, nestas o  $a$  pode ser menor, maior ou igual a  $b$  e podem representar objetos diferentes como, por exemplo, “crianças” e “chocolates”.

A operação de divisão consiste na técnica que, geralmente, cumpre essas tarefas, fazendo com que o ato de distribuir ou dividir,  $a$  em  $b$  partes iguais, associe ao fracionário  $a/b$  a operação  $a \div b$ . Em contextos discretos, a técnica é a divisão de naturais, não cabe a representação fracionária como resposta, mas a associação da concepção de operador. No caso de contextos contínuos, a técnica pede um plano de ação que pode tornar a divisão mais complexa dependendo da distribuição solicitada.

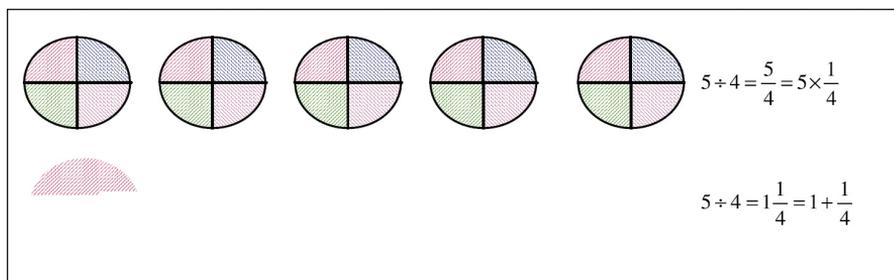
Em ambos os casos, a complexidade da técnica relaciona-se ao aspecto da divisão que será tratado: partitiva – quando são dados a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade e pede-se o valor de cada parte –, ou por cotas – quando são dados a quantidade de inteiros e o valor de cada parte e pede-se a quantidade de partes possíveis.

**1º tipo** – Distribuir igualmente  $x$  objetos em um número  $y$  de partes.

Tarefa 1: *Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas.*

Este problema refere-se à divisão de grandezas contínuas, em seu aspecto partitivo, cuja quantidade a ser distribuída, igualmente, é maior que o número de partes. Neste caso, identificamos, pelo menos, duas técnicas para cumprir a tarefa, ambas relacionadas à concepção parte-todo. Na primeira, o sujeito decide dividir cada pizza em quatro partes iguais, destinando a cada pessoa cinco dessas partes, concluindo que cada um recebe  $5/4$  de pizza.

No entanto, a divisão de todas as pizzas, em quatro partes, poderia levar o sujeito a considerar  $20 \div 4 = 5$ , discretizando o contínuo e permitindo a operação com naturais. Na segunda, decide distribuir uma pizza inteira para cada pessoa e dividir a última, em quatro partes iguais, concluindo que a cada pessoa corresponde  $1\frac{1}{4}$  de pizza. Os dois procedimentos podem ser representados pela Figura 18.



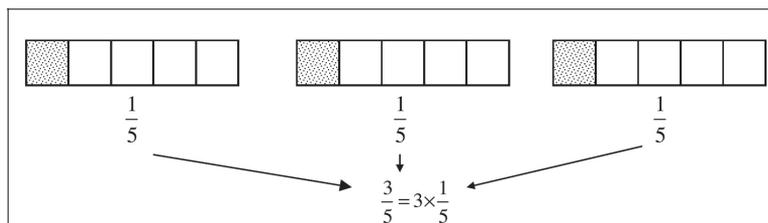
**Figura 18** – Concepção quociente, caso contínuo, 1º tipo (a).

Notamos que tal distribuição relaciona-se naturalmente à representação  $5 \div 4$  e esta, por sua vez, à representação  $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$  ou  $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ , possibilitando a compreensão de  $a \div b = \frac{a}{b}$ , cujo fracionário é um quociente.

Tarefa 2: *Quanto chocolate cada criança irá receber se distribuirmos igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças.*

Esta tarefa, tratando ainda de grandezas contínuas, apresenta a quantidade a ser distribuída igualmente menor que o número de partes. Assim, mantendo o aspecto partitivo da divisão, a técnica pede, neste caso, a divisão dos três chocolates em cinco partes iguais, em quantidade de chocolate, encaminhando a resposta de que cada criança receberia  $3/5$  de um chocolate ou três pedaços de  $1/5$  do chocolate. Uma maneira de representar tal procedimento pode ser o da Figura 19.

No caso, pode ocorrer também a fuga para os naturais, considerando que  $15 \div 5 = 3$ . É preciso notar a diferença entre, dividir um inteiro ou unidade em cinco partes iguais e, destas, considerar três partes (concepção parte-todo) da situação de dividir três inteiros em cinco partes iguais (concepção quociente), embora os dois casos possam ser representados por  $3/5$ , conforme a Figura 19.



**Figura 19** – Concepção quociente, caso contínuo, 1º tipo (b).

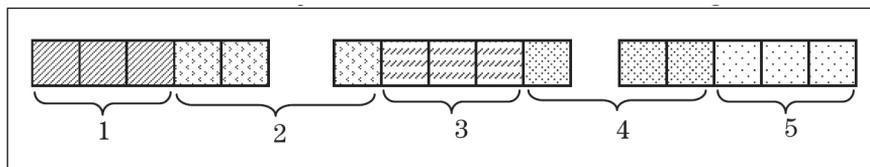
Tarefa 3: *Quantas bolinhas cada menino receberá se distribuirmos igualmente doze bolinhas entre três meninos.*

Este problema refere-se à divisão em seu aspecto partitivo, de grandezas discretas e é resolvido no campo dos naturais e, como tal, a escolha da quantidade a ser dividida pode levar à divisão com resto. No entanto, a representação  $12 \div 3 = 4$  pode ser relacionada à concepção de operador, permitindo a compreensão de que  $12 \div 3 = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ , porque um terço das doze bolinhas é igual a 4 que, por sua vez, relaciona a concepção parte-todo porque o inteiro (doze bolinhas) foi dividido em três grupos de quatro bolinhas cada um.

### 2º tipo – Distribuir igualmente x objetos de acordo com uma cota dada.

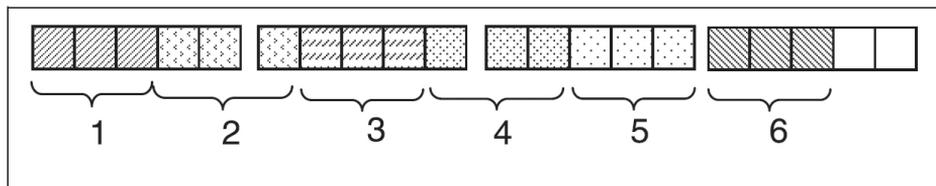
Tarefa 1: *Quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos três chocolates, igualmente, de tal forma que cada uma receba 3/5?*

A técnica consiste em procurar quantas vezes  $3/5$  são necessárias para completar os três chocolates e perceber que, nessas condições, cinco crianças receberão chocolate. Esta ação pode ser representada pela Figura 20:



**Figura 20** – Concepção quociente, caso contínuo, 2º tipo (a).

A representação manipulada por essa técnica associa a divisão de um inteiro por um fracionário:  $3 \div \frac{3}{5} = 5$ , sem necessidade de explicitar técnicas operatórias para tal divisão. Variações dessa tarefa, pela escolha de cotas diferentes, encaminham a respostas imediatas em situações futuras.



**Figura 21** – Concepção quociente, caso contínuo, 2º tipo (b).

Já, a escolha da quantidade de inteiros a ser dividida pode tornar a técnica mais complexa. Por exemplo, se alterarmos a quantidade de chocolates para quatro, percebemos que a mesma técnica não permite concretizar a distribuição solicitada, pois seis crianças receberiam a cota determinada, mas sobriariam  $\frac{2}{5}$  de um chocolate, como podemos ver na Figura 21.

*Tarefa 2: Quantas bolinhas cada criança recebe se distribuirmos 105 bolinhas de tal forma que cada criança receba 15?*

Tratando de cotas de grandezas discretas, o problema pode ser resolvido no campo dos naturais e envolve a divisão em seu aspecto de cotas, pois a técnica consiste em dividir o número que representa a quantidade de bolinhas, pelo número de bolinhas que corresponde a cada cota, obtendo  $105 \div 15 = 7$ .

Como no tipo anterior, a relação com a concepção parte-todo conduz a compreensão de que o inteiro (105 bolinhas) foi dividido em 7 partes de 15 bolinhas cada uma que relacionada à concepção de operador permitirá perceber que  $\frac{1}{15} \times 105 = 7 = 105 \div 15$ .

### 3.4 A concepção de razão

As tarefas associadas à concepção de razão, para números fracionários, geralmente, não permitem associar a ideia de partição como nas anteriores, mas a ideia de comparação entre medidas de duas grandezas.

Nesse sentido, a representação  $\frac{a}{b}$  ou  $a : b$ , utilizada para esses casos, nem sempre se associa à concepção de quociente, seria entendida como um índice comparativo, sem necessariamente transmitir a ideia de número.

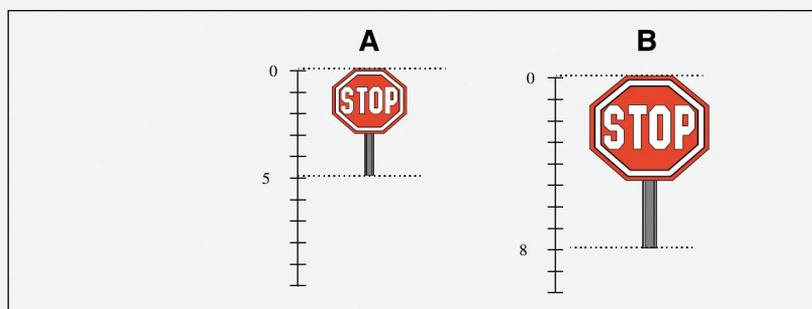
Assim, a representação fracionária  $\frac{2}{3}$ , por exemplo, associada à concepção de razão, não permitiria a leitura “dois terços” e, sim, “dois para três”. O entendimento da razão como “ $x$  para  $y$ ” encaminharia, naturalmente, para a equivalência de razões e para o raciocínio proporcional que, por sua vez, solicita uma representação:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

A proporcionalidade envolve diretamente a equivalência de números fracionários e caracteriza-se, como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Na descrição inicial da situação, uma constante é apresentada, implícita ou explicitamente, determinada por uma relação particular entre  $a$  e  $b$ , em que qualquer mudança em  $a$  provocará uma mudança previsível em  $b$ .

As tarefas que associam a concepção de razão podem comparar grandezas de mesma natureza ou não, em contextos contínuos e ou discretos, podendo ainda estar associadas a situações do tipo: todo-todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte-parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ou ainda, parte-todo.

### 1º tipo – Determinar uma razão.

Tarefa 1: *Determinar a razão de ampliação e de redução entre as figuras A e B.*

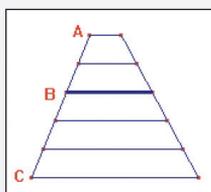


Esta tarefa refere-se a grandezas contínuas de mesma natureza em uma situação do tipo todo-todo, caracterizando situações de ampliação e redução de figuras. A técnica que a cumpre, consiste em perceber, com base na figura apresentada, que a medida da altura da placa A de 5 unidades e a B de 8 unidades, obtendo a razão de A para B é de “5 para 8”, caracterizando uma ampliação. Por outro lado, a razão de B para A é de “8 para 5”, caracterizando uma redução. Estas razões podem ser representadas por  $\frac{5}{8}$  ou  $5 : 8$  e  $\frac{8}{5}$  ou  $8 : 5$ , respectivamente.

Tarefa 2: *A miniatura de um objeto tem 12 cm de comprimento. Se na realidade esse objeto tem 60 cm de comprimento, qual foi a escala utilizada?*

A determinação da razão em tarefas desse tipo permite a definição da escala, como sendo a razão entre a medida de um comprimento em um desenho ou miniatura e a medida correspondente no objeto real.

Tarefa 3: *Determinar a razão da medida do segmento AB para a medida do segmento BC.*



A tarefa caracteriza uma situação parte-parte e a técnica utilizada consiste em verificar que o segmento AC está dividido em cinco partes de mesmo comprimento, o que permite estabelecer que  $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ . Esse tipo de tarefa é comum no estudo de semelhança de figuras e justifica-se pelo Teorema de Tales.

Tarefa 4: *Determinar a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas xícaras de açúcar para três de farinha.*

Tratando-se de grandezas contínuas de mesma natureza, caracterizando uma situação do tipo parte-parte, a comparação efetuada nesta tarefa não permite a mobilização da ideia de número fracionário “dois terços” nem da concepção de quociente, pois a divisão de 2 por 3 não faria sentido. No entanto, permite mobilizar o raciocínio proporcional para aumentar ou reduzir a receita do bolo.

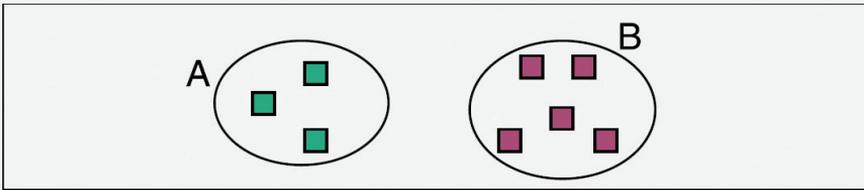
Tarefa 5: *Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco para 12 copos de água, qual a razão de suco para água?*

Caracterizando uma situação parte-parte com grandezas contínuas de mesma natureza, da mesma forma, a comparação solicitada nesta tarefa possibilitará a mobilização da ideia do número fracionário “um quarto”, como parte-todo, pois, poderemos dizer que “1/4 da jarra de refresco é de suco”. Permitirá, também, a mobilização do raciocínio proporcional se for necessário produzir mais refresco com a mesma concentração de suco.

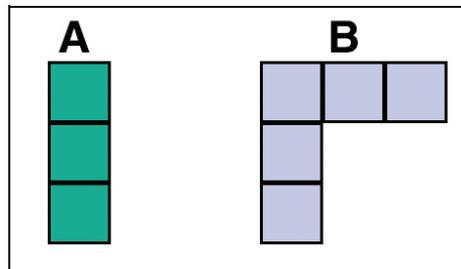
Tarefa 6: *Qual a velocidade de um carro que percorre 100 km em 2 horas?*

A tarefa caracteriza uma situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes e a comparação permite a definição de uma nova grandeza: a velocidade, como sendo a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrê-lo. A resolução desta tarefa mobiliza a ideia de número fracionário associado à concepção de quociente para obter o valor da velocidade, permitindo, inclusive, a mudança do registro da escrita fracionária para a escrita decimal.

Tarefa 7: *Determinar a razão entre a quantidade de elementos de A e a quantidade de elementos de B.*



Caracterizando uma situação do tipo todo-todo, com grandezas discretas de mesmo tipo, é necessário para determinar a razão solicitada, contar a quantidade de elementos de cada conjunto para relacioná-los, como uma razão e representá-la por  $\frac{3}{5}$  ou  $3 : 5$ . Esta razão será interpretada como se “*para cada grupo de três quadradinhos no conjunto A, corresponde um grupo de cinco quadradinhos no conjunto B*”. Variações desta tarefa podem solicitar a mobilização do raciocínio proporcional, alterando a quantidade de elementos de um dos conjuntos e solicitando a quantidade de elementos do outro conjunto, a partir da mesma razão.



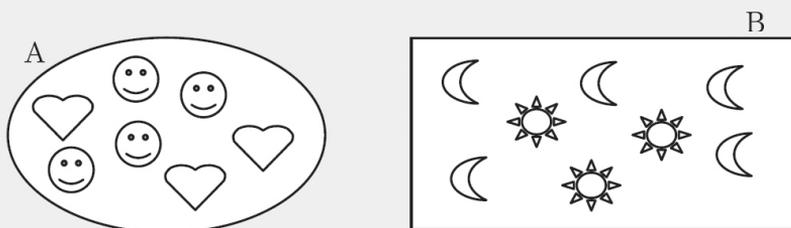
**Figura 22** – Concepção de razão, caso discreto (b).

A Figura 22 mostra uma variação da tarefa 7 que embora represente grandeza contínua, pode ter a razão determinada por meio da contagem, propiciando

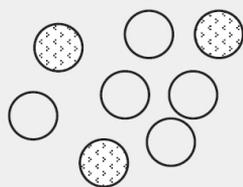
o mesmo entendimento das tarefas anteriores, visto que a contagem discretiza as representações contínuas da figura.

Uma outra variação poderia ser a comparação entre a quantidade de desenhos das Figuras A e B da tarefa 8.

Tarefa 8: *Determine a razão entre a quantidade de figuras de coração do conjunto A e a quantidade de figuras de lua do conjunto B.*



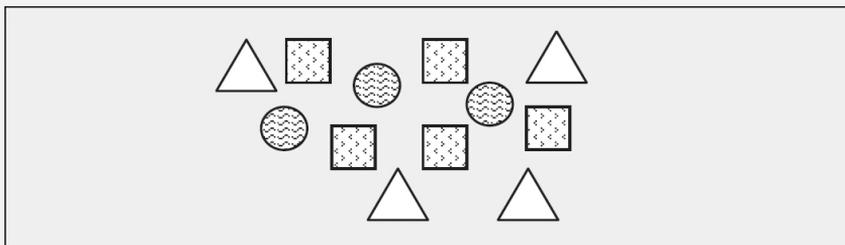
Tarefa 9: *Determine a razão entre a quantidade de bolinhas pintadas e a quantidade de bolinhas brancas da figura abaixo:*



Nas tarefas 8 e 9, a comparação é do tipo parte-parte, porque relaciona partes de dois conjuntos ou partes que compõem um único inteiro. Além disso, vemos que na primeira, os conjuntos são formados de elementos diferentes e na segunda de elementos do mesmo tipo. A técnica utilizada consiste em contar a quantidade de elementos envolvidos em cada uma das partes que serão comparadas e estabelecer a razão.

No caso das bolinhas, a razão  $\frac{3}{5}$  ou  $3 : 5$  deverá ser interpretada, como se “para cada grupo de três bolinhas pintadas existe, no conjunto, um grupo de cinco bolinhas brancas”. A mesma figura poderia ser empregada para solicitar a mobilização da concepção parte-todo pedindo a relação entre as bolinhas pintadas ou as bolinhas brancas com o total de bolinhas do conjunto.

Tarefa 10: *Determinar a razão entre a quantidade de triângulos e círculos do conjunto abaixo.*



Como uma variação da tarefa anterior, esta apresenta um conjunto de objetos diferentes, pedindo uma razão do tipo parte-parte que se resolve com base na mobilização de conhecimentos de geometria para a identificação de figuras, como: triângulos, quadrados e círculos para, então, proceder a contagem das figuras e determinar a razão  $\frac{4}{3}$ , entendendo que existe uma razão de “4 triângulos para 3 círculos”.

Tarefa 11: *Qual a razão entre a quantidade de meninos e meninas de uma classe que possui 15 meninos e 25 meninas?*

Esta tarefa é diferente da 3, por não se apoiar em figuras para representar a quantidade de elementos do conjunto, substituindo a contagem de elementos pela quantidade de elementos das partes tratadas explicitamente no problema.

Por outro lado, o enunciado da tarefa determina, implicitamente, uma ordem, pois o número que representa a quantidade de meninos deverá ser o numerador e o número que representa a quantidade de meninas o denominador.

Assim, a razão procurada será  $\frac{15}{25}$  e a utilização, a seguir, de técnicas de simplificação permitirá encontrar o fracionário irredutível  $\frac{3}{5}$  e compreender que “para cada três meninos da classe corresponde cinco meninas”. A escolha de outros dados numéricos para essa tarefa permitirá ainda mostrar a equivalência entre razões, considerando, por exemplo, 18 meninos e 30 meninas.

Tarefa 12: *Em uma bolsa existem três bolas pretas e duas brancas. Tirando aleatoriamente uma bola da bolsa, qual é a probabilidade de que seja preta?*

Tarefa 13: *Ao lançar um dado qual é a probabilidade de se obter um seis?*

Caracterizando uma situação, do tipo parte-todo, as tarefas 12 e 13 permitirão definir uma razão especial que recebe o nome de probabilidade pautada na dupla contagem e na mobilização da concepção parte-todo.

*Tarefa 14: Comparar a quantidade de ovos e a quantidade de farinha em uma receita de bolo.*

Neste caso, a tarefa solicita a comparação da quantidade de uma grandeza discreta (ovos), com a quantidade de uma grandeza contínua (farinha) que aparece, geralmente, nas receitas medida em xícaras ou gramas.

A comparação de grandezas de naturezas diferentes que a tarefa solicita encaminha à razão “2 para 3” significando que “a receita pede dois ovos para cada três xícaras de farinha” ou “2 para 300” se a receita utilizasse 300 gramas de farinha, por exemplo.

*Tarefa 15: Qual a densidade demográfica de uma região que tem 130 km<sup>2</sup> de medida de área e população de 378 300 habitantes?*

A determinação da razão nesta tarefa permitirá definir a *densidade demográfica* como sendo a razão entre a quantidade de habitantes de uma região e a medida da área dessa região.

*Tarefa 16: Se em uma classe com 25 alunos, 5 jogam vôlei, qual a porcentagem da classe que joga vôlei?*

Essa razão, considerada especial, recebe o nome de porcentagem e a solução da tarefa exige a determinação de uma equivalência entre duas razões: razão entre a quantidade de alunos que jogam vôlei e o total de alunos da classe e a razão 20/100, significando que para cada grupo de 100 alunos dessa classe 20 jogam vôlei.

Para Godino e Batanero (2002), a notação de porcentagem e o raciocínio de proporcionalidade, que se coloca em jogo quando um dos termos da proporção é 100, é usada em várias situações da vida diária. A expressão “x%” é uma maneira alternativa de exprimir o número fracionário “x/100” que uma vez fixado pode ser aplicado a diferentes números para obter séries de números proporcionais.

Os autores acrescentam que, embora se considere fácil a compreensão das porcentagens, dados experimentais mostram que sua utilização incorreta é

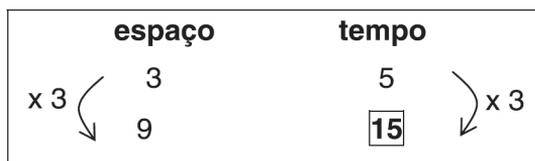
frequente, não só entre estudantes do secundário, mas também entre adultos. É comum encontrar nos meios de comunicação anúncios que revelam erros, confusões e distorções sobre o uso de porcentagens.

**2º tipo** – Determinar valor desconhecido.

*Tarefa 1: Se um carro percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos, quanto demorará para percorrer um trajeto de 9 km?*

Esta tarefa caracteriza-se por apresentar três dados e solicitar o quarto. Não pede necessariamente a mobilização da concepção de quociente, nem a determinação da razão, pois pode ser cumprida diretamente, baseada no raciocínio proporcional e na percepção de que para percorrer o triplo do espaço terá de gastar o triplo do tempo.

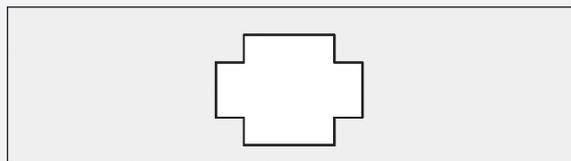
Esta técnica ficará mais clara pela representação do esquema, da Figura 23, que evita o tratamento algébrico, comum na utilização de tal técnica, quando recebe o nome de regra de três, podendo ser tratada antes de algum estudo da Álgebra.



**Figura 23** – Concepção de razão, caso contínuo, grandezas de naturezas diferentes.

Tratando de grandezas contínuas, a técnica para resolver a tarefa 2, consiste em dividir cada lado da figura apresentada em duas partes de mesma medida e considerar três dessas partes na figura a ser construída.

*Tarefa 2: Amplie a figura abaixo na razão de 2 : 3.*



A associação da equivalência à razão dada permitirá também a determinação do valor desconhecido com base em um esquema similar ao anterior. Nota-se que a concepção parte-todo será mobilizada na divisão dos lados da figura original.

Tarefa 3: *Em um mapa que foi utilizada a escala de 1 : 10 000 000 a distância entre Salvador e Maceió é de 5 cm. Qual a distância real entre essas cidades em quilômetros?*

Tarefa 4: *Um carro faz na estrada 8 km com 1 litro de álcool. Quantos litros de álcool são necessários para esse carro percorrer 100 km? Quantos quilômetros ele percorre com 45 litros de álcool?*

Tarefa 5: *Se uma receita de bolo pede 3 copos de açúcar para 10 copos de farinha, quanto de farinha seria necessário para fazer a receita com 15 copos de açúcar?*

As tarefas 3, 4 e 5 tratam de grandezas contínuas de mesma natureza e podem ser resolvidas pela técnica das situações anteriores, embora a razão da tarefa 5, se tratada como quociente não fará sentido.

Tarefa 6: *Na votação para o grêmio da escola, com 1.000 alunos votantes houve 240 votos para a chapa A. Se nessa mesma razão apenas 600 alunos tivessem votado, quantos teriam votado na chapa A?*

Tarefa 7: *Se em cada cinco alunos de uma escola gostam muito de educação física, quantos alunos gostam dessa atividade se na escola tem 1.200 alunos?*

Tarefa 8: *Se para fazer 10 camisas são gastos 25 metros de tecido, quantos metros são necessários para fazer 30 camisas?*

As tarefas 6 e 7 tratam de grandezas discretas e podem ser resolvidas pela técnica das situações anteriores e, também, o quociente resultante da razão não fará sentido. Embora possa ser resolvida como as anteriores, a tarefa 8, solicita a comparação de quantidades de grandezas discretas com de contínua, não permitindo também que se associe o quociente à razão.

### **3º tipo – Comparar razões.**

Tarefa: *Um carro A percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos. Um carro B percorre um trajeto de 4 km em 6 minutos. Qual carro tem maior velocidade?*

A tarefa envolvendo grandezas contínuas, de naturezas diferentes, pode mobilizar a técnica de determinar a razão para os dois carros,  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{4}{6}$ , respectivamente, e a posterior comparação desses dois números para determinar qual dos dois

carros tem maior velocidade. Essa comparação implica a determinação de razões equivalentes de mesmo denominador. Outras tarefas desse tipo podem ser apresentadas em outros contextos.

### 3.4.1 Dificuldades

Na elaboração dessas tarefas, as escolhas numéricas tornam as técnicas, mais ou menos complexas, aumentando ou não o grau de dificuldade para a construção da técnica apropriada. Além disso, nas situações que associam a concepção de operador existe uma dificuldade a ser contornada que diz respeito às operações. Há que se cuidar das técnicas que os alunos constroem porque, embora mobilizem corretamente os conhecimentos necessários para o cumprimento da tarefa, seus registros podem levar a erros futuros. Por exemplo, uma tarefa que pede a duplicação de uma mistura na razão  $\frac{a}{b}$  ou  $a : b$  pode ser representada por  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a+a}{b+b} = \frac{2a}{2b}$ .

Este procedimento acarretaria na tarefa da receita de bolo apresentada anteriormente, que o aluno respondesse corretamente: se quisermos dobrar a receita, a nova relação deverá ser de  $4/6$ , registrando a técnica utilizada por  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6}$  que não condiz com a aritmética fracionária que define a adição por  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ . Uma outra possibilidade de representação seria, pelo pensamento multiplicativo, apresentar a solução por  $2 \times \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$  ou, no caso de nosso exemplo,  $2 \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{4}{6}$  que também não está de acordo com a aritmética fracionária que define que  $p \times \frac{a}{b} = \frac{pa}{b}$ .

Neste caso, a simples representação de uma equivalência  $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b}$  pode ser substituída por uma representação operatória que se tornando uma possibilidade de técnica para resolver tarefas desse tipo, conduziria ao erro, quando aplicadas em tarefas que solicitam cálculos com números fracionários e não com razões representadas por fracionários. Assim, concluímos que se deve perceber se o aluno está desenvolvendo um algoritmo próprio para a adição de fracionários e para a multiplicação de um inteiro por fracionário de forma incorreta, fato este que poderia ser evitado pela adoção de uma representação própria para razões.

Para Kieren (1993), na construção dos números racionais como um campo que incorpora os inteiros, define-se um número racional como um par de inteiros  $\frac{a}{b}$  que satisfaz a equação  $bx = a$ . Isto é, números racionais são por definição quocientes. Sua existência relaciona-se à propriedade de corpo que garante a existência de um inverso multiplicativo  $\frac{1}{b}$  para cada inteiro  $b$  diferente de zero. Para o autor, os números racionais são quocientes que devem sua existência à ideia de frações unitárias  $\frac{1}{b}$  que, no entanto, agem como razões quando em igualdade ou equivalência.

Conforme o autor, para entender números racionais é necessário conhecer números que são simultaneamente quocientes e razões em suas diversas formas,

o que permite que este conhecimento se organize em diversos níveis e avance a partir de entendimentos intuitivos e formais.

De certa forma, como veremos, à frente o estudo histórico mostra que essas relações estão na gênese dos números fracionários.

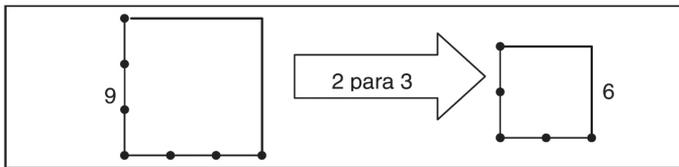
### 3.5 A concepção de operador

Nas tarefas que solicitam a mobilização da concepção de operador o fracionário  $\frac{a}{b}$  é manipulado como “algo que atua sobre uma quantidade” e a modifica produzindo uma nova quantidade. Essa ação pode ser entendida pela ação de operador fracionário que modifica um estado inicial e produz um estado final. Nessas tarefas, os fracionários  $\frac{a}{b}$  são manipulados efetivamente como números e facilitam a compreensão da operação de multiplicação entre fracionários.

#### 1º tipo – Transformar grandezas pela ação de um operador fracionário.

*Tarefa 1: Construir um quadrado cujo lado tenha  $\frac{2}{3}$  da medida do lado do quadrado dado.*

Esta tarefa apresenta o operador fracionário agindo sobre uma grandeza contínua. Se, por exemplo, o quadrado apresentado tiver lado medindo 9, a técnica que cumpre a tarefa é construída, baseada na percepção de que “o quadrado de lado medindo 9” deve ser transformado, pelo operador  $\frac{2}{3}$ , em um “novo quadrado de lado medindo  $\frac{2}{3}$  de 9”.

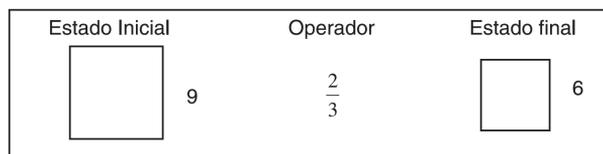


**Figura 24** – Concepção de operador, caso contínuo, redução de um quadrado.

Associando, na técnica, a concepção parte-todo, podemos dividir o lado do quadrado em três partes de mesma medida e considerar duas dessas partes para obter a medida 6 do lado do novo quadrado. Há duas possibilidades para construir o novo quadrado, desenhá-lo sobre o inicial agindo na medida de dois lados consecutivos ou construir um novo quadrado com base na medida encontrada, como podemos ver na Figura 24.

Esta técnica encaminha à percepção de uma ordem operatória que caracterizará a mobilização da concepção de operador, em que se realiza, primeiro, a divisão de 9 por 3 para então multiplicar o quociente resultante, 3, por 2, obtendo

a medida procurada: 6. A ação do operador fracionário sobre a figura pode ser relacionada a estados iniciais e finais, esquematizada como na Figura 25:



**Figura 25** – Estados da concepção de operador, caso contínuo.

Uma outra possibilidade de técnica é associar a concepção de razão entendendo que, para cada três unidades da figura inicial, correspondem duas unidades na figura final que partindo do pensamento proporcional e equivalência de razões remete à medida procurada, representada por:  $3:2 = 9:\boxed{6}$  ou  $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ . A utilização das duas técnicas faz com que se perceba que a figura final pode ser obtida, tanto pela ação do operador  $\frac{2}{3}$  como pela ação da razão  $\frac{3}{2}$ .

As tarefas que pedem a mobilização da concepção de operador envolvendo grandezas contínuas, devem construir o conhecimento de que o operador  $\frac{a}{b}$  provoca uma redução na medida do original, quando  $a < b$  ou amplia essa medida, quando  $a > b$ .

Além disso, por analogia ao conhecimento dos naturais, a multiplicação de fracionários pode ser abordada pois como expressões do tipo “o dobro de 5” pode ser representado por  $2 \times 5$ , então, a expressão “o dobro de  $1/5$ ” seria representada por  $2 \times \frac{1}{5}$ , com o auxílio de outras concepções, como parte/todo ou medida, pode ser entendida como  $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ .

### 3.5.1 Dificuldades

No ensino de Geometria, quando se trata de razão de semelhança é dada pelo operador e não propriamente pela razão. Em nosso exemplo, a ampliação feita pela razão  $\frac{5}{8}$  (para cada cinco da figura inicial consideramos oito na nova figura) terá como razão de semelhança o operador  $\frac{8}{5}$ , considerando que a nova figura tem oito quintos das medidas da figura de referência. O mesmo acontecendo para o caso da redução.

#### 2º tipo – Transformar grandezas pela ação de dois operadores fracionários.

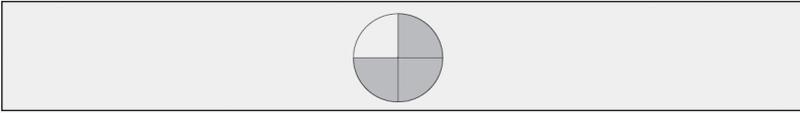
Tarefa 1: *Determine a metade de um quinto do segmento abaixo.*



Como a ação de um operador fracionário, sobre um inteiro ou unidade, confunde-se, como já vimos, com a concepção parte-todo de fracionários. A ação de mais do que um operador sobre um inteiro/unidade ou parte dele caracteriza melhor a ação de operadores e sua interpretação, essencialmente, numérica. Para resolver a tarefa 1 é necessário associar a concepção parte-todo à de medida, para dividir o segmento em cinco partes iguais.

A seguir, dividir uma dessas partes em dois, concluindo que a parte pintada corresponde a  $\frac{1}{10}$ . Essa ação para a resolução poderá ser então associada a operação de multiplicação e registrada por  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ .

Tarefa 3: *Pinte 1/6 da seção pintada do disco, que fração do disco você pintou?*



A técnica aqui associa a concepção parte-todo, na divisão da parte do disco que já está pintada, em seis partes e na percepção de que a parte que foi pintada corresponde a  $\frac{1}{8}$  do disco e, finalmente, associar a tal resultado a sentença  $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ .

Tarefa 4: *Se a capacidade de  $\frac{3}{5}$  de um recipiente é de 36 litros, qual a capacidade do recipiente?*

Referindo-se a grandezas contínuas, esta tarefa pode ser resolvida com base na percepção de como  $\frac{3}{5}$  do recipiente corresponde a 36 litros, então, a divisão de 36 por 5 dará o correspondente em litros, de  $\frac{1}{5}$  do recipiente, que multiplicado por 5 resultará na resposta solicitada.

Tarefa 5: *Quantos alunos correspondem a  $\frac{2}{3}$  de uma classe com 36 alunos?*

A tarefa 5 refere-se a grandezas discretas e pode ser cumprida por técnica similar a utilizada para o caso de grandezas contínuas, entendendo que o operador  $\frac{2}{3}$  deve atuar sobre a quantidade de alunos da classe, 36, para obter a quantidade que corresponde a  $\frac{2}{3}$  de 36, dividindo 36 por 3 e multiplicando o resultado por 2, pois, como já vimos, associando a concepção de razão para cada três do

estado inicial corresponderá a dois no estado final. A associação da concepção parte-todo permitirá, também, dividir a quantidade de alunos em três partes de mesma quantidade e considerar duas delas para obter a resposta procurada: 24 e a proporção:  $3 : 2 :: 36 : 24$  ou  $\frac{3}{2} = \frac{36}{24}$ .

A ação do operador  $2/3$  na tarefa 5 pode ser representada pelo esquema apresentado no Quadro 4.

**Quadro 4** – Concepção de operador, caso discreto.

Estado Inicial	Operador: $2/3$	Estado final
36 crianças	(dividir 36 por 3 e multiplicar o resultado por 2)	24 crianças

**3º tipo** – Determinar o operador que faz uma certa transformação.

*Tarefa: Tenho 1 copo de leite, mas minha receita pede 3. Por quanto devo reduzir os outros ingredientes da receita para poder usar 1 copo em vez de 3 de leite?*

Envolvendo grandezas contínuas, a tarefa solicita a mobilização da técnica que consiste em comparar as quantidades e perceber que, se temos um copo enquanto a receita pede três, temos apenas  $1/3$  (um terço) da quantidade de leite solicitada pela receita e, por conseguinte, os outros ingredientes terão de ser reduzidos pela ação do operador  $1/3$ . Este tipo de tarefa pode ser ampliado para outros contextos.

Independente do contexto, discreto ou contínuo, a escolha de diferentes operadores ou quantidades na elaboração das tarefas que pedem a mobilização da concepção de operador para fracionários, podemos utilizar quadros do tipo empregado na tarefa 5 para a percepção de dois tipos de equivalência.

**4º tipo** – Comparar operadores.

A tarefa pode consistir em deixar células do quadro, em branco, para serem preenchidas pelos alunos. O Quadro 5 encaminha a percepção da equivalência de operadores pela constatação de que há uma infinidade de operadores fracionários que produzem a mesma situação final, quando aplicados a uma mesma situação inicial.

**Quadro 5** – Equivalência de operadores.

Estado Inicial	Operador	Estado Final
12	$\frac{2}{3}$	8
12	$\frac{4}{6}$	8
12	$\frac{8}{12}$	8

**5º tipo** – Comparar estados iniciais e finais.

A tarefa do Quadro 6 encaminha a percepção da equivalência de estados quando se constata que o mesmo operador, atuando sobre estados iniciais diferentes, produz a mesma transformação, isto é, uma equivalência

de razões entre cada estado, inicial e final. O operador  $\frac{2}{3}$  age sobre os estados iniciais: 12, 15 e 24 produzindo os estados finais: 8, 10 e 16, respectivamente, que nos levam a constatar a equivalência:  $\frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ , como já vimos, é equivalente ao operador  $\frac{2}{3}$ .

**Quadro 6** – Equivalência de estados.

Estado Inicial	Operador	Estado final
12	$\frac{2}{3}$	8
15	$\frac{2}{3}$	10
24	$\frac{2}{3}$	16

**6º tipo** – Determinar o operador que desfaz uma ação.

Esse tipo de tarefa conduz a constatação de que existe um operador, chamado operador inverso que desfaz a ação de um determinado operador.

**Quadro 7** – Operador inverso.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/inicial	Operador	Estado Final
12	$2/3$	8	$3/2$	12

O Quadro 7 mostra que sob a ação do operador  $2/3$  sobre 12, obtemos 8 dividindo 12 por 3 e multiplicando o resultado por 2. Para reverter essa ação, precisamos dividir 8 por 2 e multiplicar o resultado por 3, ou seja, aplicar o operador  $3/2$ . Generalizando, podemos concluir que se o operador  $\frac{a}{b}$  provoca um determinado efeito em um estado inicial, o operador  $\frac{b}{a}$  aplicado ao estado final, retorna ao estado inicial.

**7º tipo** – Determinar operadores que não modificam o estado inicial.

Um quadro com estados iniciais e finais iguais leva a percepção de que existem operadores fracionários como  $2/2$ ,  $3/3$ , ..., que não modificam o estado inicial, pois são equivalentes ao elemento neutro da operação de multiplicação.

**8º tipo** – Determinar o operador que substitui a ação de vários operadores.

O trabalho com a multiplicação, citado anteriormente, permitirá elaborar tarefas que associem a concepção de operador para fracionários em composição de operadores, isto é, uma série de operadores que a partir do segundo age sobre o estado final do operador anterior.

**Quadro 8** – Composição de operadores.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/inicial	Operador	Estado Final/inicial
54	$2/3$	36	$1/2$	18

O Quadro 8 mostra a composição de operadores que relacionada à multiplicação de fracionários pode ser facilitada, quando se percebe que “a metade de dois terços”, ou seja,  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  provoca o mesmo efeito que  $1/3$  quando age sobre o estado inicial 54, pois ambos produzem o estado final 18.

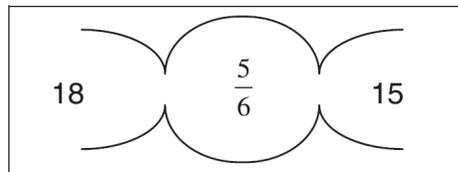
**9º tipo** – Determinar a porcentagem de uma quantidade.

Tarefa: *Quantos alunos, de uma classe com 50 alunos, jogam vôlei se sabemos que 10% dos alunos da classe praticam esse esporte?*

Para resolver esta tarefa podemos usar a equivalência de razões e a determinação do valor desconhecido, isto é, a regra de três. Tendo a razão “10 para 100”, devemos encontrar uma razão equivalente a essa, com denominador 50:  $\frac{10}{100} = \frac{5}{50}$  e concluir que 5 alunos jogam vôlei ou mobilizar a concepção de operador e constatar que “10% de 50 é igual a 5” pois  $\frac{10}{100} \times 50 = 5$ .

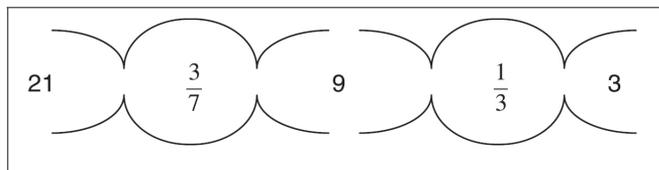
Uma outra representação pode ser manipulada nas técnicas que resolvem tarefas que associam a concepção de operador: as máquinas de transformação. Esta representação, além de associar a ação do operador ao funcionamento de uma máquina, dá um sentido concreto ao aspecto funcional do fracionário como operador.

Conforme podemos ver no exemplo na Figura 26, o estado inicial (18) seria a entrada da máquina de  $\frac{5}{6}$ , que produz o estado final (15) em sua saída. Esta máquina, em particular, funciona dividindo por 6, o que entrar, e multiplicando o resultado por 5:  $(18 \div 6) \times 5$ , apresentando, assim, o resultado 15.



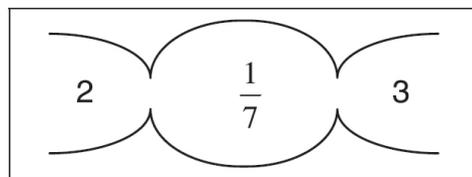
**Figura 26** – Representação de máquina de transformação, concepção de operador.

Este esquema pode ser utilizado, também, para representar a composição de operadores. A Figura 27 mostra a ação em série das máquinas  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{1}{3}$ , a máquina de  $\frac{3}{7}$  age sobre o estado inicial, ou entrada (21), produzindo como estado final ou saída (9), que será o estado inicial ou a entrada da máquina de  $\frac{1}{3}$  que, por sua vez, produzirá a saída 3.



**Figura 27** – Representação de máquinas em série para composição de operadores.

Em conjunto, as duas máquinas, calcularam “um terço de três sétimos de vinte e um”, isto é,  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} \times 21 = 3$ . A mesma saída poderia ser obtida por uma única máquina equivalente a  $\frac{1}{7}$ , como podemos ver na Figura 28.



**Figura 28** – Representação de máquina para composição de operadores.

Podemos notar que, embora o operador  $\frac{3}{7}$  tenha agido antes do operador  $\frac{1}{3}$ , a representação obedece a ordem da composição funcional, isto é:  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$ , pois mostra a ação do operador  $\frac{1}{3}$  sobre o estado final obtido pelo operador  $\frac{3}{7}$ , no estado inicial dado.

Há ainda uma observação a ser feita a respeito de porcentagens, quando se fala de fracionários como operador. Embora possam ser manipuladas como razões, conforme já vimos, podem ser entendidas também como operadores, porque agem sobre um estado inicial, transformando-o em um estado final.

Por exemplo, 10% isoladamente significam apenas que, de cada grupo de 100, estão sendo considerados 10, mas o sentido é outro, quando dizemos “10% de 40”, por exemplo, porque agora entendemos que o operador 10/100 deverá agir sobre 40, produzindo o estado final, representando tal ação por  $\frac{10}{100} \times 40 = 4$ .

Gostaríamos ainda de salientar que as concepções e as relações entre elas são mobilizadas a pedido de diferentes tipos de tarefas que serão cumpridas satisfatoriamente pela construção de técnicas diversas.

Por sua vez, essas técnicas só poderão ser construídas pautadas na manipulação de representações de diversos sistemas. Durante toda a ação de resolução de uma tarefa, a manipulação dos *ostensivos* propicia a construção de conhecimentos sobre o *não ostensivo*, número fracionário, tornando-o presente por meio das representações utilizadas.

Além disso, podemos perceber, com base nessa Organização Matemática que, na realidade, são poucas as tarefas que pedem a mobilização de uma única concepção, tornando praticamente impossível isolar uma das demais, pelo contrário, algumas apresentam vínculos naturais que não podem ser ignorados.

Esta constatação destaca-se, em parte, como uma vantagem do uso da TAD que nos permitiu, também, observar uma mudança do registro figural, apresentado na tarefa e o desenvolvimento de técnicas diferentes para uma mesma tarefa.

Para Duval, o tratamento de uma representação é a transformação da representação no próprio registro onde ela se formou e acrescenta:

Naturalmente, fazendo variar sistematicamente uma representação, muda-se o conteúdo representado: a escolha, entre várias representações possíveis [...] permite, assim, identificar as variações das unidades significantes em cada registro de representação. Isto supõe, evidentemente, que se identificou anteriormente todos os fatores de variação pertinentes de uma representação em um registro. (DUVAL, 1993, p. 55, tradução nossa)

A seguir, elaboramos os Quadros 9 a 13 que sintetizam as concepções que podem ser mobilizadas nos diversos tipos de tarefas em contextos discretos e/ou contínuos associados às técnicas que as solucionam.

**Quadro 9** – Concepção parte-todo – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção parte/todo	Grandeza	Técnicas
1º	Relacionar à uma figura um número fracionário	Contínua	1) Dupla contagem das partes. 2) Medida e dupla contagem. 3) Perceber equivalência entre parte pintada e não pintada 4) Perceber a equivalência entre as partes pintadas. 5) Medida e equivalência de áreas 6) Medida e reconfiguração 7) Medida e reconfiguração ou razão entre medidas de área 8) Cálculo de medidas de área e razão entre elas. 9) Escolha de malha quadrangular para aproximação da medida de área
		Discreta	Dupla contagem das partes
2º	Identificar um número fracionário dado em uma figura	Contínua	Dividir a figura sem associar a medida. Dividir a figura associando a medida Decomposição de figura
		Discreta	Contagem e divisão
3º	Compor inteiros e determinar fracionário	Contínua	Relaciona as partes que compõem a figura e identificar o fracionário da parte solicitada
		Discreta	Dupla contagem
4º	Reconstituição do inteiro	Contínua	Composição de figuras, a partir da parte apresentada
		Discreta	Reversibilidade: dividir a quantidade da parte dada pelo numerador e o resultado pelo denominador

**Quadro 10** – Conceção quociente – síntese de tarefas e técnicas.

<b>Tipo de tarefas</b>	<b>Concepção de Quociente</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Técnicas</b>
1º	Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes	Contínua	1º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes ou manter objetos inteiros e dividir só o que for necessário 2º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes
		Discreta	Divisão de naturais
2º	Distribuir igualmente x objetos em uma determinada cota.	Contínua	Dividir a quantidade de objetos pela cota dada
		Discreta	Divisão de naturais

**Quadro 11** – Conceção de medida – síntese de tarefas e técnicas.

<b>Tipo de tarefas</b>	<b>Concepção de Medida</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Técnicas</b>
1º	Determinar medidas de objetos	Contínua	Determinar unidade e subunidades
2º	Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais	Contínua	Dupla contagem
3º	Determinar medidas em segmentos não divididos em partes iguais	Contínua	Dividir o segmento em partes de mesma medida e contagem
4º	Reconstituição da unidade	Contínua	Divisão da parte apresentada para identificar $1/n$ e recompor a figuras

**Quadro 12** – Conceção de razão – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Razão	Grandeza	Técnicas
1º	Determinar uma razão	Contínua	1º caso: situação todo-todo Escrever na forma fracionária as medidas explícitas ou medir os objetos antes se for o caso. 2º caso: situação parte-parte idem 3º caso: situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes. Associar a razão encontrada à divisão
		Discreta	1º caso: situação todo-todo Dupla contagem 2º caso: situação parte-parte de inteiros diferentes Dupla contagem 4º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro Dupla contagem 5º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro sem figuras Escrever na forma fracionária os dados apresentados
2	Determinar valor desconhecido	Contínua	proporcionalidade entre as medidas dadas
		Discreta	proporcionalidade entre as quantidades dadas
3º	Comparar razões	Contínua/ discreta	Determinação de razões equivalentes com mesmo denominador

**Quadro 13** – Conceção de operador – síntese de tarefas e técnicas.

Tipo de tarefas	Concepção de Operador	Grandeza	Técnicas
1º	Transformar grandezas pela ação de um operador fracionário	Contínua/ discreta	1) Divisão das medidas iniciais pelo denominador do operador e multiplicação do resultado pelo numerador do operador. 2) Associar a concepção de razão

*(continua)*

**Quadro 13** – Concepção de operador – síntese de tarefas e técnicas. (*continuação*)

<b>Tipo de tarefas</b>	<b>Concepção de Operador</b>	<b>Grandeza</b>	<b>Técnicas</b>
2º	Transformar grandezas pela ação de dois operadores	Contínua	Dividir a figura uma ou duas vezes, em partes de mesma medida. Associar à operação de multiplicação
		Discreta	Divisão dos dados iniciais pelo denominador do operador e multiplicação do resultado pelo numerador do operador.
3º	Determinar o operador que faz uma certa transformação	Contínua/ discreta	Comparar as quantidades dadas
4º	Comparar operadores	Contínua/ discreta	Tabela com estados iniciais iguais e operadores diferentes remetendo ao mesmo estado final: equivalência de operadores
5º	Comparar estados iniciais e finais	Contínua/ discreta	Tabela com estados iniciais diferentes e mesmo operador: equivalência entre estados iniciais e finais
6º	Determinar o operador que desfaz uma ação		Tabela para reversibilidade do operador: operador inverso
7º	Determinar operadores que não modificam o estado inicial		Tabela com operador que não produz transformação: operador identidade
8º	Determinar o operador que substitui a ação de vários operadores		Tabela com operadores transformando estados finais de outros operadores: composição de operadores (multiplicação de frações)
9º	Determinar a porcentagem de uma quantidade		Tabela com operadores de denominador 100 (porcentagem)

Assim, tendo em vista o objetivo de encaminhar os professores em formação, para que se apropriassem de tarefas que facilitariam a conceituação dos racionais por seus, alunos justificam-se os estudos preliminares realizados.

A seguir, descreveremos nosso dispositivo experimental e as ações formativas que escolhemos, bem como suas análises e nossas conclusões.



# Terceira Parte

## O dispositivo experimental

Nesta parte de nosso trabalho, caracterizaremos o projeto de formação, a escola em que realizamos a formação e os professores que participaram do projeto. Além disso, descreveremos e analisaremos a própria formação e apresentaremos, enfim, nossas considerações conclusivas.

### 1 Caracterização do projeto de formação, da escola e dos professores

O objetivo da formação continuada era observar e analisar as ações dos professores durante a elaboração e aplicação de uma Organização Didática para ensino dos números fracionários a uma quinta série da escola que sediava nosso projeto. Durante a formação, a Organização Didática será tratada como uma sequência de ensino, pois os professores estão familiarizados com esse termo e tiveram oportunidade de trabalhar com muitas delas na formação em Geometria.

#### 1.1 O projeto de formação

O projeto de pesquisa, do qual os sujeitos desta formação continuada participaram, em sua primeira fase, de 2000 a 2002, intitulado: *Estudos de fenômenos de ensino e aprendizagem de noções geométricas*” sob responsabilidade do professor Doutor Saddo Ag Almouloud, foi sediado na PUC/SP e patrocinado pela Fapesp. Durante esta fase, procuramos

investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem de noções geométricas trabalhadas nas séries finais do Ensino Fundamental. Suas

questões principais estavam ligadas aos fenômenos relacionados à formação de conceitos geométricos; às representações dos professores com respeito ao papel da Geometria no Ensino Fundamental; e ao uso do computador para desenvolvimento de conceitos geométricos. (MANRIQUE, 2003, p. 45)

Na primeira fase do projeto de pesquisa, como os professores explicitaram possuir poucos conhecimentos a respeito de Geometria, utilizamos como estratégia de formação, organizações didáticas, especialmente, elaboradas para o trabalho com tópicos de Geometria que, na sua maioria, poderiam ser introduzidas em sala de aula, se os professores o quisessem.

Durante toda a formação, momentos de reflexão didática sempre estiveram presentes nas discussões com os professores, sobretudo, para mostrar a necessidade de sempre encaminhar o aluno a buscar hipóteses, de soluções para as tarefas apresentadas, socializar as soluções encontradas, explicitar a matemática presente em tais tarefas e, em alguns momentos, demonstrar teoremas e propriedades, etc. da mesma forma que agíamos com eles em nossos encontros. Assim, acreditávamos que essa estratégia de formação poderia ser reproduzida pelo professor em suas aulas, pois até o material estava disponível.

Ao término do financiamento da Fapesp, iniciamos a segunda fase com, basicamente, o mesmo grupo de professores, mas ampliando nossos objetivos. O projeto, agora denomina-se: *O pensamento matemático no Ensino Fundamental: formação de núcleos de ensino, aprendizagem e pesquisa*. Seu núcleo de formação foi deslocado para uma escola subordinada à DE de Jacareí (SP), onde alguns dos professores trabalhavam, durante 2003 e primeiro semestre de 2004.

Nessa fase do projeto, em que este trabalho está inserido, como o conteúdo a ser tratado, número fracionário, aparece no discurso dos professores, fundamentalmente, como dificuldades dos alunos. Assim, decidimos mudar a estratégia de formação, articulando-a como resposta às organizações didáticas, para ensino de fracionários para uma quinta série do Ensino Fundamental produzidas pelos professores.

Um de nossos objetivos foi usar a formação, agora realizada dentro da escola, para transpor resultados de pesquisa a respeito do ensino e aprendizagem de números fracionários à escola, visto que o resultado final da formação foi aplicado em sala de aula com a presença dos professores participantes.

Os pesquisadores, vinculados à PUC/SP, de alguma forma, são professores de graduação e da pós-graduação, alunos e ex-alunos de mestrado e doutorado em Educação Matemática, além de alunos da graduação em Matemática que participam de Iniciação Científica, que se reúnem semanalmente para estudos, seminários, troca de informações e definição de estratégias e tarefas.

Cada participante do grupo é responsável por alguma tarefa, como a elaboração das atividades que serão desenvolvidas com os professores, atuação direta nos processos de formação, realização de observações, gravações, etc. dos encontros, além da elaboração, sistematização e análise dos instrumentos utilizados nos procedimentos metodológicos. Nossa participação, desde o início do projeto, constituiu-se na atuação direta na formação dos professores, na elaboração das estratégias para tal realização e como pesquisadora.

O objetivo de integrar em um mesmo projeto, pesquisadores e professores do Ensino Fundamental não foi o de fornecer a esses professores uma espécie de “receita de como dar aulas”, mas, sobretudo, de despertar a atenção do grupo para a necessidade de um trabalho reflexivo sobre as ações pedagógicas, tendo como referência pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem matemática. Além disso, pretendíamos contribuir para a formação dos participantes, na expectativa de que se tornem profissionais mais críticos, participativos e competentes para atuar em sala de aula e, portanto, mais que executores de tarefas, procedimentos e técnicas. (Almouloud, Manrique, Silva e Campos, 2004).

Nesta segunda fase do projeto, temos, entre outros, os seguintes objetivos:

- dar subsídios teóricos ao trabalho de professores e pesquisadores interessados na integração de pesquisas em Educação Matemática e novas tecnologias nas aulas de Matemática;
- produzir conhecimento na área de formação de professores de Matemática utilizando novas ferramentas de apoio;
- investigar a formação e desenvolvimento de conceitos matemáticos referentes aos blocos de conteúdos: geometria, álgebra, tratamento da informação e o pensamento numérico;

Os sujeitos desta pesquisa são professores de Matemática que atuam no Ensino Médio e ciclos finais do Ensino Fundamental da rede estadual de ensino e reúnem-se com formadores e observadores todas às sextas-feiras das 8 às 11 horas no laboratório de informática da escola.

## 1.2 A escola

A escola, situada no centro do município de Arujá, Estado de São Paulo, próxima à Rodovia Dutra e de um bom centro comercial, atualmente, conta com aproximadamente 1.800 alunos matriculados, no Ensino Fundamental, médio e suplência, de vários bairros e municípios vizinhos, participam do Projeto Parceiros do Futuro que tem como objetivo atrair a comunidade para a escola.

A escola possui uma biblioteca, que conforme nosso ponto de vista, é precária; sala de vídeo, um laboratório de informática e 17 salas de aula. No período noturno, a escola atende alunos que, por algum motivo, abandonaram os estudos

e hoje, com idade defasada e dificuldades de aprendizagem cursam o supletivo, porque precisam trabalhar para complementar a renda familiar.

Por outro lado, no início de 2003, os professores fizeram questão de colocar uma faixa à frente da escola para anunciar à comunidade que vários alunos haviam sido aprovados no vestibular.

Um de nossos objetivos era tornar essa escola em centro-piloto de formação continuada de professores de Matemática que, a médio prazo, poderia se tornar um centro de referência de multiplicação de resultados para as escolas próximas.

A escola não é das piores, embora precise de manutenção, é muito barulhenta. Em uma locomoção para a sala de vídeo, os alunos de uma classe gritavam e tocavam instrumentos de percussão, tornando praticamente impossível o trabalho de nosso grupo, enquanto os professores justificavam tranquilos que o barulho terminaria em instantes.

Durante nosso trabalho, fomos recebidos com entusiasmo pela direção da escola que apoiava a iniciativa de parte do corpo docente de levar para a escola nosso projeto de formação, embora dos 15 professores de matemática da escola só três que já tinham participado da primeira fase do projeto na PUC/SP, foram constantes durante os trabalhos, alguns não quiseram participar e outros compareceram a alguns encontros.

### 1.3 Os professores em formação

Iniciamos a formação com 15 professores, no segundo semestre de 2003, mas por vários motivos alguns deles não conseguiram manter a frequência, aparecendo eventualmente. O engajamento efetivo no trabalho apareceu para nove desses professores, embora um deles desistisse no início de 2004, por causa de seu horário escolar, e uma nova professora entrou entusiasmada contribuindo muito até o final de nossa formação. Uma aluna do primeiro ano de Licenciatura em Matemática participou de todo o trabalho, pois veio a convite de sua ex-professora que fazia parte do grupo.

Nesta caracterização, os professores serão identificados por nomes fictícios, para realizá-la utilizamos um questionário aplicado no início dos trabalhos, em agosto de 2003.

#### 1.3.1 Professor Antonio

Este professor tem 33 anos, é solteiro e leciona há oito anos. No início da formação ministrava 42 aulas no Ensino Fundamental em uma escola particular e em uma escola estadual. Kursou licenciatura plena em Matemática, faz parte de

nosso projeto desde 2002 e, nos últimos três anos, como complementação de sua formação, fez um curso de 60 h na PUC/SP. Participou de uma oficina de quatro horas sobre matemática na sala de aula pela Editora Ática e de um “treinamento” de 16 horas para utilização de apostilas, em sala de aula, na escola particular onde leciona.

Embora tenha computador em casa, usa o da escola, por quase duas horas semanais, para treinar, revisar atividades do projeto, estudar apostilas sobre Cabri e trabalhar com alunos, não tendo o hábito de acessar a internet. No entanto, na escola particular, leva seus alunos pelo menos uma vez por semana, ao laboratório de informática, o que não faz na escola pública porque não tem computadores suficientes, mas já “treinou” alguns alunos para se tornarem monitores no futuro. Fez alguns cursos para utilizar computadores em sala de aula oferecidos pela Diretoria de Ensino.

Diz conhecer e utilizar os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) para a Matemática, mas não tece opinião alguma a respeito. Não conhece os *Experiências Matemáticas* e usa alguns livros didáticos, de acordo com a metodologia, dinamismo e ilustração do assunto. Em sala de aula, utiliza revistas, jornais e livros como recurso didático. Acredita que os problemas aritméticos são importantes, porque são pré-requisitos, pois, por eles, “*iniciamos todo nosso trabalho*”.

### 1.3.2 Professor Bruno

Este professor é casado, tem 37 anos e é graduado em licenciatura curta em Ciências com complementação em Matemática, de dois anos e em Pedagogia. Faz parte de nosso projeto desde 2000, leciona Matemática há seis anos e, nesse período, não lecionou apenas para a sexta série. No início da formação, tinha 46 aulas semanais em três escolas públicas e uma particular no Ensino Fundamental e Médio.

Possui computador em casa e utiliza-o por 5 horas aproximadamente para pesquisas pessoais e enviar email para colegas. Fez alguns cursos básicos de Windows, Word e Excel, mas só usa o computador em sala de aula na escola particular.

Diz conhecer os Parâmetros Curriculares Nacionais, mas duvida de sua utilização em sala de aula, porque acredita no que está escrito, mas não em sua aplicabilidade em escolas públicas. Utiliza o livro didático eventualmente para consulta, pois prepara suas aulas, baseando-se: no *Experiências Matemáticas* porque estes proporcionam mais opções para reflexões com alunos em sala de aula. Procura sempre levar sugestões das apostilas que utiliza na escola particular à escola pública. Diz não ter oportunidade de usar vídeos ou a sala de informática em suas aulas e acha que a Aritmética é importante, porque desenvolve o raciocínio, tornando-o mais veloz.

### 1.3.3 Professora Carla

A professora tem 39 anos, é casada e leciona Matemática há três anos no Ensino Fundamental e Médio. Nesse período, não trabalhou nem na sétima série do EF, nem na terceira série do EM. No início de nossa formação, dava dez aulas semanais em uma escola estadual. Coursou licenciatura plena em Matemática e não participou de cursos ou congressos nos últimos três anos.

Afirma ter recebido formação para usar o computador na universidade, emprega seu computador pessoal por quase duas horas semanais, para ajudar na preparação de aulas e acessa a internet para “pesquisar” trabalhos escolares e buscar informações sobre assuntos matemáticos e outros.

Declara conhecer e utilizar os PCN, embora eles só esclareçam sobre a melhor maneira de ensinar. Não conhece os *Experiências Matemáticas* e adota um determinado livro didático por possuir assuntos voltados ao cotidiano dos alunos. Consulta também a revista Nova Escola para preparar suas aulas e utiliza como recursos livros didáticos, jogos matemáticos e pesquisa em revistas e jornais “*buscando sempre mostrar aos alunos a matemática presente em tudo em nossas vidas*” sendo também, por esse motivo, que a Aritmética é importante.

### 1.3.4 Professor Davi

Este professor é solteiro, tem 23 anos e leciona há três anos, não tendo, nesse período, dado aulas somente na sétima série. No início da formação, ministrava 30 aulas semanais em duas escolas estaduais. Coursou licenciatura em Matemática e Ciências, além de Especialização em Psicopedagogia. Nos últimos três anos, foi monitor de um curso de Correção de Fluxo oferecido pela Diretoria de Ensino.

Utiliza seu computador pessoal por, aproximadamente, seis horas semanais, para se manter informado e buscar informações sobre os conteúdos que levará para a sala de aula com o intuito de melhorá-los. Poucas vezes, utilizou o computador escolar, porque o acesso é restrito. Apenas uma vez levou alunos ao laboratório de informática da escola, embora possuísse formação para utilizar o computador na graduação e cursos de Windows, Word, Milenium, Excel, Access, etc.. Acessa a internet para se comunicar com os amigos e trocar materiais de apoio pedagógico.

O professor acima afirma conhecer os PCN com relação à Matemática, mas não são usados. Quanto aos *Experiências Matemáticas*, considera ser um bom material, embora não o utilize. Adota determinado livro didático em suas aulas pela explanação que apresenta do conteúdo, complementando-o com seu trabalho e o que encontra nas revistas *Ciências Hoje* e *Nova Escola*. Nas aulas, utiliza fitas de vídeo, lousa, giz e retroprojetor, além do livro didático que foi distribuído aos alunos. Quanto à importância da Aritmética, diz que: “*o conceito e conteúdo*

*de Aritmética faz com que o aluno pense e descubra cada situação problema levantado em sala de aula”.*

### 1.3.5 Professor Edson

O professor é casado, tem 60 anos e está aposentado de outra atividade. Leciona Matemática há quatro anos e já trabalhou com todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. No início da formação, dava 31 aulas semanais em uma escola estadual.

Desde 2000, participa de nosso projeto, fez um curso de correção de fluxo oferecido pela Diretoria de Ensino de 260 horas, um curso de Introdução ao Estudo da Educação na USP de 30 horas; um curso de Metodologia do Ensino de Física na USP de 60 horas e foi monitor no Projeto Construindo Sempre Matemática, oferecido pela PUC/SP e SEE-SP durante 60 horas. Participou ainda dos cursos: Softwares básicos, Cabrincando Geometria, Supermáticas, Um X em questão, todos oferecidos pela Diretoria de Ensino.

Tem computador em casa e usa-o por, aproximadamente, duas horas semanais para “pesquisar” e buscar atividades relacionadas às aulas de Matemática e Física.

Não se pronunciou a respeito dos PCN nem de livros didáticos, mas afirma conhecer os *Experiências Matemáticas*, embora não os utilize. Às vezes, recorre a alguma revista, vídeo ou computador como recurso didático para suas aulas.

Quanto à importância da Aritmética, diz que: *“nas aulas de aritmética, os alunos têm compreensão das operações básicas, compreendendo os símbolos e como usá-los”.*

### 1.3.6 Professora Fabiana

Esta professora é casada, tem 47 anos e leciona Matemática há seis anos, já tendo trabalhado em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. No início da formação, ministrava 33 aulas semanais em uma escola estadual. cursou licenciatura curta em Matemática e fez complementação para a licenciatura plena na mesma área. Faz parte de nosso projeto desde 2000, participou do I CabriWord e foi monitora no projeto Construindo Sempre Matemática, ambos pela PUC/SP.

Possui computador pessoal e usa-o por, aproximadamente, 15 horas semanais, para pesquisas na internet, enviar email, participar de fóruns, estudar o Cabri e digitar provas e trabalhos. Em sala de aula, utiliza-o para ensinar Geometria com o Cabri.

Conhece e emprega os PCN porque *“é muito importante para nos orientar sobre os assuntos mais necessários”*, os *Experiências Matemáticas* porque *“é um*

*material didático muito bom, faz o aluno caminhar passo a passo para a aprendizagem”* e a Revista de Educação Matemática da SBEM para preparar suas aulas. Justifica o emprego de *Experiências Matemáticas* e do material de Correção de Fluxo por não serem técnicos e possuírem linguagem clara.

Como recurso didático, utiliza: calculadora, computador, as fichas do Projeto de Aceleração e o livro didático. Quanto à Aritmética, acredita que: *“é importante, é preciso saber o processo de algoritmos e compreensão de técnicas para adquirir conceitos”*.

### 1.3.7 Professora Gina

Esta professora é casada, tem 33 anos e leciona há 12 anos. Nos últimos cinco anos, não lecionou apenas nas sétimas e oitavas séries do Ensino Fundamental e, em 2002, esteve afastada para se dedicar ao cargo de coordenação da escola. No início do processo de formação tinha 30 aulas semanais em uma escola estadual. cursou bacharelado em Matemática, participa de nosso projeto desde 2000 e, nos últimos três anos, fez parte do projeto Construindo Sempre Matemática, realizou um curso de 60 horas de Matemática na PUC/SP e uma oficina de quatro horas para Matemática no Ensino Médio oferecido pela Editora Ática.

Possui computador em casa e usa-o por, aproximadamente, duas horas semanais, para acessar a internet, fazer pesquisas, elaborar atividades para suas aulas e estudar o Cabri. Não teve formação para utilizar o computador em sala de aula, antes de ingressar em nosso projeto; e o vê como uma ferramenta para a sala de aula.

Conhece os PCN e os *Experiências Matemática*, utilizando-os como orientação. Adota um determinado livro didático por sua metodologia, ilustrações, dinamismo e jogos, como auxiliares na elaboração de suas aulas. Como recursos didáticos, utiliza: lousa, giz, transparências, cartazes, figuras geométricas, sólidos (papelão), jogos, calculadora, computador e objetos do dia-a-dia. Quanto à Aritmética, percebe-a como uma ferramenta para desenvolvimento de raciocínio.

### 1.3.8 Professora Hilda

Esta professora é solteira, tem 27 anos e leciona há sete anos e nove meses. Nos últimos cinco anos, não lecionou apenas na oitava série do Ensino Fundamental e durante o ano de 2000; só atuou em classes de aceleração. Atualmente, tem 45 aulas semanais em duas escolas públicas: uma municipal e outra estadual. cursou licenciatura plena e fez Especialização para Professores de Matemática, ingressou em nosso projeto no início de 2004. Nos últimos três anos, não participou de nenhum curso ou congresso.

Possui computador em casa e utiliza-o por, aproximadamente, duas horas semanais para acessar a internet e fazer pesquisas para preparação de aulas, para controlar seus gastos domésticos com planilhas do Excel e contatar amigos e parentes.

Na escola, utiliza o computador para preparar atividades, digitar notas e fazer planejamento. Em sala de aula, usa-o apenas na rede municipal, na sala de informática e em algumas atividades interdisciplinares. Afirma ter feito alguns cursos oferecidos pelo Estado: Um X em questão e Noções básicas sobre o Cabri.

Conhece os PCN e quando tem tempo de consultá-los, até encontra algumas coisas interessantes. No entanto, não tem tempo disponível para uma análise mais séria. Conhece também a coleção *Experiências Matemáticas*, afirma que apresenta, na maioria das vezes, formas diferentes de trabalhar os conteúdos, embora não faça milagres. Quanto ao livro didático, emprega como apoio no Ensino Fundamental os que estão disponíveis na escola e critica as editoras por enviarem só os catálogos para a análise e não o livro escolhido pelos professores.

Fazia parte, também do grupo em formação uma ex-aluna de uma das professoras que cursava o primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática.

No Quadro 14, mostramos o perfil de cada professor que participa ativamente do projeto de formação. Observamos que a única que ingressou na carreira dentro da faixa etária convencional, foi a professora G, enquanto os professores E e F, fizeram-no mais tardiamente.

**Quadro 14** – perfil dos professores participantes da formação.

<b>Profesor</b>	<b>Est. Civil</b>	<b>Idade</b>	<b>Tempo de Magistério (anos)</b>	<b>Formação</b>
Antonio	S	33	8	Licenciatura Plena
Bruno	C	37	6	Licenciatura Curta e Complementação em Matemática e em Pedagogia
Carla	C	39	3	Licenciatura Plena
Davi	S	23	3	Licenciatura Matemática e Ciências Especialização Psicopedagogia
Edson	C	60	4	Licenciatura Curta em Matemática
Fabiana	C	47	6	Licenciatura Curta e Complementação
Gina	C	33	12	Bacharelado em Matemática
Hilda	S	27	7	Licenciatura Plena e Especialização

## 2 A formação

O objetivo da formação era a elaboração de uma organização para o ensino de números fracionários, para uma quinta série do Ensino Fundamental. O período de formação foi de 1/8/2003 a 16/4/2004, com um total de 28 sessões: sua descrição será dividida para facilitar a compreensão dos trabalhos realizados.

### 2.1 Primeira etapa: familiarização com o contexto e organização inicial

Esta primeira etapa foi realizada em cinco sessões de 1/8/2003 a 29/8/2003. Na primeira sessão, entregamos a cada professor uma pasta e um bloco para anotações, solicitamos que a utilizassem para guardar todo o material da formação e que a trouxessem em todos os encontros, pois poderiam buscar informações anteriores se necessário. Fizemos isso, porque eles tinham o hábito de não trazer as fichas ou anotações dos trabalhos já realizados para os encontros.

Apresentamos o novo momento do projeto, isto é, a mudança dos trabalhos da PUC para a própria escola e a inserção de novos assuntos para discussão, dentro dos blocos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Tratamento da Informação, encerrando assim a formação específica em Geometria.

Lançamos também a proposta de elaborar uma Organização Didática para o ensino de fracionários, para quinta série, solicitando que trouxessem ideias para esse trabalho já no próximo encontro. Os professores sabiam de nosso interesse pelo tema, pois em junho tinham mostrado interesse em participar do trabalho.

Na segunda sessão, foi feito um mapa conceitual com base na palavra frações, cujo objetivo foi levantar as concepções desses professores a respeito de números fracionários. Evitamos usar o termo números fracionários, para o mapa, por recear que fizessem outra leitura que não o das frações já familiares.

Para a elaboração da Organização Didática, em grupos, provocamos, no terceiro encontro, a discussão a respeito de um questionário, que responderam no início do projeto, no geral analisavam as possíveis respostas de alunos para as questões que envolviam fracionários. Nosso objetivo era levar os professores a explicitar as dificuldades que acreditam que os alunos tenham para abordá-las na elaboração da organização pretendida.

Na sessão seguinte, até a hora do café, sentiram necessidade de discutir a respeito dos papéis do aluno e do professor, da rede pública de ensino, do sistema escolar, da política educacional, contando casos sobre os problemas que enfrentam com os próprios alunos e a escola em seu dia-a-dia, fato que se verificou, também, em outros momentos.

Nos encontros seguintes discutiram, em grupos foram discutidas as atividades que trouxeram para decidir o melhor caminho a seguir na formação do aluno

de quinta série, com o intuito de melhor escolher as atividades que iriam para a sala de aula.

## 2.2 Segunda etapa: produção em grupos da Organização Didática

A segunda etapa, de 5/9 a 26/09, caracterizou-se pelo trabalho em grupo, partindo das atividades que trouxeram individualmente para elaborar e apresentar uma organização para o ensino. A cada sessão, a formadora colocava no quadro o caminho que decidiram ser o melhor para ensinar números fracionários e as concepções levantadas no dicionário, pois esperavamos que se preocupassem com essas decisões durante a elaboração da Organização Didática.

Continuaram as discussões em grupo, mas, no final, apresentaram um esboço do caminho que cada grupo pretendia seguir, sendo este mostrado aos outros grupos e orientados pela formadora para selecionarem atividades para cumprir tais roteiros.

## 2.3 Terceira etapa: a formação específica

Esta etapa aconteceu de 03/10 a 14/11/2003, caracterizou-se pela formação específica a respeito de fracionários, pois se justifica pela percepção de que só um dos grupos conseguiu estruturar uma organização, ao passo que os outros apresentaram cópias de livros e atividades isoladas.

Mostramos uma breve retrospectiva da gênese dos números fracionários e uma síntese de tarefas que solicitam a mobilização das concepções de números fracionários, de acordo com a Organização Matemática elaborada pela formadora, institucionalizando, assim, tais concepções.

Além disso, discutimos a respeito do que os PCN sugerem para o ensino do tema e pequenos textos, abordando Campos Conceituais, Teoria das Situações e Aprendizagem Significativa.

Em 24/10, os professores apresentaram as organizações que elaboraram e percebemos que tinham feito poucas alterações na organização inicial. Por acreditar que uma visão mais ampla pudesse ajudá-los na reelaboração de sua organização, trouxemos uma série de situações, envolvendo fracionários ao longo do Ensino Fundamental, pedindo que identificassem a concepção que poderia ser mobilizada, em qual conteúdo tal tarefa estaria inserida e a série na qual poderia ser tratada. A análise continuou até o dia 14/11.

## 2.4 Quarta etapa: retomada da organização didática em grupos

Na quarta etapa, de 21/11 a 12/12, os professores terminaram a elaboração da organização nos grupos e entregaram à formadora no último encontro do ano, data em que realizamos mais um mapa conceitual com a palavra-chave: frações.

## 2.5 Quinta etapa: análise da organização didática elaborada pela formadora

Retomamos nossos trabalhos, depois das férias, com a quinta etapa, de 5/3/2004 a 2/4/2004. As Organizações Didáticas produzidas pelos professores foram discutidas com eles. Para análise do grupo, apresentamos uma Organização Didática, elaborada pela formadora, que se mostrou necessária pelo fato de que os professores não apresentavam autonomia suficiente para executar suas decisões nas organizações que elaboravam.

Constatamos que necessitavam de auxílio e, nesse sentido, com base na discussão dessa organização e de algumas mudanças sugeridas pelos professores, preparamos-nos para a aplicação da Organização Didática finalizada em uma sala de quinta série da escola.

## 2.6 Sexta etapa: aplicação da organização didática em uma quinta série

A sexta etapa consistiu na aplicação da Organização Didática em uma quinta série da escola e da análise de tal aplicação. Como o tempo só permitisse a aplicação de apenas algumas fichas da organização, a professora da sala decidiu acompanhar nossas aulas e continuar a aplicação das fichas restantes com o auxílio dos colegas que participam do projeto. A aplicação aconteceu nos dias 5/4, 6/4, 12/4, 13/4 e 14/4.

O grupo decidiu que a professora Gina aplicaria a Organização Didática elaborada e que todos a acompanhariam, pelo menos, uma vez para observar o trabalho sendo realizado. No entanto, a primeira sessão de aplicação, a professora sentiu-se insegura para fazer a socialização do trabalho dos alunos na lousa, solicitando que a formadora continuasse a aula.

Naquele momento, sentimos que os professores, na realidade, gostariam de ver nossa atuação frente a uma quinta série. Aceitamos o desafio, depois de tentar que um outro professor assumisse, como não conseguimos, aplicamos a Organização Didática e discutimos o acontecido com os professores, depois de cada sessão.

No Quadro 15, apresentamos uma síntese das etapas de formação.

**Quadro 15** – Síntese das etapas de formação.

<b>Etapas</b>	<b>Identificação</b>	<b>Período</b>	<b>Quantidade de sessões</b>
1ª	Familiarização com o contexto e Organização Didática inicial	01/8 à 29/8/2003	5
2ª	Elaboração da Organização Didática em grupos	05/9 à 26/9	3

(continua)

**Quadro 15** – Síntese das etapas de formação. (continuação)

<b>Etapas</b>	<b>Identificação</b>	<b>Período</b>	<b>Quantidade de sessões</b>
3ª	Formação	03/10 à 14/11	6
4ª	Retomada da Organização Didática em grupos	21/11 à 12/12	4
5ª	Análise da Organização Didática elaborada pela formadora	5/3 à 2/4/2004	5
6ª	Aplicação da Organização Didática em uma sala de quinta série	5/4 à 16/4	6

No Quadro 16, mostramos o processo de formação de forma mais detalhada que permite uma visão mais ampla das ações formativas, excluindo os professores que não tiveram participação constante na pesquisa.

**Quadro 16** – Detalhamento dos encontros do dispositivo experimental da pesquisa.

<b>Etapas</b>	<b>Encontros</b>	<b>Data</b>	<b>Professores participantes</b>	<b>Atividades</b>
PRIMEIRA	1º	08/08/2003	Bruno, Antonio, Carlos, X, Edson, Fabiana, Y, Gina, Aluna,	Mapa conceitual 1. Recebimento das propostas de atividades realizadas pelos professores
	2º	15/08/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Davi, X, Edson, Fabiana, Y, Gina,	Discussão do questionário. Grupos para discutir melhor caminho para o ensino de frações.
	3º	22/08/2003	Bruno, Aluna, Antonio, X, Gina, Fabiana.	Explicação a respeito da relação universidade, pesquisa e escola e professores. Exposição, justificativas e decisão do melhor caminho para o ensino de frações. – Dar significado as frações. Como? – Relacionar o que já foi feito com a realidade. – Aplicação. Busca do significado de frações no dicionário.
	4º	29/08/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, X, Edson, Fabiana, Y, Gina..	Socialização das atividades coletadas individualmente, para fazer Organização Didática em grupos.

(continua)

**Quadro 16** – Detalhamento dos encontros do dispositivo experimental da pesquisa. *(continuação)*

<b>Etapas</b>	<b>Encontros</b>	<b>Data</b>	<b>Professores participantes</b>	<b>Atividades</b>
SEGUNDA	5º	05/09/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, Edson, Fabiana, Y, Gina,	Retomada do trabalho de elaboração em grupos.
	6	12/09/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, Edson, Fabiana, X, Gina.	Elaboração das atividades.
	7	26/09/2003	Bruno, Antonio, Carla, Davi, X, Fabiana, Gina	Elaboração das atividades e apresentação.
TERCEIRA	8	03/10/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, X, Edson, Fabiana, Gina..	Início da formação com História dos Números Fracionários.
	9	10/10/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Fabiana, Gina.	Apresentação e institucionalização das concepções de fracionários.
	10	17/10/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, X, Fabiana, Gina..	Apresentação e institucionalização das concepções de fracionários.
	11	24/10/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Davi, Fabiana, Gina.	Apresentação e institucionalização das concepções de fracionários.
	12	07/11/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Edson, Fabiana, Gina.	Análise de atividades segundo as concepções e técnicas.
	13	14/11/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Carla, Davi, X, Fabiana, .Gina.	Análise de atividades segundo as concepções e técnicas.
QUARTA	14	21/11/2003	Bruno, Antonio, Carla, Davi, Fabiana, Gina. . .	Discussão dos PCN a respeito de fracionários para a quinta série.
	15	28/11/2003	Aluna, Antonio, Carla, Davi, Fabiana, Gina.	Reelaboração da sequência em grupos.
	16	05/12/2003	Bruno, Aluna, Antonio, Edson, Fabiana, Y, Gina..	Reelaboração e entrega das sequências dos grupos.
	17	12/12/2003	Bruno, Carla, Davi, Edson, Fabiana, Y, Gina.	Mapa conceitual 2.

*(continua)*

**Quadro 16** – Detalhamento dos encontros do dispositivo experimental da pesquisa. (continuação)

<b>Etapas</b>	<b>Encontros</b>	<b>Data</b>	<b>Professores participantes</b>	<b>Atividades</b>
QUINTA	18	05/03/2004	Bruno, Aluna, Antonio, Davi, Fabiana, Gina.	Análise das sequências elaboradas por eles.
	19º	12/03/2004	Bruno, Aluna, Antonio, Davi, Fabiana, Hilda, Gina	Discussão da sequência elaborada pela formadora.
	20º	19/03/2004	Bruno, Aluna, Antonio, Fabiana, Hilda, Gina.	Continuação da discussão da sequência elaborada pela formadora e texto sobre aprendizagem significativa.
	21º	26/03/2004	Bruno, Antonio, Davi, Hilda, Gina..	Continuação da discussão da sequência elaborada pela formadora e preparação para aplicação na 5ª série.
	22º	02/04/2004	Bruno, Antonio, Davi, Fabiana, Hilda, Gina.	Continuação da discussão da sequência elaborada pela formadora e preparação para aplicação na 5ª série.
SEXTA	23º	05/04/2004	Bruno, Aluna, Antonio, Fabiana, Gina.	Aula 1 na 5ª série B.
	24º	06/04/2004	Gina .	Aula 2 na 5ª série B
	25º	12/04/2004		Aula 3 na 5ª série
	26º	13/04/2004		Aula 4 na 5ª série B
	27	14/04/2004		Aula 5 na 5ª série B
	28	16/04/2004	Bruno, Aluna, Antonio, Davi, Edson, Hilda, Gina.	Análise do trabalho realizado com os alunos.

Na sequência, apresentaremos nossas análises.

### 3 Análises

Em nossa problemática, propusemo-nos a refletir sobre três problemas: as concepções dos professores a respeito de: números fracionários, seus alunos e as ações de formação que propiciam ampliar seu conhecimento didático. Esta parte do trabalho tem por objetivo discutir esses diferentes aspectos.

O grupo de professores em formação, considerado nas análises, caracterizou-se em relação à participação da seguinte forma: três professores frequentes e muito ativos: Bruno, Fabiana e Gina; três frequentes, mas, de participação tímida: Antonio, Davi e Carla; alguns não tão frequentes, como o Prof. Edson, outros que

tiveram participação bastante esporádica; além da Prof. Hilda que ingressou na formação somente em 2004 e da aluna bastante participante.

### 3.1 Concepções dos professores sobre números fracionários

Apresentamos a seguinte questão relacionada às concepções dos professores com números fracionários:

*Que Organização Didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação?*

Pretendemos responder a questão, analisando os dois mapas conceituais, realizados com a palavra-chave: frações e o estudo das sequências sobre ensino de fracionários elaboradas pelos professores, segundo a TAD e o grau de completude que apresentam.

#### 3.1.1 Mapas conceituais

Para a elaboração dos mapas conceituais, o procedimento consistiu no registro na lousa de todas as palavras mencionadas, os professores deveriam se agrupar e sem interferência dos formadores categorizarem as palavras e construir uma frase e um esquema gráfico com essas categorias. Vejamos o que foi elaborado em cada grupo.

O primeiro mapa foi realizado, antes de qualquer discussão sobre o assunto, em 8/8/2003 e o segundo, no final da quarta etapa, após a formação específica, em 12/12/2003. As palavras mobilizadas nos dois mapas para facilitar a comparação, foram categorizadas e apresentadas no Quadro 17.

**Quadro 17** – Classificação das palavras mencionadas nos dois mapas conceituais.

	MAPA CONCEITUAL 1			MAPA CONCEITUAL 2		
Parte/todo	Pizza	Pedaço	Parte	Pizza		
	Bolo	Todo		Parte/todo	Fragmento	Contagem
Razão	Comparação	Proporção	Regra de três	Comparação	Proporção	Regra de três
	Receita	Diretamente	Direto			
	Razão			Razão		
Quociente	Divisão	Repartir		Divisão	Distribuição	
Medida	Altura	Régua	Distância	Unid. medida		

(continua)

**Quadro 17** – Classificação das palavras mencionadas nos dois mapas conceituais. (continuação)

	MAPA CONCEITUAL 1			MAPA CONCEITUAL 2		
Operador				Operador		
Técnicas e Nomenclatura	Denominador	MMC	Numerador	Denominador	MMC	Numerador
	MDC	Equivalente	Própria	MDC	Equivalente	Própria
	Aparente	Fatoração	Simplificação	Imprópria		
	Fator comum	Inversa	Produto			
	Reverso					
Contextos	Perímetro	Área	Porcentagem	Álgebra	Porcentagem	Aritmética
	Função	Amostra	Reais	Área	Geometria	Números
	Estatística	Racionais	Naturais	Sequência	Decimal	Grandeza
	Dia-a-dia	Problemas	Contas	Contínuo	Discreto	Concreto
	Potência			Dedutivo	Indutivo	
Aprendizagem	Dificuldade	Expectativa	Resistência	Ansiedade	Aprendizado	Qualidade
	Compartilhar	Grupos		Satisfação	progresso	Curso
				professor	aluno	curiosidade
				significado	conhecimento	grupo
				reflexão	dedução	sentido
				raciocínio	escola	abstrato
Ações	Interpretação	Compreensão	Estudar	Dúvidas	Discussão	Erro
	Leitura	Acerto	Erro	ensinar	aprender	Entendimento
	Lição de casa			construção	orientação	
Emoção				angústia	Tempestade	Choro
				desequilíbrio	canseira	emoção
				dor de cabeça	preocupação	fé

No primeiro mapa, com exceção do termo razão, nenhuma das outras concepções de números fracionários foi explicitada, embora algumas palavras possam ser associadas a elas. Por exemplo, as que associamos à concepção de medida, não acreditamos que tenham o sentido de fracionários como resultado de medição.

Por outro lado, tanto a palavra pizza como a maioria das palavras associadas à concepção de razão mantêm-se nos dois mapas, enquanto a palavra operador que não fazia parte do vocabulário do primeiro mapa, foi mencionada no segundo.

Entendemos que a associação da concepção parte-todo, mobilizada de maneira predominante pelos professores a situações que envolvem pizza da mesma forma, que as palavras que se associam à concepção de razão que se referem às técnicas utilizadas no Ensino Fundamental, são de difícil mudança para esse grupo de professores, visto que são constantes de suas práticas para o ensino de fracionários.

No primeiro mapa, foi dada grande ênfase às palavras ligadas ao conteúdo, que classificamos como técnicas e nomenclatura que diminuíram no segundo. Já as palavras que classificamos como possíveis contextos para mobilização dos números fracionários, são citadas praticamente na mesma quantidade, embora se alterem em qualidade no segundo, provavelmente, motivadas pela formação.

No segundo mapa, a palavra aluno foi lembrada, assim percebemos que as palavras classificadas em aprendizagem e ações: no primeiro mapa, referiam-se aos alunos, no segundo, à própria aprendizagem dos professores. Isto porque, no início da formação, descreviam os *não saberes* do aluno e em seu decorrer perceberam suas próprias dificuldades, como veremos mais à frente.

### 3.1.1.1. 1º mapa conceitual

#### Grupo 1

Este grupo foi formado pelas professoras Fabiana e Gina e por uma professora que por problemas de saúde, teve pequena participação nos trabalhos e será identificada em alguns diálogos por X.

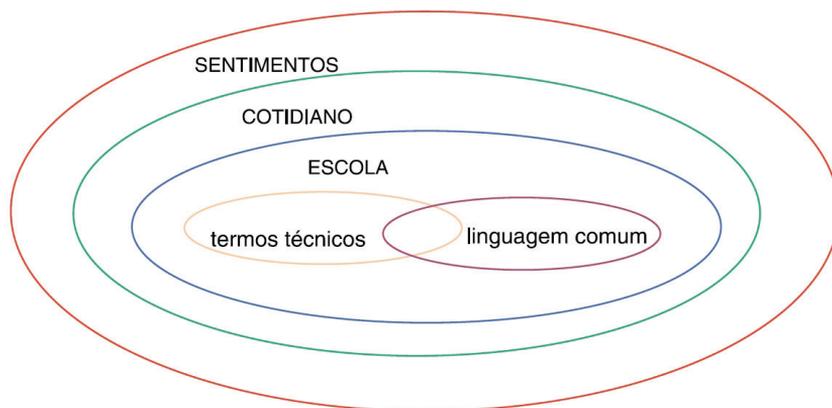
Criaram as seguintes categorias:

- Sentimentos.
- Escola.
- Termos técnicos.
- Cotidiano.
- Linguagem comum.

Elaboraram a seguinte frase:

A “missão” de compartilhar conhecimentos sobre frações envolve uma gama enorme de **sentimentos** e apesar do **cotidiano** estar ligado integralmente a esse conceito, a **escola** mesmo usando uma **linguagem comum** não atinge seus objetivos portanto os **termos técnicos** ficam apenas entre os docentes.

E o mapa conceitual da figura 29.



**Figura 29** – Mapa conceitual 1, grupo 1.

Embora o mapa nos lembre um diagrama de Venn, não pode ser interpretado dessa forma. Para esse grupo acreditamos que a escola, envolta por sentimentos está inserida no cotidiano de alunos e professores, compartilhando, tanto linguagem comum como termos técnicos. A categoria “sentimento” surgiu por ideia de uma das professoras e provocou o seguinte diálogo:

X: poderíamos colocar algo de sentimento

...

Gina: repartir é termo técnico ou sentimento?

Fabiana: no dia-a-dia, vamos precisar repartir. O conhecimento também, a gente reparte conhecimento.

Este grupo, além do conteúdo e do professor, lembrou da escola e embora a palavra “aluno” não tenha sido citada, o aluno foi lembrado em vários momentos da elaboração do mapa por seus não saberes:

Fabiana e X: o aluno não entende fator comum nem proporção.

X: denominador e numerador ele sabe, só confunde quem é quem.

Gina: meus alunos sabem regra de três, mdc, mmc.

Fabiana: ele não sabe o que é fração equivalente.

X: eles não sabem dividir, mas sabem o que é.

Gina: o termo função ele conhece, mas o conceito não.

Quanto à frase, as cores para algumas palavras foram escolhidas pelo grupo, já a palavra missão que não constava nem das palavras citadas, nem das categorias elaboradas, foi colocada durante a construção. Entendemos que a “missão de compartilhar conhecimentos”, tanto pode se referir às relações entre professores e formadores como às relações entre professores e seus alunos.

Embora apresentem uma visão poética do ato de ensinar, acreditam que ensinar frações consiste em transmitir termos técnicos, mesmo que, sem sucesso, como confirma a professora Gina: “Tudo está envolvido pelo sentimento. Os termos técnicos que gostaríamos de compartilhar com eles a gente vê que só fica entre os docentes”.

Percebemos que o ensino de números fracionários para esse grupo está centrado na transmissão de termos técnicos, da mesma forma, ensinar, para eles é transmissão de conhecimentos.

## Grupo 2

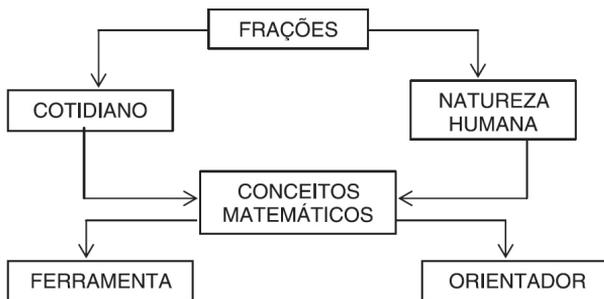
Este grupo era composto pelos professores Antonio, Bruno, Edson e por uma professora que só participou esporadicamente que denominamos de Y e categorizou as palavras da seguinte forma:

- frações
- natureza humana
- ferramenta
- cotidiano
- conceitos matemáticos
- orientador

Apresentou a seguinte frase:

*Para interpretar os conceitos matemáticos que fazem parte do nosso cotidiano utilizamos ferramentas, não esquecendo que todos temos nossos conceitos próprios, isto é a natureza humana, para isso devemos buscar auxílio de nossos orientadores.*

O mapa conceitual elaborado com base nessas categoriais foi o seguinte:



**Figura 30** – Mapa conceitual 1, grupo 2.

No mapa elaborado, nem durante sua produção, este grupo não se referiu aos alunos. No entanto fez comentários a respeito de suas próprias dificuldades, como podemos ver no seguinte diálogo:

Edson: *O problema é que o professor está preso a muitos conceitos e preconceitos e para mudar é muito difícil.*

Bruno: *É para isto que estamos aqui.*

Edson: *Na htpc<sup>1</sup> da minha escola, a gente discute textos e vamos trazendo para a escola tudo o que a gente tem lá de fora.*

Bruno: *Eu já passei por oito escolas e nunca fiz nada nas htpc.*

...

Bruno: *Não é próprio da natureza humana ser orientado. É ter dificuldade, a resistência à orientação está por trás de tudo.*

Edson: *Na minha htpc, não dá todo este tempo para fazer o trabalho. Só três minutos e acabou.*

Antonio: *Mas é que aqui é diferente.*

Notamos que o termo frações não teve lugar na frase elaborada, embora apareça no mapa. Para esses professores, provavelmente, o emprego de ferramentas que permitem interpretar os conceitos matemáticos, levando em conta que cada pessoa tem seus próprios conceitos, e estes são identificados como algo da natureza humana. Explicitam a necessidade de orientadores para auxiliá-los na interpretação de seus próprios conceitos em relação aos conceitos matemáticos. Na realidade, eles ultrapassam as frações referindo-se ao ensino e à aprendizagem da Matemática, de forma geral.

### Grupo 3

Formado pelo professor Davi, por uma professora que abandonou a formação por problemas pessoais que chamaremos de Y e pela aluna que frequentava nossos encontros. Esse grupo criou as seguintes categorias:

- frações            – cotidiano        – básico
- utilitário        – essencial

A frase elaborada foi a seguinte:

*Para obter conhecimento começamos com o básico, encontrando seu essencial para utilizá-lo, onde aplicaremos em nossas competências postas no cotidiano.*

O grupo não se refere a frações em sua frase nem coloca todas as categorias selecionadas, o sentido da palavra “utilitário”, provavelmente, ficou implícito a “utilizá-lo” na frase. De certa maneira, acredita que o conhecimento interfere na vida cotidiana dos indivíduos, desde que estes aprendam o essencial para empregar no cotidiano e torná-los competentes.

---

1 Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo.

O mapa conceitual elaborado pelo grupo está na Figura 31.



**Figura 31** – Mapa conceitual 1, grupo 3.

A preocupação está centrada no conteúdo, pois não se refere a sentimentos ou à figura do professor.

O grupo considera o ensino como se fosse um ciclo em torno do conteúdo que, parte do básico para o essencial, o útil é atingir o cotidiano, como podemos perceber no comentário do professor Davi: “Muitas vezes, em sala de aula, nós podemos usar panfletos de mercado para trabalhar números decimais”.

A dificuldade para realizar o mapa foi externada pelo mesmo professor quando fala: “Nós tivemos dificuldades. Tem duas pessoas novas (no grupo), e isso é uma tempestade cerebral”.

Notamos que, enquanto um grupo explicita a necessidade de orientação para sua prática de ensinar, o outro envolve toda a tarefa de ensinar frações em sentimentos, e o terceiro foge de qualquer aprofundamento, focando o ensino baseado no cotidiano.

### 3.1.1.2. 2º mapa conceitual

O segundo mapa aconteceu, logo após a formação específica sobre números fracionários e os professores passavam por um momento de angústia, que eles mesmos explicitavam como sendo um momento de desequilíbrio.

Nas palavras citadas, vimos que muitas se referem exatamente às emoções e sentimentos. Embora mudanças sejam percebidas na qualidade das palavras que se relacionam à palavra-chave “frações”. Os mapas e as frases elaboradas não tratam do tema nem dos conceitos a ele relacionados.

O Grupo 1 formado pelas professoras Fabiana, Gina e Carla elaborou a “frase”:  $H + S + R = C$ , habilidade + sentimento + relacionamento = conhecimento. Com variações do tipo: “se do conhecimento você tirar o relacionamento e tirar a habilidade só sobra o sentimento de frustração”.

O Grupo 2 formado pelo professor Bruno e por dois professores da escola que durante o semestre compareceram esporadicamente, criou uma frase que foi alterada durante a apresentação e tomou a seguinte forma:

*“Para falarmos de números precisamos de organização e sequência utilizando ferramentas adequadas, onde o aluno passa a irradiar suas emoções concretas e abstratas”.*

De certa forma, o grupo mostra que o conhecimento advém de interações e emoções e apresenta a necessidade de uma certa organização do conteúdo a ser ensinado, que optou por números em vez de frações.

O Grupo 3 formado pelos professores Edson e Davi e, por uma professora da escola que comparecia de vez em quando elaborou a seguinte frase:

*“A comunidade, em geral, tem o sentimento e a expectativa de que através do raciocínio o aluno possa compreender os conteúdos estudados”.*

Para esse grupo, notamos que o “conhecimento” é a compreensão dos conteúdos que o aluno adquire por seu raciocínio. A palavra sentimento não tem a conotação de “emoção”, mas, sim, de “entendimento” pois percebemos na frase que a “comunidade entende e espera que o aluno aprenda”, e o conteúdo é o centro do processo de ensino e aprendizagem.

No final das apresentações, os professores externaram suas opiniões a respeito das atividades desenvolvidas no semestre, referindo-se sobretudo ao trabalho em grupo e ao desequilíbrio que sentiram, temas que voltaremos a discutir mais à frente.

Neste segundo mapa, realizado após a formação específica, observamos que nas frases elaboradas nem a palavra fração, nem qualquer concepção de fracionários foram citadas, embora duas delas priorizem o conteúdo e uma o conhecimento; provavelmente, porque no momento da elaboração seus sentimentos de angústia eram explícitos de modo claro. O grupo mostrou-se confuso com a constatação de não saber um assunto que acreditava conhecer profundamente.

Entre os dois mapas, a mudança mais sensível notada foi em relação às palavras citadas. Sobretudo, as que se referem às emoções, pois, no início das atividades os professores esperavam receber ajuda para fazer com que seus alunos aprendessem a tratar com fracionários. Mas, durante a formação, perceberam que, eles próprios, precisavam construir novos significados para esse conteúdo, este fato fez com que as emoções fluíssem durante quase toda a formação. A palavra tempestade desta categoria refere-se à “tempestade cerebral”, citada em alguns encontros.

### 3.1.2 Estudo da organização didática elaborada na formação

Nesta parte de nosso trabalho, foram analisadas as sequências elaboradas pelos professores, durante a formação, para o ensino de números fracionários

para a quinta série que serão consideradas, como Organizações Didáticas (OD) construídas em uma instituição escolar. Para Bosch e Gascón, as OD e OM escolares tornam-se transparentes para os sujeitos da instituição que as assumem e as transmitem por meio de suas práticas institucionalizadas, que:

podem ser descritas e evidenciadas empiricamente sustentadas por uma metodologia que considere as práticas e os discursos existentes na instituição considerada, bem como as «opiniões» explícitas desses sujeitos. (BOSCH e GASCÓN, 2002, p. 9, tradução nossa)

De acordo com Chevallard (1999), convém aprofundar o estudo das Praxeologias, mediante um estudo empírico com análise dos dados recolhidos de observação. Assim, uma Organização Didática de uma instituição escolar articula-se, segundo o autor, em tipos de tarefas (geralmente, cooperativas), em técnicas, em tecnologias, em teorias mobilizadas para o estudo concreto de um determinado tema, em uma instituição concreta. Em outras palavras, estudar uma OD é o mesmo que estudar a OM desse tema, identificando as ações que podem ser vistas como didáticas.

Para Chevallard (1999), qualquer que seja o caminho do estudo escolhido constata-se que, certos tipos de situações, estão sempre presentes, de maneira variável, tanto no plano qualitativo como no quantitativo. A esses tipos de situações, o autor denomina de *Momentos de Estudo* ou *Momentos Didáticos*.

A maneira que uma determinada Organização Didática coloca em prática uma certa Organização Matemática pode ser analisada, primeiramente, se interrogando a maneira que realiza os diferentes momentos do estudo. (Chevallard, 2002, p. 12, tradução nossa)

Os momentos didáticos são caracterizados mais por uma realidade funcional do estudo, do que por uma realidade cronológica que permite descrever uma construção elaborada por ensaios, retoques, paradas e avanços, segundo Chevallard (1999).

Assim, empregando a definição que o autor dá para cada um desses momentos, faremos a análise das OD elaboradas pelos professores durante a formação, identificando a OM que mobilizaram por meio dos tipos de tarefas e técnicas que apresentam nessas OD.

### 3.1.2.1. 1º momento

*É aquele do primeiro encontro (ou reencontro) com a Organização Matemática que está em jogo. Consiste em encontrar a OM por meio de, pelo menos,*

*um dos tipos de tarefas constitutivas dessa Organização que não determina completamente a relação com o objeto, pois se constrói e modifica-se no processo de estudo.*

### 3.1.2.2. 2º momento

*É o da exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a esse tipo de tarefa, pois o que está no centro da atividade matemática é mais a elaboração de técnicas do que a resolução de problemas isolados. O estudo de um problema particular, de um tipo estudado, aparece, assim, não como um fim em si mesmo, mas, como um meio para a construção de uma técnica de resolução que, a seguir, será o meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo.*

Identificaremos os tipos de tarefas que os professores apresentaram, na primeira OD elaborada individualmente e na construída no final da formação específica, em grupo, para analisar os dois primeiros momentos do estudo, visto que se torna mais fácil perceber as técnicas diretamente relacionadas às tarefas apresentadas.

No primeiro encontro, depois do primeiro mapa conceitual, a maioria dos professores apresentou, como prevíamos, um plano de aula, entendendo-o por uma sequência de ensino que tinha mais o sentido de “relembrar” o conteúdo que os alunos deveriam saber do que ensinar números fracionários. Dessas, apenas duas se apresentavam com alguma estrutura sequencial, a maioria apresentou apenas uma atividade que provavelmente, ocuparia uma aula. Nos trabalhos, identificamos os seguintes tipos de tarefas:

#### **1º tipo** – Associar fracionários a figuras dadas

As tarefas deste tipo apresentam figuras planas divididas inteiramente em partes congruentes, sendo uma delas precedida de exemplos. A técnica consiste na dupla contagem das partes.

#### **2º tipo** – Dividir um inteiro em partes iguais

Nestas foram apresentadas figuras de superfícies para serem divididas em partes “iguais”. Uma delas solicita a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero e a seguinte construção para dividi-lo:

Tarefa: Dividir os lados de um triângulo equilátero, com auxílio de barbante, em cinco partes iguais e por meio de retas paralelas dividir o triângulo em 25 triângulos menores, mostrando que esses segmentos estão

paralelos. A seguir, identificar figuras geométricas no interior do triângulo maior: dois losangos azuis, um trapézio vermelho, dois hexágonos amarelos e seis triângulos verdes. Finalizando, preencher uma tabela que associa a cada figura a parte do todo. (Prof. Fabiana, OD individual)

Logo a seguir, a professora recomenda:

Comentar com os alunos que, para obter uma fração de um todo contínuo, significa dividi-lo em partes com medidas iguais, enquanto, para obter uma fração de um todo discreto, é preciso dividi-lo em partes iguais que tenham a mesma quantidade de objetos, pessoas, elementos.

Nessa tarefa, a ação do aluno está centrada na construção do triângulo e suas divisões baseadas no Desenho Geométrico e emprego de ferramentas de desenho. A recomendação da professora sugere a técnica da dupla contagem das partes para a identificação de um fracionário, tanto em grandezas contínuas como em discretas.

### **3º tipo** – Comparar partes de grandezas contínuas associadas a números fracionários

As tarefas solicitam dobradura e recorte de círculos e retângulos de papel, além de pedaços de barbante. Uma outra sugere o emprego de material manipulativo com retângulos de cartolina coloridos, segundo a divisão em partes de cada retângulo. O objetivo desse tipo de tarefas é a comparação dos fracionários obtidos, para que os alunos percebam fracionários equivalentes.

A professora Fabiana orienta o professor para a tarefa referente ao círculo:

Peça aos alunos para sobreporem as peças e escreverem todas as relações possíveis entre as diferentes peças que foram cortadas. Espera-se que os alunos descubram todas as relações possíveis e associem escritas simbólicas a cada uma das descobertas que fizeram.

A tarefa referente aos pedaços de barbante é apresentada pelos seguintes procedimentos:

Distribuir cinco pedaços de barbantes que possuam o mesmo comprimento. Pedir aos alunos que dobrem um dos pedaços do barbante ao meio e cortem. Repita o procedimento com os outros pedaços, dividindo-os e cortando-os em três, quatro e cinco partes iguais.

Colar no caderno cada pedaço e escrever a fração correspondente a cada parte.

Traçar um segmento de reta no caderno, utilizando a régua não graduada e representar as frações  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/8$  e  $2/3$  nesse segmento. (Prof. Fabiana, OD individual)

Nos procedimentos sugeridos pela professora, percebemos concretamente a discretização do contínuo provocada pelo corte do pedaço do barbante e, ainda, a perda do referencial do inteiro, porque depois do corte dos barbantes do aluno passa a ter dois, três ou mais pedaços de barbante. A atividade com o segmento de reta aparece, como uma tentativa de evitar que esses fatos aconteçam.

#### **4º tipo** – Determinar medidas de objetos

Apresenta duas tarefas solicitando medidas de comprimento e de área das faces das caixas.

A prof. Gina, com o objetivo de: *conscientização quanto ao problema do lixo que afeta o planeta Terra e utilizar sucatas para demonstrar que as frações correspondem a partes iguais, independentes do objeto*, solicita a leitura do texto: *Reciclar é preciso*<sup>2</sup> para se valer de seis caixas de papel (sucatas), com diferentes dimensões, em algumas tarefas.

Embora solicite a medição do comprimento e da medida da área das faces das caixas, estas são feitas pela contagem, visto que o aluno utilizaria a régua para determinar as medidas e a divisão dessas medidas para determinar a fração que corresponde às partes congruentes das faces das embalagens.

#### **5º tipo** – Determinar a quantidade que corresponde a partes do inteiro

Mobilizando a concepção de operador, uma das tarefas deste tipo solicita o cálculo de partes dos ingredientes de uma receita de bolo.

Uma outra solicita o cálculo de parte da distância entre duas cidades. Nesta última, o professor sugere que a medida seja encontrada por um esquema de medida (segmento) com a mobilização da concepção parte-todo.

---

2 O texto a que se refere faz parte da Coleção Meio Ambiente da Editora Novas Ideias, a que não tivemos acesso.

### 6º tipo – Determinar uma razão

A tarefa solicita a razão entre as medidas das áreas das partes e da face da caixa em que essas partes estão contidas, empregando os resultados de tarefas anteriores.

Nas tarefas com as caixas, a prof. Gina sugere a necessidade de discutir com o aluno: *o que cada parte representa na face que a contém* e no final recomenda que encaminhem as sucatas para reciclagem. O diferencial na proposta desta professora é relacionar as tarefas que apresenta, além de associar a uma mesma situação as concepções de fração, como parte-todo, medida e razão.

### 7º tipo – Determinar frações por pares de números inteiros de 2 a 9

Em uma situação, estritamente numérica e mecânica, sem parâmetros inclusive para definir o que seria numerador e denominador, um professor sugere um jogo com cartas de baralho, na qual o aluno, utilizando somente as cartas que apresentam números, sorteia quatro dessas, para relacionar seus números formando frações. Ganha a jogada quem formar frações maiores e o jogo, o que possuir maior quantidade de cartas no final da partida.

Provavelmente, o professor tenha pretendido durante a aplicação do jogo, encaminhar o aluno a perceber a melhor maneira de obter “frações maiores” com os números sorteados. Entretanto, o aluno não conseguirá perceber que o fracionário é um número, porque a tarefa leva-o a registrar fracionários com base em dois naturais quaisquer que se coloca um acima e outro abaixo de um traço.

O professor Antonio justifica assim esta tarefa:

Saber conceituar numerador e denominador, divisão de frações, números decimais, simplificação de fração, frações próprias e impróprias, fazendo uso da metacognição, podendo, assim, o professor estabelecer o conhecimento cognitivo em seus alunos, alcançando suas expectativas, sabendo lidar com as questões de aprendizagem.

Notamos incoerência entre a tarefa e a justificativa que o professor apresenta, pois, enquanto esta apresenta um discurso de preocupação com a aprendizagem do aluno, a tarefa em si provoca obstáculos didáticos difíceis de superar depois, como já citado anteriormente.

### 8º Tipo – Pesquisar o significado da palavra fração

A técnica apresentada pela professora X é a de busca em dicionários, livros didáticos e paradidáticos, para tratar do assunto: *compreensão do significado da*

*palavra fração e o que representa em nosso cotidiano.* Sugere que, na aplicação, se coloque no quadro uma lista de todos os significados sobre frações e que cada aluno fale sobre uma das palavras encontradas, concluindo faz uma observação: *observe se cada aluno fala satisfatoriamente sobre cada palavra.*

Percebemos que apenas duas professoras apresentaram tarefas que se relacionam e mobilizam outras concepções, além de parte-todo; os outros mostraram xérox de diversos livros didáticos em atividades isoladas sem conseguir alguma estrutura organizacional. E, ainda, a técnica para resolver as tarefas apresentadas, de maneira predominante, é a dupla contagem das partes, embora uma das tarefas solicite a medição, sendo feita também pela contagem, visto que o aluno utilizaria a régua para determinar partes congruentes das embalagens que seria a mesma técnica utilizada nas tarefas que envolvem grandezas discretas.

Em vista dessas constatações, decidimos que o trabalho em grupo seria o ideal para a troca das coletas individuais e elaboração de uma sequência por grupo.

Dessa forma, após a apresentação dos trabalhos individuais, sugerimos em continuidade à formação que elaborassem, em grupos, uma sequência para o ensino de fracionários para uma quinta série. Foi sugerido que elaborassem um plano determinando os passos que deveriam seguir, para que os alunos *aprendessem* números fracionários, pois isto permitiria melhor escolher as atividades que iriam à sala de aula. Após alguns encontros e muitas reflexões concluíram que o melhor caminho era o seguinte:

- Dar significado,
- Relacionar o que foi feito nessa parte com situações da realidade e
- Apresentar problemas de aplicação.

Essa decisão, como consenso de todos os grupos, colocou a questão de como dar significado aos fracionários, como prioritária, embora não tivessem clareza sobre o assunto e não conseguissem explicar, o que fazer, para que os alunos dessem sentido aos fracionários.

Sugerimos aos grupos que buscassem respostas na história da Matemática, imediatamente um dos professores manifestou-se a respeito do livro de História da Matemática do Boyer, afirmando: “*Eu li o Boyer. Eu preciso ler mais umas dez vezes. [...] Eu tive dificuldade para entender*” (Prof. Bruno, obs. 22/8/03, p. 3).

Em continuidade à discussão, outro professor, sugeriu que um bom caminho seria utilizar o dicionário. O entendimento de que a consulta do dicionário é suficiente para garantir a compreensão dos diversos significados para fracionários, perseguiu-os até a quinta etapa da formação.

No encontro seguinte, trouxeram os dicionários da própria escola e vários livros de História da Matemática que serviram de plano de fundo para amplas discussões e a conclusão de que as concepções, retiradas do dicionário, garantiriam que os alunos construíssem significados aos números fracionários:

- |                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| 1) pedaço de um todo | 2) partes iguais de um todo |
| 3) unidade de medida | 4) distribuição             |
| 5) divisão           | 6) razão                    |
| 7) proporção         | 8) porcentagem              |
| 9) cota              | 10) quota.                  |

Algumas falas da discussão que ocorreu na consulta ao dicionário são reveladoras das dificuldades dos professores em justificar as concepções de fracionários que encontraram no dicionário no dia 22/8/03:

A fração do pão é uma das partes mais importantes da missa. (Prof. Gina, p. 4).

A hora que o padre tira o primeiro pedaço do pão, ele tira uma fração. Depois o segundo pedaço, o padre também tira uma fração. (Prof. Gina, p. 5).

Eu acho que temos uma fração no primeiro pedaço. Depois, temos outra fração para tirarmos o segundo pedaço. (Aluna, p. 6)

Cada vez que eu vou tirar um pedaço, eu tenho que dividir em partes iguais. (Prof. Gina, p. 6).

Um pedaço de pão para ter uma relação com a fração que a representa é necessário saber o quanto pesa o pedaço de pão e o peso do pão todo. (Prof. Gina, p. 14).

Durante a formação específica, os professores comportaram-se mais como receptores de informações do que como aprendizes, lançando poucas questões ou dúvidas, provavelmente, pelo entendimento de que, naquele momento, estavam “assistindo” à aula. A grande novidade para eles foi a concepção de operador que não apareceu explicitamente durante todo o trabalho.

No dia da apresentação, alguns professores pronunciaram-se sobre a novidade: “*Vou chegar em casa e pegar alguns livros para verificar esse novo conceito*”. (Prof. Fabiana, 17/10, p. 16). A professora Gina logo identifica um problema e afirma que ele pede para encontrar o operador e conclui: “*gostei do operador*”. Os professores afirmam que nunca haviam pensado no papel transformador dos números fracionários e que, por isso, ele não apareceu nas discussões anteriores.

Na segunda fase do projeto, que tinha como objetivo a produção em grupos de uma Organização Didática que considerasse os passos que determinaram para essa elaboração: dar significado, relacionar o que foi feito nessa parte com situações da realidade e apresentar problemas de aplicação, bem como as dez concepções que selecionaram no dicionário, percebemos que o grande desafio dos grupos era decidir quais atividades selecionar para dar *significado* aos fracionários. Para solucionar essa dificuldade, apoiaram-se em livros didáticos e nos *Experiências Matemáticas*.

Ainda, no final desta fase, os grupos não tinham uma sequência preparada, mas um esboço da elaboração pretendida, um plano de ação. Na apresentação desses planos, pedimos que identificassem com os números correspondentes as concepções que seriam mobilizadas em cada etapa, de acordo com a numeração apresentada na página anterior deste trabalho:

### Grupo 1

Formado pelos professores Antonio e Bruno e por uma professora que vinha eventualmente, apresentou o seguinte planejamento:

1. Pesquisa.
2. Dobradura. Operações simples, propriedades simples de figuras geométricas. (1 e 2 para dar significado)
3. Colorir figuras geométricas já divididas, comparar novas figuras.
4. Fornecer frações numéricas para representar na forma geométrica.
5. Apresentar figura para ladrilhamento (nova divisão para sobreposição).
6. Criar situações para representar.
7. Problematização: relacionar conceito de fração com situações de divisão.
8. Tangran – generalizar. (obs. 12/9/03, p. 6-7)

### Grupo 2

Formado pelos professores Davi e Edson e pela aluna concluíram o seguinte:

1. O que sabe sobre fração (D).
2. Pesquisar no dicionário o significado e origem (C).
3. Criar frases com a palavra e
4. Representar tudo sobre fração (exercícios) (B – ensino) (1, 2 e 5).
5. Demonstrar o que aprendeu e tirar seu próprio conceito (A).
6. Ficha de acompanhamento.  
(Aplicar através de passo a passo).

No final, medir o nível de conhecimento em:

- a) Representação e formação de conceito.
- b) Representação (tudo sobre fração).
- c) Pesquisar o significado.
- d) Conhecimento prévio. (obs. 12/9/03, p. 7)

### Grupo 3

Formado pelas professoras Carla, Fabiana e Gina que, no momento da apresentação, estavam em um impasse: utilizar área para razão e receita de bolo

para proporção, pois estavam preocupadas em relacionar fração com divisão e com decimal.

Como já tinham um plano mais estruturado, apenas o complementaram:

1. Pesquisa (livros didáticos, dicionários, Internet) individual, em pequenos grupos e no grupo todo (a sala). (A princípio, pensaram nessa pesquisa em casa, mas isso pode não dar certo. Preferiram usar a biblioteca da escola e a Internet em casa.)
2. Dobraduras: retângulos, circunferências (1 e 2). (o objetivo é mostrar que meio é meio, seja no retângulo, na circunferência, em qualquer figura. Usando circunferência, farão recortes para mostrar equivalência.)
3. Recortes da circunferência para trabalho com equivalência (1, 2 e 4).
4. Barbante – medida (1, 2 e 3). (Meio é meio tanto na circunferência como no barbante).
5. Ladrilhamento do triângulo equilátero (1, 2 e 4) com triângulos e outras figuras geométricas.
6. Unidades discretas para conceito de fração (4)
7. Área para trabalho com razão (6).
8. Receita de bolo e outras para proporção (7)
9. Como relacionar fração, divisão e decimais (8). (obs. 12/9/03, p. 7)

As propostas apresentadas têm em comum levar os alunos a pesquisar sobre números fracionários, provavelmente, isto se justifique pelo primeiro objetivo do trabalho que realizavam ser *“conduzir o aluno a construir significados para os números fracionários”*.

No entanto, ainda nesse momento da formação os professores estavam tentando reproduzir na formação que pretendiam, o que haviam vivenciado em um de nossos encontros: a busca de significados para fracionários no dicionário. Como a questão do significado surgiu durante as discussões e de imediato procuraram respostas no dicionário que, de alguma forma, levou-os a ter contato com aspectos desconhecidos da palavra “fração”, pretendiam reproduzir a experiência com os alunos.

Enquanto os Grupos 1 e 3 preocuparam-se em considerar as concepções consideradas antes para fazer parte da sequência, o Grupo 2 apresenta uma proposta que coloca o aluno, buscando sozinho sua aprendizagem e o professor no papel de simples avaliador, usando uma ficha de acompanhamento. Da criação de frases com a palavra fração, passam imediatamente para ensinar “representar tudo” sobre fração e, logo para “demonstrar o que aprendeu”.

Este Grupo durante a elaboração da OD mostrou-se inseguro em buscar qualquer caminho que não fosse o livro didático para o ensino de fracionários e, por isso, optou por uma proposta de ensino que tinha como ponto forte, a ficha de acompanhamento que permitiria identificar os alunos que não

aprenderam para serem “trabalhados” de imediato. Para eles, isto seria uma avaliação constante.

A proposta do Grupo 1 justifica-se pela concepção parte-todo e sua relação com a concepção de quociente e com a mudança de registro tanto do figural para o numérico como no sentido contrário. No entanto, toda a proposta é para o tratamento de superfícies.

Já o Grupo 3, embora privilegie o trabalho com superfícies, apresenta a proposta do trabalho com grandezas discretas. Por outro lado, mostra o interesse em relacionar a concepção parte-todo com a de razão por meio de equivalência e medidas de áreas e a concepção parte-todo com a de quociente, relacionando fração, divisão e decimais. Demonstra a intenção de trabalhar com a mudança de registro figural para o numérico, bem como da escrita fracionária à decimal.

Durante essa fase dos trabalhos, um fato importante foi constatado. A colaboração que havia entre esses professores, como aprendizes de Geometria, agora, estava ausente. Enquanto a coleta, de situações para o ensino de fracionário, realizada individualmente não apresentasse qualquer problema, o uso desse material para uma produção em grupo trouxe uma exigência para esses professores que não estavam habituados a enfrentar.

Acreditamos que, para esses professores, uma formação continuada traduz-se em voltar a ser aluno, ele participa para aprender alguma coisa, só que este aprender resume-se em obter exemplos do saber-fazer, em obter um modelo de como trabalhar algum assunto que seja discutido com eles, como alunos, para só, então, transformar-se em alguma mudança de prática. Mudança essa que não se garante, porque as formações continuadas, geralmente, não preveem a elaboração, pelo próprio professor de algum material para ser aplicado em sala. Quando se preocupam com alguma mudança, esperam que os professores apliquem o material recebido para uma discussão posterior baseada em seus depoimentos.

Em vista da dificuldade em transpor suas decisões, para a Organização Didática que elaboravam e, do predomínio de tarefas isoladas que, em sua maioria, associa só a concepção parte-todo. Iniciamos a formação específica acreditando que, às vezes, é necessário o formador tentar superar as dificuldades no lugar do aluno. Essa formação constou de uma retrospectiva histórica focando os tipos de tarefas que estão na razão de ser dos números fracionários, pois estão na sua gênese, além do desenvolvimento das teorias algébricas que justificam toda a construção do campo dos números racionais. Esperávamos que eles se apropriassem dessas informações e esboçassem nas escolhas das tarefas alguma relação com o desenvolvimento dos conhecimentos de medida, comparação e distribuição, apresentado no esquema da página 97 deste trabalho.

Em seguida, uma discussão mais teórica a respeito das concepções de números fracionários, explicitando tipos de tarefas que associam cada uma das concepções,

e as possíveis técnicas que as resolvem, baseando-nos na OM construída como referência. O material utilizado nesta parte da formação encontra-se no Apêndice A, deste trabalho.

Elaboramos a formação específica sobre as concepções de fracionários iniciando por uma discussão rápida sobre a relação entre construção de significados e concepções, sobre a quantificação de grandezas discretas e contínuas e ainda a respeito de representações.

Tratamos as concepções de fracionários parte-todo, medida, quociente, razão e operador, destacando as características de cada uma, diferentes representações e possíveis dificuldades associadas às resoluções de algumas tarefas. Não tratamos todos os tipos de tarefas apresentados em nossa OM de referência, mas selecionamos aqueles mais importantes para enfatizar as características de cada concepção.

Para se familiarizar com as novas ideias ao final dessa apresentação entregamos uma lista com 26 tarefas, envolvendo fracionários, em situações que poderiam ser utilizadas em todo o Ensino Fundamental, para que determinassem a série mais propícia para ser aplicada à concepção que estava associada, bem como as soluções possíveis.

Essas discussões foram até o dia 14/11 e intercaladas com leituras e discussões do PCN, da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e Aprendizagem Significativa em material elaborado pela formadora.

Ao ter como referência essas teorias, tínhamos como objetivo da formação específica levar os professores a compreender que o conjunto de situações escolhido para trabalhar em sala de aula permitiria aos alunos construir seu próprio significado para números fracionários. Por sua vez, uma boa escolha dessas situações reflete-se na criação de um ambiente propício à aprendizagem, que poderia ser obtido pela constatação de que muitas situações, embora associadas a mesma concepção, pedem a mobilização de técnicas diferentes dependendo dos tipos de tarefas selecionados.

A orientação pretendida com a formação específica era, para que os professores mobilizassem diversas concepções de fracionários que, de certa forma, o dicionário explicitou sem contudo dar exemplos de situações que poderiam estar presentes em um ambiente de formação. Com relação à aprendizagem dos alunos, enfatizamos a Teoria das Situações de Guy Brousseau que preveem as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, como sendo:

Em uma situação de ação é dado para o aluno um problema em cuja solução aparece o conhecimento que se deseja ensinar, por sua vez, o aluno age e julga o resultado de sua ação, abandonando ou melhorando seu modelo, além de expressar suas escolhas e decisões pelas ações. Na situação

de formulação o aluno troca informações com uma ou mais pessoas, é o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. Na etapa de validação o aluno deve mostrar porque o modelo que criou é válido. As situações de institucionalização são aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o saber, tornando-o oficial (SILVA, MANRIQUE, ALMOULOU, 2004, p. 9).

No final da formação, os grupos retornaram ao trabalho de elaboração da Organização Didática, buscando o material que tinham da etapa anterior. Quando, mais tarde, os questionamos sobre a não utilização do material da formação na elaboração da OD, disseram-nos que não queriam copiar nosso trabalho, embora tenham utilizado livros.

A presença do livro didático e seu não questionamento é tão forte na prática desses professores que nos levou a inferir que, a não utilização do material da formação na elaboração das OD, possa ser justificada por falta de hábito de leitura e mesmo compreensão desses professores de textos que fogem do padrão dos textos didáticos apresentados nos livros.

As Organizações Didáticas finais foram entregues à formadora, no dia 12/12/2003, para que fossem analisadas e devolvidas para novas discussões no primeiro encontro do ano seguinte. Como parte desse momento de reencontro com a OD em construção e exploração de técnicas, apresentamos, a seguir, os tipos de tarefas da Organização Didática elaborada por cada grupo.

### 3.1.3 OD1

Esta organização foi elaborada pelas professoras Carla, Gina e Fabiana com as atividades apresentadas com objetivos, conhecimentos envolvidos (conteúdos), recursos necessários e respostas esperadas que continham os seguintes tipos de tarefa:

#### **1º tipo** – Pesquisar o significado da palavra fração

Tarefa:

- a) Pesquisar em dicionários, livros didáticos e paradidáticos, Internet o significado da palavra fração.
- b) Registrar pesquisa

- c) Formar grupos com quatro alunos para troca de informações e conclusão sobre o significado da palavra fração.
- d) Cada grupo deve expor suas definições sobre a palavra “FRAÇÃO”. (OD1, 12/12/03)

Acrescentam, “Espera-se que o aluno defina o significado da palavra fração, por meio de pesquisas e trocas de informações e conhecimentos, socializando-os”.

### **2º tipo** – Comparar partes de grandezas contínuas associadas a números fracionários

Uma das tarefas solicita dobradura de papel sulfite e a relação de números fracionários a cada uma das partes. Uma outra atividade solicita o desenho de círculos para serem dobrados e recortados em 2, 4, 8, e 16 partes para posterior comparação, tendo como objetivo conduzir os alunos a perceber como os círculos são diferentes *“as peças correspondentes à mesma fração não são do tamanho que a do seu colega”*. Esperam também que os alunos associem escritas simbólicas do tipo:  $\frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{16}$  ou  $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ ,  $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \dots$ ,  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8}$ .

Além de explicitar que o objetivo é apresentar a noção de números fracionários, como a parte de um todo dividido em partes iguais, na tarefa com os círculos, alertam os alunos para alguns detalhes como:

Chamamos de centro da circunferência o ponto onde o compasso fez o “furo” e nomeamos esse ponto com letra maiúscula, pois todo ponto é nomeado com letra maiúscula de preferência do nosso alfabeto. E circunferência é o traço deixado pelo compasso e chamamos de círculo o objeto formado.

Não deixam claro o que significa “partes com medidas iguais” que poderia ser interpretado, como sendo as medidas dos lados das partes e sugerir congruência.

### **3º tipo** – Identificar partes de um inteiro

Esta tarefa fazia parte da OD individual da prof. Gina que se referia à divisão de um triângulo equilátero em 25 triângulos congruentes. Nesta nova versão, elas orientam o aluno a construir com régua e compasso, o triângulo equilátero e dividi-lo em triângulos, losangos, hexágonos e trapézios que serão recortados para serem comparados e permitir o preenchimento de um quadro com frações equivalentes.

Em outra tarefa desse tipo, agora envolvendo os alunos da classe, isto é, tratando de grandeza discreta, solicitam que metade, um terço, um quarto e um quinto dos alunos permaneçam em pé. No final, sugerem variações da tarefa, supondo que a classe tenha 40, 48 e 51 alunos.

Para essa tarefa, provavelmente, utilizariam a técnica de dividir a quantidade de alunos pelo denominador da fração unitária e mostrar a questão do campo numérico, na qual o problema está sendo trabalhado com a impossibilidade de resolução de uma das situações. Esse assunto foi alvo de discussões durante a formação, pois um dos professores afirmou que resolveu um problema com os alunos que resultava em “4,5 torneiras”, fato que se lembrou no final da formação com a frase: “*quanta besteira, estou lembrando das 4,5 torneiras!*”

Em outra tarefa desse tipo, solicitam a confecção de uma bandeirinha de São João para determinar a parte de papel que foi descartada, esperando que os alunos “*confeccionem bandeirinhas de formas diversificadas, originando diferentes respostas*”. Nesta afirmação, podemos inferir uma possibilidade de que esperam a construção de diferentes técnicas para resolver a tarefa proposta, embora não explicitem, quais seriam essas possibilidades.

Um dos objetivos dessa tarefa é o “*desenvolvimento (pelo aluno) de raciocínio proporcional, abordando a relação das frações com o conceito de razão*”, que não seria possível com os dados apresentados nas tarefas.

#### **4º tipo** – Comparar números fracionários

Na tarefa, é pedido que o aluno pinte  $\frac{1}{7}$  de uma folha de papel sulfite e  $\frac{1}{5}$  de outra folha idêntica, sem dobrar ou recortar, para decidirem qual fração é maior. A técnica para pintar a parte da folha solicitada associa a medição das dimensões da folha para dividi-la em partes congruentes. Embora tenham explicitado como objetivo tratar medidas de comprimento e de área, não pedem esta última.

#### **5º tipo** – Resolver problemas relacionados à razão

Uma das tarefas é igual à OD anteriormente apresentada e trata da receita de massa de torta. As outras são:

- a) Se numa sala de aula tem 40 alunos e metade desses alunos não gostam de Matemática, quantos alunos gostam de Matemática? E se a classe tivesse 48 alunos? E se fossem 60 alunos?
- b) Célia comeu  $\frac{1}{4}$  de um pacote com 20 biscoitos. Quantos biscoitos desse pacote ela ainda tem para comer? E se o pacote tivesse 24 biscoitos? E se o pacote tivesse 12 biscoitos?

- c) Por causa da greve de ônibus,  $\frac{2}{3}$  dos alunos faltaram na escola. Se compareceram 60 alunos, quantas pessoas estudam nessa escola?

Nesta tarefa, esperam que os alunos utilizem estratégias diferentes na resolução dos problemas, o que indica a possibilidade da construção de técnicas diferentes para uma mesma tarefa; no entanto, não explicitam quais seriam possíveis e pedem que os alunos construam tabelas para resolver cada um dos problemas. Provavelmente, em detrimento a utilização da regra de três, visto que a prof. Gina, integrante do grupo, tem comprovadamente preferência pela utilização dessa técnica, como podemos ver nas afirmações:

Eu tinha um monte de exercícios de regra de três na graduação, que resolvia tudo e me achava inteligente. (Prof. Fabiana, 17/10/03, p. 24).

Eu uso (regra de três) porque quando eu fiz o primário eu tinha aritmética e quando fui para o ginásio e veio a álgebra, eu achei muito mais fácil para resolver. (Prof. Fabiana, 7/11/03, p. 3)

Fabiana não vive sem régua, nem regra de três. (Prof. Gina, 14/11/03, p. 25)

De acordo com os critérios de completitude, apresentados anteriormente, entendemos que esta OD apresentou uma certa integração de tipos de tarefas, buscando relacionar as concepções parte-todo, medida e razão, embora não mobilize Organizações Locais para as diversas concepções tratadas na formação. A OD, de certa forma, permite o desenvolvimento de critérios de escolha de técnicas na medida que os alunos podem identificar um fracionário por dobradura, por uma construção geométrica ou por ações de medição. No entanto, não apresenta tarefas reversíveis, embora mostre situações que envolvem grandezas discretas que não possuem solução.

### 3.1.4 OD2

Esta foi elaborada pelos professores Y, Bruno e Antonio.

#### **1º tipo** – Dividir figuras em partes iguais

As tarefas apresentam círculos, retângulos, quadrados, triângulos, estrela, hexágono (convexo e não convexo), para serem recortados e divididos em duas, três, quatro, ...partes iguais, sem associar o fracionário correspondente, outras o associam os fracionários, mas, com o objetivo de trabalhar a equivalência de fracionários.

## 2º tipo – Associar fracionários a figuras dadas

A primeira tarefa apresenta 15 figuras que representam grandezas contínuas e discretas; as primeiras divididas em partes congruentes e as outras em agrupamentos convenientemente apresentados; solicita a identificação das frações meio, um terço, um quarto, ..., a quinta parte, etc. nas figuras.

Em outra tarefa deste tipo, apresentam quatro retângulos divididos em quatro partes congruentes e a representação simbólica dos fracionários:  $1/2$ ,  $2/4$ ,  $3/4$  e  $4/4$  para serem pintadas. Em outra, colocam dois retângulos iguais aos anteriores para que o aluno pinte  $5/4$  e outros dois para que identifique  $6/4$ .

Em uma outra tarefa desse tipo, apresentam figuras divididas em partes não congruentes (na forma de bandeirinhas), solicitando que “*assinale as bandeirinhas, cuja área colorida corresponde à metade da área total*”.

Uma dessas tarefas associa a medição para recortar tiras de papel que permite trabalhar a equivalência de fracionários.

Percebemos que, embora muitas discussões tenham ocorrido a respeito da não coerência da concepção parte-todo para frações maiores que a unidade, ela aparece nesta organização. Durante a elaboração da organização, o prof. Bruno faz a seguinte sugestão: “*podíamos começar com uma atividade sem que seja exatamente de fração, mas que leve à fração*” (Prof. Bruno, 5/9/03, p. 5).

No entanto, além de não perceber que sua sugestão conduziria à razão de ser dos números fracionários, não consegue transformar sua ideia em tarefas reais para serem aplicadas. Nesse processo de elaboração da organização desse grupo, a dificuldade pode ser sentida no seguinte diálogo do dia 26/9/03:

Vamos montar (a sequência). Davi, você tem mais figura aí? Podemos xerocar? (Prof. Bruno, p. 2)

Eu vou xerocar. Este aqui podemos usar para dobradura e eles identificam meio nas figuras de tamanhos diferentes. (Prof. X, p. 2).

Davi eu fui tirar xérox e me perdi. (Prof. Bruno, p. 2)

Davi: Tinha muita coisa?

Na semana seguinte, discutindo sobre o emprego de dobradura ou tangran, o professor Antonio comenta: “*Eu achei neste livro como construir o tangran, mas está em Geometria*” (12/9/03, p. 3), o que nos leva a perceber o quanto esse professor está submetido à organização curricular apresentada nos livros didáticos e a falta de autonomia para relacioná-los.

Em termos de completude, esta organização é muito rígida, não cumprindo praticamente nenhuma das condições para ser eficiente em sala de aula. Constatamos que só utilizaram a técnica da dupla contagem das partes justificadas pela concepção parte-todo. Além disso, ela não foi apresentada com uma sequência

clara entre as escritas dos professores, muitos xérox de páginas inteiras de livros e do *Experiências Matemáticas*.

### 3.1.5 OD3

Esta Organização Didática foi elaborada pelos professores Davi, Edson e pela aluna e apresenta um único tipo de tarefas: associar fracionários a figuras, retiradas de livros didáticos, que representam tanto grandezas discretas como contínuas, desta última aparecem além de figuras planas, algumas no espaço, mas todas apresentam divisões em partes congruentes.

Este grupo, no dia 5/9/03, na dúvida sobre introduzir ou não letras para definir as frações, decide que tal introdução pode ser feita com letras por intermédio da definição formal, utilizando o conjunto dos naturais. Após a decisão tomada, o Prof. Edson faz a seguinte afirmação: “*Essa discussão é que é importante, para montar a atividade é simples*” de imediato o prof. Davi responde: “*não é nada fácil escrever sobre o que fazer na sala de aula*” (5/9/03, p. 15).

Este diálogo mostra a dificuldade do grupo em transformar em ações suas decisões, pois, embora tenha decidido iniciar pela definição, foi buscar no livro, o que lhe era familiar, apresentando um único tipo de tarefa baseada em figuras totalmente divididas em partes congruentes.

Constata-se que as OM mobilizadas nas OD apresentadas são pontuais, muito rígidas, mostrando pouca coordenação entre os tipos de tarefas, o que dificulta a reconstrução de OD que mobilize OM locais relativamente mais completas. As OD2 e OD3 codeterminam OM, cujas tarefas são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes e justificadas basicamente pela concepção parte-todo. Só na OD1 percebemos uma OM que permite mobilizar diferentes técnicas e algum critério de escolha, o que não acontece com as outras.

Nenhuma delas apresenta tarefas reversíveis e apenas uma situação sem solução. Mas, notamos a interpretação do resultado da aplicação das técnicas mobilizadas e a incidência do elemento tecnológico sobre a prática, como veremos na análise do próximo momento de estudo.

Do ponto de vista cognitivo, as Organizações Matemáticas mobilizadas nessas Organizações Didáticas não permitiriam minimamente que o aluno construísse significados para a concepção parte-todo em comparação com nossa Organização Matemática de referência; pois, como vimos é preciso um trabalho com figuras de tipos variados para a percepção da limitação da técnica de dupla contagem das partes e, conseqüentemente, o desenvolvimento de outras técnicas para a construção desses significados.

Podemos concluir que, diante da sucessão de situações e discussões que foram exploradas durante a formação, era de se esperar que mobilizassem OM mais

ricas em tipos de tarefas que associassem sobretudo as concepções de fracionários que foram tratadas. Acreditamos que a dificuldade apresentou-se em razão do peso que foi para esses professores perceber o próprio *não saber* relacionado a um assunto que tinham certeza dominar, como podemos constatar por comentários ocorridos durante a formação:

As frações estão fazendo meu cérebro se dividir. Se nem nós sabemos todos os significados de fração, como nós queremos que nosso aluno saiba? ... Quando eu era criança, para mim, fração era divisão. (Prof. Fabiana, 22/8/03, p. 5)

Eu tenho muita dificuldade em fração. E li que a fração é em partes iguais. Então a fração não é partes iguais? (Aluna, 22/8/03, p. 5)

Quando eu falo de razão (20/200) eu posso dar significado de parte/todo. (Prof. Gina, 22/8/03, p. 6).

Quando eu estou falando de razão trigonométrica, eu estou falando de razão, eu não estou falando da divisão (Prof. Bruno, 22/8/03, p. 7)

(Ficamos angustiados) porque percebemos nossa dificuldade (Prof. Fabiana, 5/9/03, p. 1)

Quanto mais nós estudamos, mais nós percebemos que precisamos aprender (Prof. Gina, 5/9/03, p. 1)

Percebo quanta coisa eu fiz de errado. (Prof. Bruno, 5/9/03, p. 1).

Talvez a afirmação de Nacarato ajude a entender tal quadro:

O livro didático no Brasil sempre esteve no monopólio das editoras. Os autores de livros didáticos de Matemática mantinham suas mesmas ideias durante décadas; os livros raramente sofriam alterações. Esses autores ignoravam completamente as propostas curriculares estaduais, mantendo o mesmo padrão de livro didático. Com isso cristalizou-se uma certa prática de aulas de Matemática. O professor reproduziria uma série de conteúdos sem, o menor questionamento das razões pelas quais os ensinava. (NACARATO, 2004b, p. 4)

No dia 14/11/03 percebemos que os professores apresentavam dificuldades em técnicas que acreditávamos dominadas, por serem estritamente algorítmicas, como a que apresentaremos a seguir. Durante a discussão de uma série de tarefas para identificar a mais adequada e as concepções que estavam associadas, uma delas pedia que se determinasse  $x$  e  $y$  em  $\frac{2}{3} < x < y < \frac{4}{5}$  que foi seguida da seguinte discussão, registrada nas páginas 6 a 8 das observações desse dia:

Prof. Carla: cadê a realidade, aí?” Não tem.

Prof. Gina: Localização de racionais.

Prof. Bruno: Comparação.

Prof. Gina: Era isto que eu queria dizer.

Prof. Fabiana: Ordem.

Prof. Antonio: Eu estou pensando distância. O que está mais próximo ou mais longe de zero.

A formadora interfere dizendo que estamos tratando de fracionários enquanto número, no conjunto dos racionais, e que qualquer esquema seria válido para a solução do problema.

Prof. Bruno:  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$ . Daí, fiz  $\frac{22}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{22}{30}$ , y é o ponto médio. Daí, fiz  $\frac{2}{3} < x < \frac{22}{30}$  e o x é o ponto médio.

Prof. Gina: Eu fiz de outra maneira. Pensei denominador 3,  $\frac{3}{3}$  estaria entre  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{4}{5}$ . Pensei denominador 4,  $\frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$  que é o x. A formadora interfere colocando no quadro um esquema de medida, para que percebessem que um fracionário maior que  $\frac{2}{3}$ : com denominador 3 não resolveria a questão porque tanto  $\frac{3}{3}$  quanto  $\frac{5}{5}$  são maiores que  $\frac{4}{5}$ .

Prof. Fabiana: Eu pensei em número decimal:  $\frac{2}{3} = 0,66$  e  $\frac{4}{5} = 0,8$ , então, x pode ser 0,70. Questionada a respeito do fracionário complementa:

Prof. Fabiana: Eu fiz uma equivalência. Usei mesmo denominador  $\frac{10}{15}$  e  $\frac{12}{15}$ ,  $\frac{11}{15}$  está entre  $\frac{10}{15}$  e  $\frac{12}{15}$  e fiz também  $\frac{11,5}{15}$ ”.

Prof. Bruno: E está certo escrever  $\frac{11,5}{15}$ ?

Como ninguém respondeu, a formadora foi ao quadro e escreveu:  $\frac{10}{15}, \frac{11}{15}, \frac{11,5}{15}, \frac{12}{15}$  ordenando os fracionários e, incluindo o que provocou a discussão seguida de sua transformação em um equivalente que justificasse a ordenação feita:  $\frac{11,5}{15} = \frac{115}{150}$  que está entre  $\frac{110}{150}$  e  $\frac{120}{150}$ .

### 3.1.5.1 3º momento

*É o da constituição do ambiente tecnológico-teórico que, geralmente, está em estreita relação com os outros momentos, pois, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa se tem relações com um ambiente tecnológico-teórico anteriormente elaborado ou a ser criado.*

Observamos que o discurso tecnológico-teórico que utilizam atém-se à técnica da dupla contagem das partes, justificado pela concepção parte-todo, visto que não se arriscaram, por exemplo, a buscar figuras associadas a essa concepção, em

que a dupla contagem fosse insuficiente para associar o número fracionário, não possibilitando que novas técnicas fossem construídas.

O fato justifica-se, provavelmente, pela não disponibilidade de tais concepções por parte dos professores, como foi o caso, por exemplo, da concepção de razão que com a noção de proporção e a operação de divisão e relações, entre elas, gerou a dúvida de ser a razão sempre divisão ou não, que se iniciou no dia 19/8/03.

Solicitamos, então, que pensassem sobre o assunto para o encontro seguinte, quando a professora Gina disse que pesquisou e concluiu que razão é o quociente de dois números. O que desencadeou várias discussões:

Razão é o mesmo que proporção, só que expressa de forma diferente. (Prof. Antonio, p. 2).

No dicionário está uma relação entre grandezas de mesma espécie. (Prof. Bruno, p. 2)

É o quociente entre dois números. (Prof. Gina, p. 2).

Proporção é uma comparação, por isso é que são necessárias duas razões. (Prof. Fabiana, p. 2).

Razão não é divisão. Eu lembrei da razão de uma PA. (Prof. Bruno, p. 2)

A razão pode ser encarada como comparação. (Prof. Antonio, p. 2)

Quando leio que a razão é o quociente de dois números, transporto para a divisão, mas sei que não são sinônimos, porque não é toda divisão que é igual a uma razão. (Prof. Gina, p. 2)

Razão é uma comparação e a divisão é uma repartição. (Prof. Fabiana, p. 2)

A divisão de cinquenta reais entre duas pessoas e a comparação entre meninos e meninas de uma sala. (Prof. Gina, p. 2).

A relação entre duas grandezas nem sempre é divisão. (Prof. Bruno, p. 2)

Tem que clarear bem estas coisas (razão, proporção, divisão). Prof. Edson, p. 2)

Percebemos que mesmo tendo trabalhado, durante a formação específica, com uma retrospectiva histórica com o intuito de mostrar os tipos de tarefas que caracterizam a razão de ser dos números fracionários, os professores apresentam em seus discursos frases como “fração é divisão” ou “razão é quociente” que são típicas da história mais recente dos fracionários, como pudemos constatar em nosso estudo epistemológico. A gênese e o desenvolvimento anterior não fazem parte do discurso dos professores.

A aluna, que fazia parte do grupo, trouxe no encontro seguinte uma síntese a respeito do significado da palavra razão e a apresentou aos professores, mesmo assim as dúvidas continuaram. Não chegando a um acordo, a angústia tomou

conta do grupo e, muito acentuada foi a constatação de suas próprias dificuldades. Notamos que os professores não escolheriam números fracionários como tema de um projeto de formação continuada, por não questionarem o modo como ensinam nem o domínio de validade de seus conhecimentos, pois acreditavam que tinham pleno domínio do assunto e a constatação de uma visão limitada sobre ele, fez vir à tona suas emoções e com elas alguma resistência em reelaborar seus significados para números fracionários.

Algumas situações foram discutidas pela formadora para esclarecer as dúvidas entre razão e proporção que, por sua vez, geraram novas questões sobre representação fracionária e adição em casos desses tipos, o tratamento de grandezas discretas e contínuas e ainda de situações em que se pode afirmar ou não que *razão é sempre divisão*.

#### 3.1.5.2 4º momento

*É o de tornar a técnica mais eficaz e confiável. É o momento em que se coloca à prova a técnica, supondo um ou mais conjuntos de tarefas adequadas qualitativa e quantitativamente.*

Durante a formação, mostramos aos professores a limitação do domínio da técnica da dupla contagem das partes, escolhendo representações apropriadas para que novas técnicas pudessem ser construídas, de acordo com nossa OM de referência. Sentíamos que este era o ponto central de nossa formação, porque acreditávamos que poderiam reestruturar suas concepções e interiorizá-las, pois não percebem, por exemplo, que uma simples mudança de figuras que utilizam para mobilizar uma técnica, pode representar uma modificação importante da atividade matemática. Outro ponto de discussões, como já vimos, foram as referentes à concepção de razão, em que alguns professores apresentavam chavões do tipo “razão é divisão”, sem o mínimo de percepção das situações a que elas se referiam.

Algumas situações da formação foram angustiantes aos professores e provocaram um desequilíbrio em suas verdades que promoveu um retrocesso e percebemos que nas OD elaboradas em grupo, os tipos de tarefas foram menos abrangentes em termos de representações e técnicas do que as apresentadas individualmente.

Provavelmente, provocada pela escassa incidência do bloco tecnológico-teórico nas organizações matemáticas que mobilizaram nas OD apresentadas, perceptíveis nas dificuldades de justificar as escolhas feitas, pois dificilmente se exige interpretar o resultado da aplicação de alguma técnica para verificar se foi utilizada de modo correto. É provável que essa exigência, por parte da formação, seja um dos motivos que os levou a constatar seu *não saber*.

No encontro de 3/10/03, durante a apresentação da concepção de quociente para fracionários, a Prof. Fabiana justifica assim a distribuição de nove bolinhas para cinco crianças: “*Dá uma bolinha para cada criança e depois divide cada bolinha em cinco partes*”. (3/10/03, p. 4). A partir daí discutimos a diferença de tratamento de grandezas discretas e contínuas com outro exemplo: cinco flores para três pessoas, o prof. Edson justifica: “*matematicamente pode e no dia-a-dia tem situações como essa, mas não em linguagem matemática*” (3/10/03, p. 5).

A reversão de técnicas correspondentes, também foi uma novidade, tanto nas tarefas que associam a concepção de operador (outra novidade) como nas de reconstituição do inteiro, quando estas últimas foram discutidas, a Prof. Fabiana fez o seguinte comentário:

Quando ele (o aluno) está fazendo esses exercícios, ele já conseguiu assimilar quase tudo. (3/10/03, p. 16).

O prof. Bruno comenta logo em seguida:

Tem hora que da nó, tem hora que desfaz, tem hora que dói. (3/10/03, p. 4).

Notamos na prática desses professores que utilizam técnicas isoladas justificadas por um único discurso tecnológico-teórico (apoiadas em livros didáticos) que não permite duas técnicas diferentes para um mesmo tipo de tarefas e, conseqüentemente, o aluno não poderá decidir qual das duas (ou mais) técnicas é mais pertinente para uma determinada tarefa, pelo contrário, uma delas transformar-se-á na “maneira” de resolver a tarefa.

Não acreditamos que tenhamos conseguido grandes avanços no que se refere ao discurso tecnológico-teórico, e, até o final da elaboração das Organizações Didáticas em grupo, os professores ainda não tinham agregado a seus conhecimentos que o trabalho com a contagem garantiria o acerto em algumas situações, e a falsa sensação de compreensão, embora algumas mudanças tenham sido percebidas, como veremos na parte que trataremos da formação.

### 3.1.5.3 5º momento

*É o da institucionalização, que tem por objetivo definir o que é exatamente a Organização Matemática elaborada, distinguindo por um lado, os elementos que concorreram para sua construção, mas, que não foram por ela integrados e, por outro lado, os elementos que entraram de maneira definitiva na Organização Matemática pretendida. Neste momento de oficialização, a OM entra na cultura da instituição que abrigou sua gênese.*

Quando retomamos os trabalhos no ano seguinte, discutimos as Organizações Didáticas que os professores entregaram no último encontro que foram justificadas em alguns comentários:

Tentamos fazer uma reforma no trabalho e não conseguimos. (Prof. Antonio, 5/3/04, p. 11).

Nosso trabalho começava e voltava. (prof. Davi, 5/3/04, p.1).

Mas todos (do grupo) faltaram muito. (Aluna, 5/3/04, p. 1).

Eu me senti incapaz! Mas eu não acho que eu sou incapaz. No final eu coleí aquelas figuras e não fiquei satisfeito. (Prof. Bruno, 5/3/04, p. 1).

Faltou experiência. (Prof. Davi, 5/3/04, p. 1).

Imediatamente, começaram a falar de alunos e dos problemas da escola. A formadora encaminhou a discussão para as OD que elaboraram e ao desenvolvimento de autonomia pontuando, sobretudo, as discussões ocorridas sobre “significado”. A seguir, apresentou a OD por ela elaborada, aproveitando ao máximo as situações desenvolvidas pelos professores em suas produções. Foi como se tivessem tido um insight: “*Ah! Agora estamos entendendo!*”. Era um alívio, como se enfim encontrassem o que estavam procurando desde o início.

Esta organização consiste de nove fichas de atividades para alunos de quinta série, que se encontram no Apêndice B e foram elaboradas no contexto desta formação. A primeira apresenta oito tarefas associadas a concepção de quociente, tratando de grandezas discretas e contínuas que solicitam a mobilização da técnica da divisão, exata ou não, de números naturais.

Uma delas solicita a distribuição de ovelhas que obriga a ocorrência de resto se a distribuição for igualitária. A última tarefa solicita a medição do comprimento, da largura e da área de pedaços de folhas coloridas, medindo 20 cm x 8 cm, 18 cm x 8 cm, 18 cm x 6 cm e 13 cm x 8 cm; utilizando uma superfície quadrada de lado 4 cm, como unidade de medida com o objetivo de mostrar a necessidade de subdivisão da unidade para que se concretize a medição.

A Ficha 2 apresenta nove tarefas que associam a concepção de medida ou parte-todo. A primeira solicita a medição do comprimento e da largura da carteira por cada um dos elementos do grupo de alunos, cada um deles utilizou uma de três régua apresentadas, uma de polegadas e duas sem subdivisões, medindo 12 e 16 cm cada uma. As régua são empregadas também em outra tarefa que solicita a medição de segmentos. Algumas tarefas que pedem a localização de números fracionários em esquemas de medição e comparação de fracionários também fazem parte dessa ficha. Trata também de situações que pedem a mobilização da concepção parte-todo em situações de identificação de fracionários em figuras, da divisão de figuras planas e uma situação-problema.

A Ficha 3 trata de nove tarefas que solicitam a mobilização da concepção parte-todo e a identificação dos números fracionários correspondentes às peças de um quebra-cabeças baseado em divisões não congruentes de um triângulo equilátero. As outras tarefas solicitam a identificação de fracionários em figuras que representam grandezas discretas ou contínuas, além da divisão de figuras para identificar um fracionário dado. Uma delas retoma a concepção de medida associada a distância entre dois pontos em um esquema de medida.

A Ficha 4 apresenta dez situações que solicitam a mobilização da concepção parte-todo, medida, quociente, operador e razão tratando de grandezas discretas e contínuas. Uma das tarefas associadas à concepção parte-todo solicita a dobra-dura de superfícies retangulares e circulares em partes “iguais”. Quatro dessas tarefas solicitam a comparação de números fracionários.

A Ficha 5 com 13 situações e a Ficha 6 com 11 situações associadas às mesmas concepções da ficha anterior, das quais algumas já apresentam um tratamento estritamente numérico, solicitando frações equivalentes e alguma comparação.

As Fichas 7, 8 e 9 tratam de tarefas para o ensino das quatro operações fundamentais com números fracionários, objetivando a compreensão e determinação das regras operatórias pelos próprios alunos. Estas tarefas apresentam essencialmente esquemas de medidas e superfícies planas, como suporte para a percepção das operações pretendidas.

Iniciamos um processo de discussão dessa Organização Didática enfatizando as escolhas e o planejamento em fichas de trabalho com alguma previsão para o tempo de aplicação. As discussões das fichas que iriam para a sala de aula, deixaram os professores aliviados e livres para várias sugestões, inclusive, a de que preparássemos fichas para trabalhar com equivalência, ordem e operações de fracionários. Queriam saber como encaminhar esse ensino; como não havia tempo para outros procedimentos, essas fichas foram acrescentadas à OD. Enfim, conseguiram identificar as concepções de fracionários associadas às tarefas e discutir as possíveis técnicas que as resolveriam, embora alguns ainda apresentassem certas incompreensões.

Discutiram a nova OD até o dia 2/4/04, até a Ficha 5, fazendo várias sugestões, que foram respeitadas e integradas à OD que foi aplicada em uma sala de aula de quinta série da escola e pode ser vista no apêndice B, deste trabalho. No dia 12/3/04, o Prof. Bruno faz o seguinte comentário: *(Este trabalho) “não tem nada a ver (com o que fizemos). Diferente daquilo que eu pensava. O nosso trabalho não foi criativo”*.

Escolheram o professor que assumiria a sala de quinta série, enquanto os outros assumissem o papel de observador, com a professora da classe e os observadores do projeto.

Embora as crianças estivessem muito animadas com um trabalho “diferente”, a professora Gina, escolhida para aplicação, sentiu-se insegura para discutir com os alunos e pediu que a formadora prosseguisse com o trabalho com as crianças. De certa forma, ao mesmo tempo que eles queriam ver a formadora, atuando com uma quinta série, talvez tivessem dúvidas sobre sua atuação.

Em razão do planejamento da professora da sala, aplicamos a sequência durante duas semanas em cinco aulas dobradas, terminando no dia 14/4/04. Durante essas aulas, a professora da classe teve acesso a todo o material utilizado e, no final, solicitou o material restante para dar continuidade ao trabalho com a ajuda dos professores da escola vinculados ao projeto. Segundo a Prof. Gina, a professora da sala ficou encantada e até mudou de postura.

Enfim, vimos uma OM empírica que, segundo Chevallard (1999) está viva em uma instituição concreta, em um momento histórico concreto, com algumas características e restrições específicas, que se institucionaliza, de alguma forma, em uma instituição escolar, embora não tenha sido possível avaliar sua aplicação na íntegra, pois isto seria outra pesquisa.

### 3.1.5.4 6º momento

*É o da avaliação que se articula no momento da institucionalização. Na prática, é o momento em que se faz um balanço para se examinar, o que valeu e o que se aprendeu.*

Não pudemos avaliar o efeito da aplicação dessas fichas na aprendizagem das crianças, mas, durante a aplicação como se fez necessário algumas reuniões rápidas para discutir as ações em sala de aula e definir estratégias. Em uma delas, em 6/4/04, a professora Gina justifica que sentiu pânico na hora do trabalho com os alunos e, por isso, pediu para a formadora continuar. Aproveitaram, também, o momento para discorrer sobre o que observaram do aluno durante a aula, percebendo, que é necessário ensinar as crianças a trabalhar em grupo e ter autonomia para resolver as tarefas apresentadas; além do quanto é difícil gerenciar os momentos de impasse e o trabalho coletivo, visto que os alunos não estavam habituados a trabalhar em grupo.

No final da reunião, constatamos que os professores precisavam “ver” para “aprender”:

A gente está aprendendo muito. (Prof. Fabiana, 6/4/04, p. 10)

Tirar coisas dos alunos. (Aluna, 6/4/03, p. 10)

Puxar de dentro. Eu tiro muitas coisas para mim. (Prof. Fabiana, 6/4/03, p. 10)

Já tínhamos percebido essa necessidade durante a discussão para a aplicação da OD em sala, quando o professor Bruno afirmou: “*Depois que você* (formadora)

*fala, fica tão fácil! Se eu não consigo resolver um exercício do aluno, como vou explicar para ele?”*

O encontro do dia 16/4 foi dedicado à avaliação da aplicação da OD e da própria formação e as falas dos professores dizem, por si só, o resultado desse encontro:

Eu acho que o fato de eles usarem o material colaborou para compreender. Se a gente desenha na lousa não é a mesma coisa que trabalhar com o material. O aluno que entendeu que dobrando a figura, ele via a solução, ele começou a ensinar os outros. (Prof. Antonio, 16/4/04, p. 1)

Eu participei os cinco dias e nos primeiros dias fiquei desesperada. Na segunda semana, foi mais tranquilo o trabalho. E, também, adoraram usar a régua de polegadas. Eu achei maravilhoso ver o aluno aprendendo. (Prof. Gina, 16/4/04, p. 2)

Como vamos mudar a consciência dos professores, que este tipo de trabalho é muito mais importante. (Prof. Bruno, 16/4/04, p. 2)

Eu achei que eu ia aprender alguma coisa sobre fração, mas que não mexeria com os alunos. E eu vi que mexe com a aprendizagem dos alunos, sim. Eu vi que eu só sabia colocar um número sobre o outro. Acho que eu aprendi muito e que ainda tenho muito que aprender. (Prof. Bruno, 16/4/04, p. 3)

Ficou muito forte foi a minha reflexão sobre o exercício que vou escolher para começar um determinado assunto. Qual meu objetivo? O que quero do aluno? Será a melhor forma de começar um assunto novo? (Prof. Gina, 16/4/04, p. 3)

Eu achei interessante pensar sobre a prática. Temos que mudar o que sabemos. Refazer. E é muito difícil. Tenho até vergonha da sequência que montei. (Prof. Davi, 16/4/04, p. 4)

O nosso medo é não saber uma pergunta do aluno. Meu medo é ensinar errado, acreditando que está certo. (Prof. Bruno, 16/4/04, p. 4)

Este é meu medo também. [...] Eu estou na fase de conflito. Estou enxergando meus erros. (Prof. Hilda, 16/4/04, p. 4)

Esta análise constata, o que Chevallard (1999) afirma sobre as atitudes normalmente encontradas em um professor quando prepara sua obra a respeito de uma determinada matéria:

Decide-se a “observar” um ou vários livros didáticos (de maneira mais ou menos sistemática), a “analisar” (superficialmente) seu conteúdo, a “avaliar” (de maneira às vezes pouco combinada) este conteúdo, por fim

a “desenvolver” (as vezes rapidamente) sobre esta base, seu próprio “produto”, suas aulas. (CHEVALLARD, 1999, p. 256)

Por outro lado, Bosch e Gascón acreditam que algumas tarefas do professor são rotineiras e bem definidas, não colocando, em princípio, grandes problemas. Entre elas citam:

escolher um livro, preparar um curso, organizar o programa, realizar as aulas, escolher os exercícios que os alunos deverão realizar, propor um exame parcial, corrigir os deveres, participar de reuniões, etc. (BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 1)

Constatamos que, com nosso grupo de professores, não foi bem assim, para eles essas tarefas podem ser rotineiras para uma ação sem reflexão, embasada na reprodução de livros didáticos e não em situações de aprendizagem que, de certa forma, já haviam tido contato, na primeira fase do projeto, foi explicitado que tanto as sequências como sua aplicação estavam embasadas na Teoria das Situações de Guy Brousseau.

Contudo, mesmo concordando em elaborar uma sequência para o ensino de fracionários para quinta série, nesta formação, os professores apresentaram em suas produções planos de aula, com orientações para aplicação, no sentido de rever o conteúdo. Acreditávamos que pudessem transferir a experiência anterior para elaboração de uma sequência ao ensino de um conteúdo que, aparentemente, dominavam com a colaboração da formadora, pois as queixas eram sempre em relação ao *não saber* do aluno sobre o assunto.

Algumas das dificuldades para essa realização ficaram claras, no decorrer da formação, entre elas as de fazer relações de forma geral, elaborar e seguir um plano de trabalho, pois recuavam e modificavam decisões já tomadas, a cada impedimento que encontravam, sem perceber que o estavam fazendo.

Um dos motivos prováveis para tais dificuldades pode ser o fato de não terem sido formados para tomar decisões desse tipo em sua prática, pois, de acordo, com Bosch e Gascón (2001) as tarefas didáticas de cada professor, bem como as técnicas didáticas e as noções e princípios que utiliza para interpretar e justificar sua prática docente, não são criadas pelo próprio professor. Entretanto, fazem parte de um conjunto de tarefas, técnicas, noções e princípios disponíveis na instituição escolar que aparecem em momentos históricos diferentes e apoiam-se em diversas estruturas com funções que permanecem desconhecidas aos professores e mudam ao longo do tempo.

Para esses autores, as tarefas didáticas de um professor são descritas pelas noções que têm sentido na instituição escolar em um determinado momento

histórico e, da mesma forma, as técnicas que usam para realizar tais tarefas, assim como os discursos didático-matemáticos para justificar e interpretar estas técnicas não são criações “pessoais”, mas, adaptações de técnicas e discursos tecnológicos disponíveis nessa instituição.

Cabe aqui um parêntese a respeito da escolha do tema de estudo, pois alguns autores que defendem a pesquisa ação como metodologia de formação referem como decisão dos professores a escolha do tema a ser tratado, porém constatamos que se fosse dada a oportunidade, naquele momento, aos professores, eles fariam escolhas mais próximas de novas exigências que lhes estão sendo feitas, como afirmou a prof. Fabiana:

Eu pensei que você ia trabalhar com fração para ensinar a gente a montar projeto. A escola pede para a gente montar um projeto em dois dias, e a gente não sabe como fazer. Mas, eu achei legal você pedir a atividade da aula, pois a gente foi pesquisar. (Prof. Fabiana, 8/8/03, p. 5)

Os outros professores concordaram com o comentário da colega, de imediato, explicitando a necessidade de alguma “receita” para aprender o que acreditam não saber.

Julgamos, sim, que os professores devem ser ouvidos e externar suas necessidades nas formações que participam; no entanto, sabemos que nem sempre têm domínio de conteúdos básicos necessários para garantir a aprendizagem de seus alunos e que, de alguma forma, devem ser conduzidos a refletir sobre eles.

A esse respeito, percebemos que os comentários sobre o *não saber* dos alunos, constantes no início das atividades, foram por terra e deram lugar a uma angústia que permeou toda a formação, mostrando-se presente com muita força no segundo mapa conceitual e, ainda, no último dia da formação: “*Foi dolorido, eu perceber que eu não sabia fração*” (Prof. Gina, 16/4, p. 10), bem como em seus relatórios finais: “[...] e os conteúdos que imaginava dominar um pouco, logo percebi que não dominava absolutamente nada”. (Prof. Bruno, relatório final).

Estas constatações dos professores podem ser justificadas por Balachef (1995), quando afirma que observou em muitas situações a coabitação, em um mesmo ser humano, de conhecimentos que parecem contraditórios aos olhos de um observador que tem a capacidade de relacionar situações que são vistas como distintas pelo próprio sujeito.

[...] que resolvendo um problema específico, em um momento preciso, e interagindo com um meio dado, quando a ação dos sujeitos é racional, ela é necessariamente coerente. Mas nada impede que globalmente, as concepções do sujeito sobre um conceito matemático dado sejam mutuamente

incoerentes. o conhecimento de um sujeito sobre um objeto matemático diz respeito a suas diferentes concepções, mobilizadas em diferentes momentos, na resolução de diferentes problemas e, não apenas pode, mas é, em geral, globalmente incoerente. (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 21)

Por outro lado, como as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva e, ao mesmo tempo, em que são indispensáveis para estruturar o sentido que damos às coisas, segundo Ponte (1992) atuam também como uma espécie de filtro que pode bloquear novas realidades ou problemas, limitando possibilidades de atuação e compreensão.

Para o autor, as concepções formam-se em um processo simultaneamente individual (resultante da elaboração sobre a própria experiência) e social (resultante do confronto das próprias elaborações com as dos outros) que fazem com que nossas concepções sobre a matemática sejam influenciadas, tanto pelas experiências que estamos habituados a reconhecer como pelas representações sociais dominantes.

Assim, temos, de um lado, os bloqueios provocados pela tentativa de mudança de concepções a respeito de números fracionários:

Estou chegando a uma conclusão: que quando você briga com você mesmo, sobre mudança, como romper aquilo que já se sabe é duro, só quem ganha com isso é você mesmo, e isto também não é do dia para a noite, demora um pouco. (Prof. Davi, rel. final)

Esse momento (de desequilíbrio) é muito importante, é nele que paramos para reconstruir ou continuar com nosso erro. É por esse motivo que muitos professores recuam, pois preferem ficar com o que já foi construído. Agora, posso perceber porque eu tinha tanto medo de errar. (Prof. Fabiana, rel. final)

Por sua vez, destacamos a exigência do domínio da Matemática a ser ensinada em autores, como Schulman (1987), quando afirma que um professor precisa saber uma matemática relacionada ao saber prático-pedagógico, em que as questões epistemológicas da matemática e de seu ensino-aprendizagem sejam tratadas no contexto da ação, devendo compreender:

a fundo a matéria específica que ensina, [...] tendo especial responsabilidade ao conhecimento dos conteúdos da aula, ao qual opera como a fonte principal da compreensão da matéria por parte do aluno. [...] Frente a diversidade do alunado, o docente deve ter uma compreensão flexível com várias faces, adequada para explicar alternativas deferentes dos mesmos conceitos ou princípios. (Ibid, p. 176)

Embora não tenhamos o quadro ideal citado por Shulmann, pudemos perceber a ação de filtro de suas concepções, como observado por Ponte, quando os professores constataram a limitação do domínio de validade dos conhecimentos que tinham a respeito de fracionários e tomaram consciência de um certo desequilíbrio em sua própria relação com o saber que foi explicitado em vários momentos.

O que ficou forte para mim foi o desequilíbrio. Na escola particular eu procuro me manter equilibrado e desequilibrar o grupo [...] percebi que algumas pessoas que, aparentemente, são fortes, não têm tantos argumentos assim. (Prof. Bruno)

Aconteceram muitos desequilíbrios, mas apesar de tudo aprendemos as etapas de uma análise a priori. (Prof. Gina, rel. final)

Dessa forma, cremos na assertiva de nossa escolha do tema, porque pôde nos revelar que esses professores não esperavam perceber seus *não saberes* e sentir “desequilíbrio” porque acreditavam ter pleno domínio do campo dos racionais. Desse modo, quando notaram que o domínio de suas concepções a respeito de fracionários era muito restrito, apresentaram um bloqueio para novas realizações que encaminharam, a nosso ver, a produções de Organizações Didáticas mobilizando Organizações Matemáticas mais rígidas no trabalho em grupo, do que as que realizaram individualmente no início da formação.

Com uma certa superação desses momentos de angústia, percebemos algumas mudanças em suas próprias relações com o saber:

Eu trabalhava muito em função da regra e agora eu estou trabalhando diferente e eu até aprendi algumas coisas aqui de manhã e à tarde eu já apliquei, então estou mudando porque eu percebi que trabalhava errado. (Prof. Antonio)

Isto não é suficiente para garantir que esse professor tenha efetivamente mudado suas concepções a respeito de fracionários na abrangência necessária. Para Shulman (1987), o comportamento docente está estreitamente ligado a compreensão e a transformação da compreensão, visto que as técnicas de instrução flexíveis e interativas que empregam se tornam de modo simples inaplicáveis, quando não entende bem a matéria que deve ensinar.

Em particular, de acordo com Thompson (1997) a consistência observada entre as concepções de Matemática professadas por professores e o modo pelo qual eles tipicamente apresentam o conteúdo, sugere de modo acentuado que as visões, crenças e preferências dos professores sobre a Matemática influem sobre sua prática docente.

Nesse momento, cabe perguntar, então, o porquê do “desequilíbrio” provocado pela necessidade de mudança de suas próprias relações com o saber. Se esses professores, como alunos, foram receptores de informações e sua prática, como profissionais, não permite que reflitam sobre possíveis incoerências no tratamento com os conteúdos, como podemos complementar sua formação?

A mudança de concepções a respeito de conhecimentos matemáticos a nosso ver, passa por dois pontos: a formação de adultos e o desenvolvimento de autonomia.

Para discutir a primeira, reportamo-nos à Andragogia que, segundo Cavalcanti (1999), é a arte e ciência de orientar adultos a aprender que difere da Pedagogia, porque esta estuda a educação e ensino de crianças. Para o autor, os adultos “se sentem motivados a aprender quando entendem as vantagens e benefícios de um aprendizado, bem como as consequências negativas de seu desconhecimento” (Ibid, 1999, p. 3).

Esta afirmação levou-nos a pensar em um provável motivo para algumas dificuldades de aprendizagem de professores: perceber as vantagens – o sistema normalmente não valoriza os bons trabalhos, os alunos não se motivam para aprender, a remuneração não se altera, ... Consequências negativas? Não há. Pois normalmente não se sabe o que acontece em sala de aula e os alunos não aprendem, porque não querem.

Para Cavalcanti (1999), as motivações mais fortes dos adultos são internas, relacionadas com a satisfação pelo trabalho realizado, melhora da qualidade de vida e elevação da autoestima. Quanto à qualidade de vida, não há o que falar, mas, a respeito de autoestima, compreendemos que a participação em nossos encontros tenha contribuído para melhorá-la, como podemos observar nos depoimentos de alguns professores:

Eu me sinto lá em cima, todos querem assistir minha aula, mas estou criando inimizades na escola (com outros professores). antes eu não abria a boca nas reuniões, agora eu pergunto: por quê? (Prof. Y)

Essa história do desequilíbrio me deixa cheio de argumentos, antes o meu discurso estava vazio, eu falava, falava, falava, ... (Prof. Bruno)

Fica, então, a pergunta de como conduzir uma formação continuada de professores que, como adultos, precisam ver alguma vantagem em aprender novos enfoques para os conteúdos que ensinam ou, pelo menos, perceber alguma consequência negativa desse *não saber*.

Quanto à autonomia, embora os professores que participam de nosso projeto, há alguns anos, sintam-se diferenciados dos demais e crescendo, entendemos que ainda não têm autonomia suficiente para reflexões teóricas que permitam

um conhecimento pedagógico<sup>3</sup> da matemática mais eficiente, isto é que provoque aprendizagem por meio de uma prática docente de produção, retradução, seleção, adaptação e, também, carência de saberes.

Como impedimento para o desenvolvimento da autonomia, Linard (2000) destaca, entre outros tipos de ausência, a de tipo cognitivo, que é a capacidade de se distanciar da própria ação para se conscientizar dos mecanismos de seu próprio pensamento, o que permitiria melhorá-los e dirigi-los de maneira autônoma.

Conforme a autora citada, a autonomia consiste em além de saber dar conta sozinho de situações complexas, saber, também, colaborar, orientar-se nos deveres e necessidades múltiplas, distinguir o essencial do acessório, não naufragar na profusão das informações, fazer as boas escolhas, segundo boas estratégias, além de gerir corretamente seu tempo e sua agenda. Acrescenta que um modelo, mais coerente e inspirador para organizar uma formação, seria:

o de considerar que os aprendizes, crianças ou adultos, sejam agentes intencionais que desempenham um papel ativo essencial nos acontecimentos e atividades de que participam, pois o processo de aprendizagem é, em parte, intencional e se auto-organiza a partir de seu próprio funcionamento e de seus próprios resultados. (LINARD, 2000, p. 6)

Acrescenta, ainda, que um professor transforma-se com base em suas atitudes com o conhecimento e a aprendizagem, que se transformam com novas aberturas e restrições que o levam, aos poucos, a se dedicar menos tempo à exposição de conhecimentos e mais à criação de condições que possibilitem aos alunos desenvolver seus próprios meios de construir conhecimentos que, segundo a autora, leva tempo, muito tempo.

Compreendemos, então, porque alguns professores, mesmo estando em nosso projeto por alguns anos, ainda não desenvolveram uma certa autonomia em suas relações com o conteúdo, tendo em vista que tratamos de um assunto muito presente nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental. Provavelmente, esta dificuldade deve-se à formação matemática que possuem que, de acordo com Becker (2001, p. 31) *conserva o professor prisioneiro de epistemologias do senso comum, tornando-o incapaz de tomar consciência das amarras que aprisionam o seu fazer e o seu pensar.*

Consideramos nossa primeira questão respondida por Organizações Didáticas que mobilizam Organizações Matemáticas muito rígidas, com relação à OM de referência, para atender a série de exigências que a conceituação de números

---

3 Segundo Shulmann (1987, p. 174) é um amálgama entre matéria e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma de compreensão profissional.

fracionários faz para a quinta série. Quanto às concepções associadas aos tipos de tarefas vimos que mobilizam com predominância da concepção parte-todo em contextos que envolvem superfícies em tarefas que são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes, seguida pela concepção de razão que, para eles, independente da situação, sempre poderia ser associada à divisão. De modo tímido, apresentam algum tipo de tarefa que solicite a relação entre duas ou mais concepções para fracionários.

As dificuldades apresentadas pelos professores, talvez se justifiquem por uma formação inicial pouco consistente em matemática elementar que é agravada por uma formação profissional que de modo aparente não desenvolve a autonomia necessária para que se aperfeiçoem. Pelo contrário, as aberturas proporcionadas para novas compreensões tendem a levar esses professores ao senso comum de sua prática, por não conseguir se distanciar o suficiente para refletir sobre seu próprio conhecimento e o que está a sua volta.

Por outro lado, a nosso ver, a ausência de autonomia faz com que a percepção pelos professores de incoerências que expõem seus próprios *não saberes* do conteúdo, os conduzem a se sentirem bloqueados ao ponto de não conseguirem se apropriar da formação recebida, transformando-as em possíveis ações para a formação de seus alunos.

Enquanto a formação inicial não der conta de instrumentar o professor para exercer sua profissão criticamente, julgamos que tenhamos de abordar conteúdos matemáticos nas formações continuadas, mesmo aqueles que os professores acreditam dominar. Essas formações teriam como um de seus objetivos ampliar o domínio de conhecimentos e o desenvolvimento de um nível de autonomia que permitam ao professor identificar, o que não sabe e quando pode aprender sozinho ou quando precisa de ajuda.

Só assim, as formações continuadas poderiam assumir seu caráter efetivo de atualização desse professor a respeito de resultados de pesquisa que o auxiliem a se aprimorar cada vez mais como profissional.

### 3.2 Concepções dos professores sobre seus alunos

Em nossa problemática, propusemo-nos a responder a seguinte questão:

*É possível encaminhar professores de matemática a reflexões que possibilitem mudanças nas concepções que têm de seus alunos, proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar?*

Na realização do primeiro mapa conceitual e na formação anterior, percebemos que os professores sempre afirmavam que os alunos não sabiam tratar com os números fracionários, resolvemos que, enquanto coletavam individualmente

as situações para elaborar a sequência de ensino, discutimos com eles um questionário que haviam respondido antes a respeito de possíveis respostas de alunos para algumas questões que envolviam frações. A ideia era levá-los a refletir a respeito de prováveis dificuldades dos alunos para que pudessem ser consideradas durante a elaboração da Organização Didática.

Constatamos que a grande preocupação desses professores era com as dificuldades que os alunos têm no cálculo com frações e suas técnicas, apontando, sobretudo as dificuldades com: adição com denominadores diferentes, encontrar denominadores comuns, achar mmc, divisão, equivalência, comparação, transformações e até a tabuada, sendo a divisão a mais lembrada. Os professores ainda citaram a perda de referência do inteiro e a dificuldade no tratamento com grandezas discretas, como pudemos observar nas seguintes frases:

O que é fração, o aluno não imagina que é pegar o todo e dividir em partes. (Prof. Y, 15/8/03, p. 9)

O aluno não relaciona que metade é em qualquer coisa. (Prof. Fabiana, 15/8/03, p. 9)

O aluno não consegue enxergar a fração como divisão e se você der uma figura e pedir  $\frac{1}{3}$ , o aluno consegue, mas não consegue pintar, por exemplo  $\frac{4}{3}$ , colocar outro inteiro. (Prof. Y, 15/8/03, p. 8)

Na multiplicação e divisão ele quer tirar o mmc. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 9)

Ele sabe dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 9)

O aluno não consegue transferir o tamanho da barra de chocolate para a reta. Ele não consegue localizar. (Prof. Bruno, 15/8/03, p. 5)

Nos primeiros encontros, frases desse tipo foram constantes, embora a prof. Fabiana, já no segundo, tenha percebido que: *“a gente ajuda o aluno a ficar mais confuso, ensina que tem que dividir a figura inteira”* (p. 2).

Em outros momentos, solicitamos que previssem possíveis ações de seus alunos perante algumas situações como, por exemplo, a distribuição de dez bolinhas para três crianças que foi seguida do seguinte diálogo:

Eu acho que ele daria como resposta três bolinhas, pois não saberia o que fazer com a bolinha restante. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 3)

Os alunos estão acostumados com um objeto e agora ele está em conjunto. Eu acho que o aluno não ia responder. (Prof. Edson, 15/8/03, p. 4)

Eu acho que o aluno ia desprezar uma bolinha. (Prof. Y, 15/8/03, p. 4)

Pegaria três bolinhas mais  $\frac{1}{3}$  da outra. (Prof. Edson, 15/8/03, p. 4)

Questionados sobre a possibilidade de resolução da questão, todos afirmaram, que é possível, mas nenhum justifica de imediato que se trata de um problema de *divisão com resto*, porque deve ser tratada no campo dos naturais, fato este que passou despercebido pelos professores sendo, então, explicitado pela formadora.

Pudemos perceber, assim, que os professores, sem se dar conta, explicitavam os mesmos *não saberes* que creditavam a seus alunos. O professor que cita a transferência da “barra de chocolate” para um esquema de medida, utiliza esse procedimento para solucionar algumas situações de medida mostrando sua preferência pela concepção parte-todo associada a superfícies. No dia 17/10/03, esse mesmo professor perguntou sobre como explicar para o aluno que na divisão de duas frações, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda, provocando o seguinte diálogo:

Eu aplicaria a regra direto. (Prof. Gina, p. 13)

Como a gente explica a divisão? Quantas vezes cabe um certo número dentro do outro? (Prof. Fabiana, p. 13)

Podemos usar frações equivalentes? (Prof. Gina, p. 13)

Depois de várias explicações da formadora, a prof. Gina afirma: “Podem achar um denominador comum! Quando os alunos fazem isso, eu digo que não pode.”

Ao perceber a incoerência entre o discurso que os professores fazem sobre o domínio do conteúdo pelos alunos e seu próprio domínio, tentamos encaminhá-los a percebê-la e procurar explicações para as causas desse olhar do professor para seu aluno.

Um desses momentos ocorreu, em outubro, no início da formação específica, quando o Prof. Edson comenta que os alunos acumulam defasagens. Perguntados sobre como o professor inicia suas aulas na quinta série, a Prof. Fabiana imediatamente respondeu que era da primeira página do livro e que ia até onde desse. Questionada então sobre a sexta série, a resposta foi a mesma. E assim, para a sétima e oitava.

Nesse momento, perceberam como acontecia parte das defasagens dos alunos, justificaram que a culpa é do sistema, pois o “projeto pedagógico da escola tem que ter todos os professores, direção e pais envolvidos, não pode ser só um professor” (Prof. Edson, 3/10/03, p. 17). E, também, do sistema de empréstimo de livro didático para o aluno, que não permite que os alunos da sexta série, por exemplo, terminem o livro da quinta, pois este já estaria em outras mãos, o que certamente não exige o professor de colaborar com essa defasagem.

Observamos que na falta de um olhar objetivo para os problemas que enfrenta, que permitam analisar suas próprias ações, o professor disfarça sua angústia e

apresenta até uma atitude de defesa, atribuindo a falta de aprendizagem do aluno à sua própria falta de interesse ou ao professor do ano anterior por não ensinar adequadamente, ou permitir a aprovação do aluno sem condições, argumentando, inclusive, que os alunos têm trauma sobre fração e que, para eles, o assunto é um bicho de sete cabeças.

Isto não quer dizer que não houve momentos em que olhassem objetivamente suas ações:

Acho que o aluno vai pegar a régua que tem graduação. E vai sentir a mesma dificuldade que estou sentindo. (Prof. Hilda, 12/3/04, p. 25)

Como um círculo vicioso, essas justificativas que, ultimamente, vêm mudando o foco para a progressão continuada, impedem o professor de perceber que ele também faz parte desse círculo e é provável que será responsabilizado, por um outro professor, do não saber de seu atual aluno, mais que isso, não o leva a perceber que os *não saberes* de seus alunos são também seus e, como uma bola de neve bloqueia-o a desenvolver, pelo menos, a autonomia para refletir sobre suas ações.

No entanto, constatamos que tal atitude é detectada também em Portugal, na afirmação de Ponte (1994):

Para os professores, as causas do insucesso dos seus alunos são frequentemente a sua “má preparação” em anos anteriores. Por um raciocínio recorrente chega-se rapidamente ao 1º ciclo, daí às insuficiências da educação pré-escolar... Apontam igualmente o facto de muitas famílias terem um nível sócio-econômico e cultural muito baixo – ou terem um nível aceitável mas não incentivarem suficientemente os alunos. Os professores indicam que os alunos não se esforçam, não prestam atenção nas aulas nem estudam em casa. [...] Responsabilizam assim, os alunos, as famílias, os professores dos anos anteriores, os currículos e as características próprias da disciplina. (Ibid, p. 1)

Os PCN (1998) esperam que esses professores desenvolvam a autonomia do aluno em relação a construção de seu conhecimento, levando o aluno a saber: o que quer saber, como buscar informações, como desenvolver um dado conhecimento, como manter uma postura crítica, comparando diferentes visões e reservando para si o direito de conclusão. Esta autonomia depende sobretudo do desenvolvimento da autonomia moral e emocional, que envolve autorrespeito, respeito mútuo, segurança e sensibilidade. Acrescentam que a aprendizagem da autonomia inclui a noção de responsabilidade pelos próprios atos, pois, ao optar

por determinadas atitudes diante de situações concretas, a pessoa se faz responsável pela escolha assumida.

Creemos ser difícil que um professor possa cumpri-lo, pelo fato de viver momentos de conflitos provocados pela percepção de não saber algo que acreditava ter domínio e que não se apresentou durante a formação de Geometria, pois afirmou não dominar o conteúdo. Esta constatação exigiu ações formativas que conduzissem os professores a transferir o foco dos alunos, para suas próprias ações, provocando algumas situações delicadas, com reações difíceis de serem refutadas no sentido de evitar constrangimentos maiores. Por exemplo, quando afirmaram que:

O aluno só vê a regra do mmc, mas não vê a equivalência. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 2)

A fatoração, a decomposição, para ele é só mmc. Ele sabe dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima. (Prof. Bruno, 15/8/03, p. 2)

Os professores quando foram questionados sobre a causa dessa predileção dos alunos por regras, o prof. Bruno expressou a seguinte reação: “*quando eu estava no ensino fundamental, eu sempre aprendi só a regra. Eu só aprendi a maldita regra e sempre passei de ano*” sem perceber que se refere a “passar de ano” e não a aprender. Outros professores prosseguem com outros comentários:

Será que essa criança questionadora (de hoje) aprende mais que os antigos? Os alunos que aprendem mais, são os que têm interesse próprio. (Prof. Edson, 15/8/03, p. 2)

Eu parei a aula e deixei como exercício  $4/3$ . Durante a semana, apenas um aluno discutiu comigo para tentar entender o significado de  $4/3$ . (Prof. Bruno, 15/8/03, p. 2)

Como deixar claro para o aluno o significado de numerador e denominador? (Prof. Edson, 15/8/03, p. 2)

Um dos pontos que julgamos estar por trás dessas falas dos professores, pode ser a própria compreensão que têm sobre o que é aprendizagem. Esta suposição se faz por detectarmos que reproduzem alguns chavões inconsistentes em seus discursos e por várias citações a respeito de desequilíbrio, como a da Prof. Fabiana quando afirma: “*agora eu entendi, o que é desequilíbrio*”. Constatamos, então, que muito do discurso desses professores baseia-se na memorização e não na compreensão.

Para Lalanda e Abrantes (1996) embora a memorização seja importante para a aprendizagem intelectual, é preciso compreender antes de memorizar, pois,

se não forem compreendidas e apreendidas as relações que existem entre elas por meio de uma constante reflexão sobre o sentido do que é estudado, a memorização será inútil, porque não pode se transformar em corpo de conhecimentos.

Não temos dúvidas de que o enfoque da formação inicial desses professores foi o da aprendizagem por memorização pelo seguinte:

Mesmo quando eu estudei, eu decorava tudo. Eu fiz uma prova de análise e não sei o que eu analisei, mas eu passei. (Prof. Gina, 7/11/03, p. 5)

Quando a professora pedia para calcular juros compostos sem a fórmula, eu usava a fórmula, via quais eram as passagens e apagava. (Prof. Fabiana, 7/11/03, p. 5)

Outro momento que nos mostrou a incoerência de seu discurso, foi quando mesmo afirmando, na análise do questionário, que os alunos não “sabem significados” e perguntem como fazer para ensiná-lo, tomaram a iniciativa de que o primeiro objetivo da sequência de ensino que iriam elaborar, seria: dar significado às frações. Perguntados sobre como percebemos que o aluno construiu algum significado a respeito de frações, responderam:

Se ele responder, o que você pediu na avaliação. (Prof. Edson, 15/8/03, p. 5)

Se eu pedir para o aluno resolver  $1/5 + 2/5$  e ele souber dar o resultado e explicar porque não dá  $3/10$ , usando qualquer recurso. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 5)

A partir do momento que você der uma figura uni, bi, tridimensional e você der a fração e o aluno souber identificar. (Prof. Fabiana, 15/8/03, p. 5)

Ele tem que saber abstrair. Ele tem que saber que é uma divisão. (Prof. Y, 15/8/03, p. 5)

Eu acho que tem que ensinar o significado. (Prof. Gina, 15/8/03, p. 6)

Podemos inferir que, embora se preocupem em “dar” significado ao conceito de números fracionários para os alunos, eles não tinham percepção do que realmente tal tarefa *significava*. Para eles foi difícil observar que faz parte de suas tarefas realizar um processo de seleção de situações, notações, etc. que se traduzirão em um significado restrito para o assunto que pretendem ensinar e que são os responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem de seus alunos.

O grupo de professores, embora se preocupe em dar significado aos conceitos, não percebe que:

são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas situações nem nas representações simbólicas. É uma

relação do sujeito com as situações e os significados. Mais precisamente, são os esquemas evocados no sujeito por uma situação ou um significante o que constitui o sentido desta situação ou este significante para o indivíduo, de acordo com Vergnaud. (1990, p. 158 apud Godino e Batanero, 1994, p. 339-340)

Falta-lhes, também, alguma noção sobre aprendizagem significativa, de acordo com Brito (2001) refere-se à organização e integração do material a ser aprendido na estrutura cognitiva, que é um conjunto organizado de fatos, conceitos e generalizações que o indivíduo já aprendeu, pois não se deseja que a criança simplesmente saiba coisas, mas sobretudo, que pense competentemente sobre as mesmas e se capacite para elaborar o conhecimento que se espera ser alcançado.

Por outro lado, entendemos que atividades exigindo domínio de conteúdo e certa autonomia para pessoas que têm como referência a aprendizagem por memorização, não são de fácil concretização, além de serem dificultadas pelos problemas que enfrentam e pela posição que a maioria dos professores da rede pública do Estado de São Paulo se encontra na instituição escolar. Ademais, tanto pais como alunos, realmente, contribuem para consolidar as incertezas profissionais desses professores, como pudemos constatar em alguns depoimentos:

Se der uma situação problema que os alunos não saibam responder, eles irão dizer que não ensinei e haverá uma guerra na sala. (Prof. Gina, 29/8/03, p. 13)

Na escola do meu filho, uma mãe foi assistir à aula e disse que o filho dela é um anjo e que a professora é muito devagar. (Aluna, 24/10/03, p. 1.)

Muitos pais não comparecem nas reuniões e com outros não dá para conversar, pois eles defendem seus filhos. (Prof. Davi, 24/10/03, p. 9)

Os alunos falam que não precisam estudar para ganhar mais que a gente. (Prof. Fabiana, 24/10/03, p. 21)

Os pais hoje preferem não cobrar obediência. Fazer obedecer tem que ter autoridade, e as pessoas veem isso como autoritarismo. Nem sempre o pai entende isso. (Prof. Davi, 14/11, p. 32)

Não bastando pais e filhos, o sistema contribui com uma grande carga de tensão para o trabalho do professor com o nível de violência permitido, provavelmente, pela permissão de grandes defasagens na faixa etária nas salas de aula, além de alunos da Fundação Estadual para o Bem Estar do Menor (FEBEM) em liberdade vigiada, como se a escola tivesse a estrutura apropriada para recuperar esses menores.

Certamente, tais condições colaboram com a dificuldade do professor em distanciar-se o suficiente para analisar suas práticas e melhor observar seus alunos. Entendemos que estes também sejam, em parte, os motivos que podem justificar as afirmações que tecem a respeito dos alunos, pois, segundo Estrela (1994):

O professor “olha” para a sua classe, mas não a vê. Não dispõe de instrumentos nem de metodologia de observação que lhe permita detectar fenômenos de ordem pedagógica. Conhece alguns problemas, mas de forma subjetiva, pois não sabe dar-lhes uma expressão objetiva. (ESTRELA, 1994, p. 13)

O que pode ser percebido nos seguintes depoimentos:

Tem um aluno que não faz nada e foi o melhor aluno da turma no ENEM (80%) e os que são considerados bons tiveram só 50%. (Prof. Bruno, 21/11/03, p. 13)

Eu estou tentando, quando os alunos não entendem, eu leio de novo, mas aí não anda, não desenvolvem.

Você consegue trabalhar com dois ou três alunos, os outros trinta e cinco são problema. (Prof. Gina, 21/11/03, p. 13)

O professor não está preparado para detectar o que os alunos já sabem. E como fazer, com essa carga de trabalho que temos? (21/11/03, p. 21)

A gente subestima o aluno. (Prof. Bruno, 28/11/03, p. 7)

Encontramo-nos em um quadro de formação, no qual os professores misturam sentimentos de angústia pela percepção de seus próprios *não saberes*, pelas condições de trabalho que o sistema escolar lhes impõe e pelos próprios alunos que, por si só, caracterizam-se em obstáculos a essa formação. Só alteramos esse quadro quando aplicamos parte da Organização Didática final em uma sala de quinta série. Embora o grupo tenha decidido que a professora Gina seria a formadora das crianças, já na primeira aula ela solicitou que a formadora assumisse, porque estava nervosa, o que foi feito em quase todas as atividades com as crianças.

Constatamos que esses dias de aplicação foram bastante produtivos para a formação dos professores, porque perceberam finalmente, o objetivo do trabalho e a importância da observação dos alunos em ação, quando se pretende que construam seus próprios conhecimentos, fato verificado nos seguintes depoimentos:

Não achei tanto barulho porque tenho quintas séries e fiquei surpresa porque a gente quando vê os exercícios pensa que eles não vão resolver e a gente percebe que eles podem resolver. (Prof. Hilda, 16/4/03, p. 7)

É maravilhoso ver o aluno aprendendo. (Prof. Gina, 16/4/03, p. 12)

Vendo a formadora em sala de aula e vendo como ela entra dentro da cabeça do aluno e tira de lá de dentro o conhecimento que está adormecido, aprendi que não pode dar a resposta diretamente para o aluno e sim fazer ele pensar, discutir o problema com outros, buscar seu próprio caminho e sua solução, sempre o professor deve mostrar que tem várias maneiras de resolver um exercício. (Aluna, rel. final)

A aplicação na sala de aula concretizou todo o nosso aprendizado. Tivemos a oportunidade de observar, o que cada aluno conseguiu desenvolver e progredir. Um ponto interessante foram as demonstrações coletivas de humor, definidas pela ruptura de um contrato estabelecido com a professora da sala. (Prof. Gina, rel. final)

Em um dos dias da aplicação da série de exercícios uma das crianças com dificuldade de fala (dicção) e que, aparentemente, havia um preconceito sobre ela, toma destaque no grupo, pois lhe foi dada a oportunidade de mostrar seu valor e seus colegas perceberam. (Prof. Bruno, rel. final)

Descobrimos que não é a quantidade de exercícios que faz com que o aluno entenda o significado e sim as várias etapas (passos) para a resolução. (Prof. Edson, rel. final)

Observamos que o ponto marcante do trabalho em sala de aula foi exatamente a percepção do aluno. Para Estrela (1994, p. 26) o professor, para poder intervir no real de modo fundamentado, terá de saber observar e *problematizar*, isto é, *interrogar a realidade e construir hipóteses explicativas* que lhe permitirão intervir e avaliar.

Quando os professores ou alunos professores têm oportunidades de uma prática que é seguida de análises adequadas, há muita probabilidade de eles mudarem ou modificarem seus padrões de comportamentos de ensino.

Nesse sentido, para Davis e Oliveira (1990) a interpretação que o professor faz do comportamento dos alunos, é fundamental para que a interação professor-aluno possa levar à construção de conhecimentos, estando atento ao fato de que existem muitas significações possíveis ao comportamento de seus alunos e buscando verificar, quais delas melhor traduzem as interações originais. O trabalho intelectual feito sobre materiais ou conteúdos significativos é sempre mais produtivo, porque se houver compreensão a respeito da importância de determinada tarefa, ela passará a adquirir significação e a atividade intelectual se agilizar-se-á.

Nesse sentido, se entendermos a observação do aluno em ação, a preocupação com a aprendizagem dele como conhecimentos profissionais, saberemos que estes exigem. Segundo Tardif (2000), sempre uma parcela de improvisação e de adaptação a situações novas e únicas, às quais o profissional necessita de

reflexão e discernimento, não só para compreender o problema, como também para organizar e esclarecer os objetivos almejados e os meios a serem utilizados para atingi-los.

Mas, não resta a menor dúvida de que tais conhecimentos profissionais não podem ser construídos se o professor não tiver confiança e desenvolver suas concepções em relação à Matemática. Para isso, segundo Serrazina (1998, apud Saraiva e Ponte, 2003), é necessário que o professor consolide, além do conhecimento sobre os conteúdos matemáticos, também, sua didática. O autor sugere como meios para esse desenvolvimento a confrontação de formas diferentes de abordar os conteúdos e a observação e discussão de aulas de outros colegas.

Dessa forma, consideramos nossa segunda questão respondida com base na constatação de que os professores podem mudar o discurso a respeito da aprendizagem de seus alunos, pretendendo dar-lhes efetivamente o lugar de construtores de seus próprios saberes, embora não acreditemos que estejam prontos para promover com autonomia ações que, efetivamente, envolvam o aluno em sua aprendizagem.

No entanto, para essa confirmação foi preciso que a formação os levasse a uma situação real de ensino, em uma sala de aula real, observando alunos reais que possibilitou aguçar o olhar desses professores para a observação do aluno em ação e sua consequente aprendizagem.

### 3.3 Possíveis mudanças provocadas pelas ações formativas

Em nossa problemática, propusemos-nos a responder uma terceira questão: *É possível em uma formação continuada promover ações que permitam aos professores alguma mudança em sua prática de ensino de números fracionários para uma quinta série?*

Empenhados há alguns anos, na formação continuada de professores, nosso grupo de pesquisa dedicou-se, durante dois anos à Geometria, trabalhando com dois grupos de professores da rede pública estadual com o propósito de proporcionar alguma aprendizagem sobre o assunto.

Nesta, que estamos denominando de segunda fase, mudamos nosso enfoque para pesquisar o Pensamento Matemático, visto que os próprios professores nos apontavam, explícita ou implicitamente, a necessidade de outros temas de estudo. Para esta fase, apenas um dos grupos de professores manteve-se, mostrando-nos um problema a ser encarado por todos: as condições necessárias para o comprometimento do professor com sua própria formação.

Observamos que a ausência desse compromisso foi a causa da desistência do outro grupo, embora tivéssemos alterado nossos horários para atendê-los e o diretor da escola apoiasse o trabalho que se realizaria, alguns professores

categoricamente negaram-se a participar de qualquer formação e os outros que, aparentemente, estavam interessados, queriam participar no tempo de seus HTPC, isto é, uma, uma e meia ou duas horas, o que não pôde ser atendido, pois inviabilizaria qualquer tipo de formação.

Além disso, a falta de compromisso pessoal faz com que os professores agreguem-se ou desistam de participar do projeto pelos mais variados motivos, além de faltar sempre que achar necessário, o que motiva o truncamento do andamento dos trabalhos. Em nossa pesquisa, um desses casos foi o do Prof. Edson que colocou a perder todo o trabalho do seu grupo por conta de suas faltas, embora estas tenham sido provocadas por motivos de doença. Professor mais velho e com grande ascendência sobre o grupo, faltava e no encontro seguinte fazia com que o trabalho retornasse ao ponto em que havia deixado, não respeitando o que o grupo havia elaborado durante sua ausência. Talvez estas sejam consequências do que Cavalcanti (1999) afirma sobre os adultos necessitarem perceber as vantagens e benefícios de um aprendizado.

Quando iniciamos as atividades com números fracionários, um conteúdo que o professor acredita piamente que domina, sabíamos que precisaríamos de ações diferentes das utilizadas durante a formação de Geometria, na qual os professores colocavam-se, efetivamente, como aprendizes e declaravam desconhecer os conteúdos sobre o tema de estudo.

Dessa forma, decidimos adotar como ações formativas que chamaremos globais, com o objetivo de encaminhar os professores à construção de novos conhecimentos de forma coletiva e a considerar a construção de conhecimentos pelos próprios alunos, as seguintes etapas:

- a) Produção individual de uma sequência didática para o ensino de fracionários para uma quinta série.
- b) Produção em grupo de sequência didática com base nas individuais com mesmo objetivo.
- c) Construção de Organização Didática pela formadora com base nas produções dos professores e sua análise coletiva.
- d) Aplicação da OD construída durante a formação em uma sala de quinta série.

Estas ações mostram a busca de um caminho de formação continuada que efetivamente conduza os professores a refletir sobre suas ações, já adotado em nosso Projeto de Pesquisa. De acordo com Almouloud e Manrique (2001) a capacitação dos professores pode ser vista sob três aspectos: conteúdo, formação didática e uma análise crítica da prática de ensino, observando, orientando e analisando suas ações. Esse caminho é, em parte, compartilhado por Ponte (1992) quando considera como elementos fundamentais em um processo de formação:

- a) o quadro teórico geral, necessariamente com referência à Didática da disciplina;

- b) a dinâmica do processo, envolvendo trabalho de grupo e uma saudável relação entre todos os participantes, incluindo aqueles que têm responsabilidades na formação;
- c) as atividades, proporcionando uma interação com as práticas do professor e solicitando as oportunidades adequadas de reflexão. No entanto, a formação não deve ser vista como podendo só por si conduzir à mudança das concepções e das práticas, sendo o seu alcance dependente do contexto geral em que se desenvolve. (PONTE, 1992, p. 34)

Contudo, o desenvolvimento desse quadro de ações não tem por objetivo somente eliminar dificuldades, pelo contrário, às vezes, é necessário provocá-las para que se atinja os objetivos propostos. Nesse sentido, algumas que foram detectadas, na primeira fase do projeto pelo outro grupo de professores, também se apresentam para estes como, por exemplo, as citadas por Manrique, Silva e Almouloud (2002):

Os professores participantes do projeto embora tenham mudado de postura perante algumas situações, parecem ter mais facilidade em lidar com o concreto. O que poderá se tornar um entrave para atingir e conduzir seus alunos a um pensamento mais genérico e mais formal.

O fato de estarmos tratando com adultos não significa que tenham raciocínios abstratos, pelo contrário, vimos que a formação que receberam não se preocupou provavelmente em lhes proporcionar situações que os fizesse desenvolver compreensão de enunciados, vocabulário próprio, tratamento de informações, ... o que muitas vezes os impossibilitam de solucionar um problema com sucesso. (Ibid, p. 15-16)

O novo enfoque da formação, no entanto, fez com que outras dificuldades surgissem, fazendo com que várias ações que chamaremos pontuais, tivessem que ser revistas. Uma delas diz respeito ao trabalho em grupo, embora estivessem acostumados a esse tipo de relacionamento para estudar Geometria, não sabiam como agir para obter uma produção coletiva.

Assim, enquanto uns acreditavam que poderiam cumprir rápido a tarefa individualmente e que estavam perdendo tempo com o trabalho em grupo: “*Se eu estivesse fazendo sozinha já estava pronta a ideia*” (Prof. Fabiana, 12/9/03, p. 8). Outros habituados a liderar suas salas de aula tentavam colocar seus colegas na posição de alunos obrigando-os a aceitar sempre suas decisões.

Nesse grupo de professores, pudemos constatar que existe uma diferença entre se agrupar para estudar Geometria e para produzir uma sequência de aulas para o ensino de algum conteúdo, embora tenha superado as dificuldades,

transformando-se em um grupo de trabalho cooperativo, como podemos notar nas declarações dos professores que mais sentiram essa dificuldade:

Para mim, foi ótimo trabalhar em grupo. Passei por uma reforma íntima e ainda preciso aprender muito. (Prof. Fabiana, 12/12/03, p. 4)

Sou muito mandona e trabalhando com a Fabiana, tive que me policiar. (Prof. Gina, 12/12/03, p. 4)

Eu acho que eu e a Fabiana conseguimos superar a dificuldade de trabalhar em grupo. (Prof. Gina, 5/3/04, p. 1)

Por outro lado, o PCN sugere para o professor que o sucesso do projeto educativo depende de um convívio em grupo que seja produtivo e cooperativo permitindo situações em que:

se possa aprender a dialogar, a ouvir o outro e ajudá-lo, a pedir ajuda, aproveitar críticas, explicar um ponto de vista, coordenar ações para obter sucesso em uma tarefa conjunta etc. É essencial aprender procedimentos dessa natureza e valorizá-los como forma de convívio escolar e social. (PCN, 1998, p. 91)

Complementa, afirmando que: “trabalhar em grupo de maneira cooperativa é sempre uma tarefa difícil, mesmo para adultos convencidos de sua necessidade”. (PCN, 1998, p. 91) e acrescentamos o desabafo do Prof. Bruno, em seu relatório final: “não basta ouvir e ler belos discursos, passar tanta teoria aos professores sendo que a grande maioria não tem a oportunidade de viver isso de perto”. O que caracteriza o enfoque que, segundo Imbernón (2002), considera:

o professor como um mero executor do currículo e como uma pessoa dependente que adota a inovação criada por outros. [...] Talvez por isso os professores tenham visto a inovação como uma determinação exterior, artificial e separada dos contextos pessoais e institucionais em que trabalham. (Ibid, p. 20)

Em contrapartida, a constatação de *não saberes* ligados a um conteúdo que acreditavam saber gerou algumas situações de conflito em que a formadora teve DE buscar estratégias para intermediá-los, como ações formativas pontuais.

Uma delas ocorreu depois de um encontro em que não conseguiram chegar ao consenso de como trabalhar com situações associadas à concepção de razão. Percebemos a angústia do momento em falas como: “*Quanto mais estudo mais eu não sei*” da Prof. Fabiana e “*Quanto mais estudo, mais penso em quanta bobagem*

*eu já fiz*” do Prof. Bruno. A formadora anotou algumas palavras-chave no quadro: insegurança, maturidade, dificuldade, estudar, bobagens, falta de conhecimento e evolução, convencimento do colega, medo da mudança.

No final, destacou uma por uma das palavras, colocando-as dentro de um quadro de normalidade, para quem busca aprender, procurando melhorar a autoestima e tranquilizando-os para prosseguir seus trabalhos.

Para Davis e Oliveira (1990), as emoções estão presentes quando se busca conhecer, quando se estabelecem relações com objetos físicos, concepções ou outros indivíduos. Afeto e cognição constituem aspectos inseparáveis, presentes em qualquer atividade, embora em proporções variáveis.

Segundo as autoras, a afetividade e a inteligência estruturam-se nas ações e pelas ações dos indivíduos, podendo o afeto ser entendido como a energia necessária, para que a estrutura cognitiva passe a operar. O afeto influencia a velocidade com que se constrói o conhecimento, pois, quando as pessoas sentem-se seguras, aprendem com mais facilidade. Por outro lado, o afeto é um regulador da ação, porque influencia na escolha de objetivos específicos e na valorização de determinados elementos, eventos ou situações pelo indivíduo.

Por outro lado, de acordo com Linard (2000), a autonomia não é uma simples qualidade, mas um modo superior de conduta integrada que, para a maior parte dos indivíduos, não faz parte de seu repertório e, por isso, deve ser aprendida. Para a autora, o conhecer e o aprender se fazem por uma interação intencional e significativa entre sujeitos e objetos, com base em um processo interativo e intencional de estruturação recíproca entre sujeitos e um meio que se desenvolve lentamente no tempo e se auto-organiza partindo de seu próprio funcionamento e de seus próprios resultados. Para ela, a autonomia compreende pelo menos dois níveis distintos:

- O nível elementar, de reflexos e automatismos de autorregulação funcional, comum a todos os sistemas físicos, vivos ou não, que lhe permite controlar e manter por seus próprios meios, sua identidade e sua própria atividade no curso de suas interações com o exterior.
- O nível superior, da conduta intencional, abre o campo restrito do primeiro nível à liberdade de decisão da ação voluntária, da inteligência e do pensamento reflexivo, mas também às tensões e conflitos de emoções e sentimentos, que fornecem ao sistema uma maior amplitude de análise, de escolhas e de iniciativa na determinação de possíveis, objetivos e estratégias de sua ação em função de seus próprios valores. (LINARD, 2003, p.1).

No entanto, percebemos que as reações dos professores são uma tentativa de esconder suas dificuldades em lidar sozinhos com situações complexas e com suas próprias emoções, por não possuírem instrumentos adequados para construir alguma autonomia para suas ações, embora no relatório final alguns falem do assunto, mostrando a presença de alguma mudança nesse sentido:

Eu verifiquei que adquirir mais autonomia, principalmente quando procuro atividades em livros, sinto que posso, melhorá-los, adequá-los e até mesmo criar com grande segurança. (Prof. Davi)

(A formadora) fez a sequência que era para ser feita por nós, os professores, quando eu peguei me surpreendi, pois eu tinha todo o material para fazer, mas eu não tive autonomia e coragem para rever o que me foi dado para pesquisar. (Aluna, rel. final)

A análise da sequência elaborada pela formadora foi compondo um pensamento, fomos capazes até de sugerir variáveis “pedagógicas”. (Prof. Gina, rel. final)

Estas afirmações nos levam a concluir que as situações delicadas e de angústias são necessárias em uma formação que pretenda ensinar alguma autonomia, pois, de acordo com Day (1999 apud Saraiva e Ponte, 2003) é preciso apoiar as ansiedades que acompanham as dificuldades inerentes à mudança e dar tempo para os professores refletirem, porque um dos obstáculos a mudança é a insegurança pessoal.

Desse modo, quando este trabalha com uma determinada orientação curricular, já há algum tempo, domina-a, sente-se confiante para resolver qualquer problema que lhe possa surgir. É natural que o professor tenha relutância e receio em abandonar sua base de segurança, mostrando que a mudança não é apenas um processo cognitivo, mas envolve, também, emoções.

Vimos já algumas mudanças nas relações do professor com o conteúdo e com seus alunos, mas também a resistência desse grupo perceber que, na realidade, os *não saberes* imputados a seus alunos eram também seus e, provavelmente, provocados por suas dificuldades em observar seu aluno em ação. Foi nesse ponto que alguns professores testemunharam mudanças em sua prática, a partir da terceira etapa da formação, relacionadas com os conteúdos discutidos, não só os números fracionários:

O aluno na sala pediu para eu fazer uns exercícios sobre regra de três, aí eu mostrei que não precisava de regra para resolver exercícios desse tipo, resolvi tudo por tabela. (Prof. Davi, 24/10/03, p. 16)

Para trabalhar equação do segundo grau, comecei com fatoração, os alunos acharam difícil, mas fizeram. Quando dei a fórmula de Bhaskara, os alunos disseram que preferem o outro método. (Prof. Antonio, 24/10/03, p. 16)

Os alunos sabem fazer a regra de três, mas não conseguem fazer exercícios. Peguei a tabela que discutimos aqui na semana passada e fui buscar de onde vem a regra. Peguei também um exercício com lacunas na tabela,

um aluno disse que é melhor ensinar o caminho das pedras. É interessante pegar os exercícios e deixar os alunos pensarem, depois voltar para discutir, repetindo os exercícios e mostrar que tem um caminho mais rápido. (Prof. Bruno, 24/10/03, p. 16)

Eu já estou pegando seu (formadora) reflexo também. Porque eu pergunto para o aluno porque ele fez assim, eu questiono o aluno, não falo que ele está errado. E eu acho tão bom. Eles conseguem até explicar o que fizeram. (Prof. Carla, 28/11/03, p. 8)

As nossas aulas depois dessas discussões são outras. (Prof. Edson, 5/12/03, p. 12)

Eu vi que não é só a gente chegar na sala de aula e mostrar para o aluno como faz, mas devemos induzir o aluno a pensar como resolver um determinado problema. Para mim, isto ficou muito forte e mudou minha concepção de ensino. (Aluna, 16/4/04, p. 1)

Este tipo de trabalho é que faz com que os professores percebam a necessidade da progressão continuada, porque ela mostra que não há necessidade da reprovação. (Prof. Bruno, 16/4/04, p. 8)

Conforme Saraiva e Ponte (2003), em uma sociedade em mudança e, consequentemente, em uma escola em mudança, o professor verá a si mesmo de modo permanente como um aprendiz, um agente ativo no seu local de trabalho e um interveniente disposto a colaborar com os colegas, seja quanto à prática letiva, seja em relação a problemas educacionais mais amplos.

A mudança não é algo que possa ser forçada, pois é o professor que se desenvolve (ativo) e não é desenvolvido (passivo). A mudança para ser efetiva deve ser interiorizada e, em níveis cada vez mais profundos, envolvendo a modificação ou transformação de valores, atitudes, emoções e percepções que orientam a prática que só ocorrem quando o professor sente-se dentro das situações com sentido de posse dos processos de tomada de decisão, de acordo com Day (1999, p. 97-98, apud SARAIVA e PONTE, 2003, p. 4).

Há ainda um obstáculo para alguma inovação na instituição escolar que é o da opinião dos colegas, pois, mesmo que um professor tenha conquistado alguma mudança pessoal, a pressão dos colegas pode condicionar sua prática, o que realça a importância que as instituições desempenham na mudança das práticas e também, as maneiras de ser e de estar do professor, pois, mesmo pressionado pelos colegas, ele pode fazer de forma diferente, segundo Saraiva e Ponte (2003).

A mudança, então, deve ser o cerne das formações continuadas, levando em conta que o formador deve, de acordo com Lalanda e Abrantes (1996), orientar na concepção e implementação de situações experimentais significativas, capazes de fornecerem material para reflexão e criar nos formandos disposição para

refletirem criticamente sobre a forma como ensinam, em uma perspectiva de desenvolvimento profissional permanente. Para as autoras, o pensamento reflexivo requer uma prova ou testemunho que lhe sirva de garantia, pois a ideia nasce da inferência e deve ser confrontada com o que é observado e real para poder ser aceita ou rejeitada. Além disso, a mudança é um processo que leva tempo e passa por alteração de crenças, conhecimentos e formas de trabalho do professor que só acontecerão se ele confrontar o novo com o velho e poder refletir sobre os respectivos méritos.

A verdadeira capacitação de um professor só ocorre caso ele tenha a oportunidade de participar de um projeto como esse, que lhe dá chance de refletir sobre seu trabalho, chorando, sorrindo, tendo insônia, ficando nervoso e na maioria das vezes, satisfeito com o resultado final. (Prof. Bruno, rel. final)

Para Perrenoud, do ponto de vista cognitivo:

a investigação é uma sequência de desequilíbrios e equilíbrios, de desorganizações e reestruturações, de momentos de generalização, de diferenciação, de coordenação dos conhecimentos e dos esquemas de pensamento adquiridos. (PERRENOUD, 1993, p. 120, apud PONTE, 1998, p. 14)

Como estratégia formativa que toma como referência mais os processos cognitivos no processo investigativo, do que os rituais das comunidades acadêmicas, de acordo com Ponte (1998) a investigação tem quatro princípios fundamentais:

- a investigação não é a recusa da teoria, mas a busca de uma permanente articulação entre teoria e prática;
- no trabalho investigativo, é decisivo dar especial atenção às fases mais conceituais e não os métodos e técnicas;
- a própria experiência de investigação deve ser transformada em objeto de análise e de reflexão;
- a investigação não deve ser encarada, ela própria, como a solução universal para a formação dos docentes, mas como uma peça de um dispositivo de formação multifacetado e dinâmico. (Ibid, p. 14)

O ponto central da formação de professores, em síntese, é levá-los a pensar criticamente sobre o que os rodeia para torná-los mais reflexivos que, segundo Lalanda e Abrantes (1996, p. 45) “*é algo que acontece naturalmente e de pouco vale tentar ensinar a outro como fazê-lo exatamente*”. De fato, exatamente é impossível, mas, pelo menos, podemos tentar fazê-lo:

Em resumo, o trabalho com frações de alguma maneira denunciou nossas fraquezas, não só o desconhecimento sobre o assunto, algumas manias, desconfianças, atitudes, necessidades, posicionamentos, objetivos e a mais dolorosa das denúncias é ter que admiti-las e superá-las. (Prof. Bruno, rel. final)

Mais que levá-los a pensar é necessário vê-los como produtor de saberes, que, segundo Nacarato (2004, p. 4), “os projetos de formação melhor sucedidos mostram a mudança de foco: das pesquisas sobre professores passa-se a pesquisa com os professores”. Acrescentando que:

Fala-se na necessidade do professor desenvolver-se continuamente [...]. Fala-se da importância do professor estar sempre se atualizando; no entanto, os baixos salários não lhes permitem nem mesmo adquirir livros e bons periódicos na área de atuação para que se mantenha atualizado. Fala-se na importância do trabalho coletivo na escola, mas o pouco espaço que é dado ao professor – quando dado – geralmente é preenchido com os problemas burocráticos da escola. Qual o significado em se falar em professor reflexivo e/ou investigador, com classes numerosas, carga desumana de trabalho e o stress da profissão? (Nacarato, 2004a, p. 6)

Alguns desses princípios são considerados nas exigências que o governo do Estado de São Paulo faz às instituições de ensino superior que contrata para o Programa de Formação Continuada “Teia do Saber”. Assim, um de seus objetivos é:

a investigação e a busca de soluções para problemas práticos dentro e fora do espaço da sala de aula: a experimentação e os trabalhos de campo na aprendizagem dos conhecimentos científicos e tecnológicos” e também que “as ações formativas terão como fundamentos os princípios da ação-reflexão ação, do aprender fazendo e da resolução de problemas. (SÃO PAULO, SEE, p. 3)

Contudo, este discurso não atinge o professor nem o impede, em uma formação como a que propusemos com tantas emoções aflorando, de tecer próprias opiniões a respeito de suas formações iniciais ou continuadas anteriores:

Como estou na faculdade ainda não tenho experiência em sala de aula, eu apliquei as atividades na faculdade e notei que eles têm dificuldades nas leituras das frações. A maior dificuldade dói quando chegamos na equivalência de frações, eles não compreendem. (Aluna, 5/9/03, p. 15)

Depositaram na gente, e agora nós depositamos no aluno. Como nós vamos não ser um depositador? (Prof. Edson, 15/8/03, p. 4)

Na faculdade, o professor também usa a lousa e o fiz. (Prof. X, 15/8/03, p. 4)

Eu acho que eu nunca aprendi na faculdade. (Prof. Y, 15/8/03, p. 4)

O que eu aprendi na graduação, eu não aplico na sala de aula. (Prof. Gina, 29/8/03, p. 1)

Eu já fiz muitas capacitações e nunca ninguém discutiu isto profundamente. (Prof. Bruno, 24/10/03, p. 7)

Eu aprendi muitas coisas que eu não sabia e que eu não acreditava que fosse possível fazer aprender e que o problema está no corpo docente. E que eu não sabia nada de fração e que tem muita coisa para aprender. (Prof. Bruno 16/4/04, p. 8)

Eu estou me sentindo numa oficina pedagógica. (Prof. Bruno)

É isto que deveria ser nossa HTPC. (Prof. X)

Os comentários dos professores remetem-nos a dois pontos cruciais: a formação inicial e o caminho que deve tomar a formação continuada.

Para as duas entendemos que cabe o ponto de vista de Day (1999 apud Saraiva e Ponte, 2003) quando afirma que os adultos aprendem, quando lhes são fornecidas oportunidades para refletir com base em sua experiência vivida e aprendem fazendo, tirando partido das situações que combinam ação e reflexão.

Conforme Saraiva e Ponte (2003), a reflexão mais do que uma simples tomada de consciência da própria experiência e do próprio conhecimento (reflexão sobre os conteúdos), envolve a crítica sobre como estamos percebendo, pensando, julgando e agindo (reflexão sobre os processos), bem como sobre as razões do porquê termos feito o que fizemos (reflexão sobre as premissas).

Assim, recorremos à reflexão, quando queremos uma orientação para a negociação de um passo em uma série de ações ou quando nos debatemos com uma dificuldade na compreensão de uma nova experiência. Os autores concluem que a reflexão é um processo pelo qual os professores estruturam e reestruturam seu conhecimento prático e pessoal, que envolve olhar para trás, bem como olhar para a frente, tornando-se mais crítica quanto mais próximo da resolução do problema em aberto, sendo essencial para o desenvolvimento das competências do professor e como um processo, no qual ele ganha confiança nas suas capacidades para fazer e ensinar Matemática.

De acordo com Cardoso e outros (1996) formar professores reflexivos garantiria, então, a formação de profissionais capazes de promover sua autonomia, pois seriam autônomos em sua atividade, dado que são críticos em relação aos papéis que desempenham. E, ainda, que a atitude reflexiva do professor permitiria desenvolvê-la também nos alunos, por meio de propostas de trabalho que seriam

feitas em sala de aula, do modo como são apresentadas e de sua avaliação e reflexão sobre as ações desenvolvidas.

Mas, formar professores reflexivos em uma investigação colaborativa envolve muitos aspectos críticos que, de acordo com Boavida e Ponte (2002), têm algumas características que tornam este tipo de trabalho particularmente vulnerável:

1. A colaboração é marcada pela imprevisibilidade, pois é um processo dinâmico, criativo e mutável.
2. É preciso saber gerir a diferença pois os participantes têm de “desaprender” o modo como se relacionavam de forma a estabelecer uma nova relação de trabalho marcada pelo diálogo e a confiança.
3. É preciso saber gerir os custos e benefícios pois a complementaridade de formações, experiências e perspectivas é um recurso para o trabalho colaborativo e deve ser considerada no desenvolvimento do trabalho conjunto de modo a que sejam ultrapassadas diferenças de estatuto no interior do grupo e os seus benefícios governem o processo de colaboração.
4. É preciso estar atento em relação à autossatisfação confortável e complacente e ao conformismo, pois é por isso que a colaboração não é um valor em si mesma, mas um meio que é possível e desejável utilizar para ajudar a resolver problemas concretos e reais.

A partir do exposto, a formadora posicionou-se como um assessor de formação para professores de Matemática, dentro da instituição escolar, como nos sugerem os autores citados, no sentido de provocar alguma reflexão sobre sua prática. Por outro lado, o papel de assessor deveria estar presente na formação inicial na prática de ensino.

Os resultados das atuais formações, tanto inicial como continuada mostram que não estão cumprindo minimamente seu papel de formar profissionais aptos a enfrentarem as mudanças que o mundo globalizado exige. Entendemos que a participação de professores e futuros professores em projetos de pesquisa seja um caminho para diminuir a distância entre a prática profissional dos professores e a pesquisa em Educação Matemática, bem como entre a escola e a universidade, enfim, entre teoria e prática, conforme nos sugerem Saraiva e Ponte (2003).

Dessa forma, seriam possíveis atividades com assuntos que os professores acreditam dominar e construir uma nova cultura. A valorização da escola, como a própria palavra diz, passa pela redefinição de valores da instituição escolar, mas para que certos valores façam parte da escola devem ser criadas novas culturas, por exemplo, a maioria dos projetos que a escola desenvolve (lixo, água, ...), dura apenas um ano, o que não é suficiente para fazer parte da cultura da instituição escolar. O mesmo se aplicaria as mudanças das práticas pedagógicas e didáticas dos professores.

Assim, resta buscar o caminho de uma formação continuada que propicie um razoável domínio do conteúdo a ser ensinado, uma adequada compreensão

do lugar do aluno no processo de ensino e aprendizagem e professores capazes de refletir com autonomia sobre como prover a aprendizagem. Essa formação deslumbra-se nas falas do professor Bruno:

Essa discussão deve ser feita junto do professor na escola, como é que podem exigir do professor se esse conhecimento está surgindo agora, depois de muita discussão (se referindo ao tempo que estão demorando em construir as atividades). (12/9/03, p. 18)

Outros (professores) que acreditam nas capacitações acabam se desentusiasmando pelo pouco tempo que tem para se dedicar e o apoio pedagógico que acaba não existindo (relatório final).

As afirmações nos sugerem um novo personagem nas formações, tanto inicial quanto continuada, a do assessor de formação, que também foi lembrada no primeiro mapa conceitual, em que um dos grupos cita a necessidade de orientadores. Este papel é citado por Becker (2001) que os professores precisam encontrar parceiros na escola para introduzir mudanças na sala de aula e, também, por Imbernón (2002) quando defende um assessor de formação:

que intervenha a partir das demandas dos professores ou das instituições educacionais com o objetivo de auxiliar no processo de resolver os problemas ou situações problemáticas profissionais que lhes são próprias e subordinando eventuais contribuições formativas à problemática num processo de compromisso de reflexão na ação. (Ibid, p. 89)

Para o autor, o papel de guia e mediador entre iguais ajuda a encontrar soluções gerais para todos, dando pistas para transpor obstáculos pessoais e institucionais e para gerar um conhecimento compartilhado, mediante uma reflexão crítica, como intelectual comprometido com a prática, devendo envolver-se em um trabalho de inovação das práticas educativas, nas quais ele também pode experimentar e aprender com os demais.

Acreditamos na possibilidade de um trabalho com formadores experientes que atuem nas escolas, diretamente com os professores de Matemática, no sentido de promover, acima de tudo, a aprendizagem dos alunos. Esses formadores que já existem em algumas escolas da rede particular, no papel de assessor de disciplina, podem possibilitar mudanças conscientes, feitas por etapas, que colocariam em um primeiro momento, todos os professores da escola, em busca de solução para a aprendizagem dos alunos da quinta série, para depois, ano a ano, preocuparem-se com as demais.

No entanto, um dos impedimentos para essa proposta é a rotatividade de professores nas escolas do Estado de São Paulo. Enquanto não tivermos professores

designados para uma determinada escola, não conseguiremos mudanças significativas, pois os poucos professores que as promovem, levam-nas consigo quando mudam de escola.

Na realidade, sabemos que o sistema educativo precisa ser valorizado, em relação à sua qualidade, para voltar a ter seu papel fundamental de formador de opinião e transformações sociais e, assim, ser respeitado pela população, em geral, que daria ao professor seu devido valor, como profissional necessário à qualquer sociedade que pretenda algum desenvolvimento, evitando as atuais sensações de derrota por alguns professores:

Não acredito que exista alguma solução para o ensino público. (Prof. Bruno, 22/8/03, p. 8)

Na escola particular também, no ensino como um todo. (Prof. Fabiana, 22/8/03, p. 8)

Um aluno diz: *“só tem dois professores que querem fazer a gente pensar, você e o de Biologia”*. Um outro diz que fica oito anos aprendendo Inglês e não sabe nada. E eu pergunto, mas é só Inglês? (Prof. Bruno, 21/11/03, p. 25)

Mas, não resta a menor dúvida que a qualidade do sistema escolar, passa primeiro, por professores bem formados e conscientes de seu papel social em detrimento do quadro que atualmente se detecta:

frequentemente, o professor está desatualizado em relação à discussão sobre a educação, a profissão e seu papel social, escreve e lê pouco, tem uma enorme dependência do livro didático – quando leciona no ensino fundamental – e uma visão bastante utilitária do aperfeiçoamento profissional. E que desenvolve seu trabalho solitariamente e sem ajuda dos que teriam a função de apoiá-lo profissionalmente. (BRASIL, MEC, 1999, p. 15)

Professores bem formados, que pensem criticamente, certamente, saberão reivindicar direitos com muito mais propriedade, se fazendo ouvir, tanto por órgãos institucionais, quanto por seus alunos e famílias, além de colaborar na promoção da qualidade da instituição educativa que, segundo Imbernón (2002) depende da qualidade dos alunos por meio de suas contribuições à sociedade, da qualidade do que se aprendeu e da forma de aprendê-lo.

Assim, acreditamos respondida nossa terceira questão de pesquisa, visto que pudemos constatar alguns sinais de mudanças no discurso dos professores, agregando às concepções de números fracionários, uma observação mais sensível da

ação de seus alunos que foram conquistadas por ações formativas, tanto globais, quanto pontuais, bem determinadas e susceptíveis de “uma parcela de improvisação e de adaptação a situações novas e únicas, necessárias ao conhecimento profissional e que exigem, não só compreender o problema, como também organizar e esclarecer os objetivos almejados e os meios a serem utilizados para atingi-los”, de acordo com Tardif (2000, p. 7).

# Considerações finais

Ao encerrar este estudo, acreditamos ter respondido as questões de pesquisas apresentadas, além de ter contribuído para o planejamento de ações formativas para professores em exercício.

Nossa pesquisa teve como objetivo prático a formação de um grupo de professores do segundo ciclo do Ensino Fundamental no sentido de encaminhá-los a construção de uma sequência didática para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental. O trabalho tem por objetivo verificar se nossas estratégias para uma formação continuada, baseada em resultados de pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de números fracionários, permitiriam efetivamente um novo olhar dos professores para suas práticas, provocado por mudanças em suas concepções, tanto sobre o conteúdo matemático como a respeito da aprendizagem de seus alunos.

Nestas considerações finais, discorreremos sobre a fundamentação teórica e metodológica, do ponto de vista matemático e das ações formativas; sobre os principais resultados, as questões de pesquisa, nossas hipóteses e novas perspectivas de estudo.



# Fundamentação teórica e metodológica

Tendo em vista o trabalho anterior realizado com esses professores e a constatação de algumas dificuldades no tratamento com números fracionários decidimos em nosso grupo de pesquisa, iniciar uma ampla discussão sobre esse tema, considerando resultados que mostram as dificuldades que esse conteúdo apresenta para seu ensino e aprendizagem, além de sugestões e propostas para novos enfoques de ensino.

Considerando os resultados e as sugestões como os de Behr e outros (1983, 1992) que trataram a conceituação de números racionais baseados nas interpretações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador, deparamos-nos com o desafio de escolher situações que fossem pertinentes ao ensino desse assunto para a quinta série.

Optamos, ainda, como escolha teórica, entender tais interpretações como concepções, de acordo com Artigue (1990). Segundo a autora, as concepções têm a função de evidenciar uma variedade de pontos de vista para um mesmo objeto matemático, além de diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos, entre outros.

Nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999), encontramos os elementos necessários para modelar o conteúdo de números fracionários para a quinta série.

Esta teoria permite-nos que analisemos determinado conteúdo, como produção de uma instituição, de acordo com os tipos de tarefas que os membros dessa instituição devem cumprir, das técnicas que mobilizam para resolver essas tarefas, da tecnologia que utilizam para justificar tais técnicas e da teoria que justifica essas tecnologias.

Para Chevallard (1999), uma Organização ou Praxeologia Matemática (OM) para o conteúdo que se pretende ensinar, orienta o professor ou pesquisador na

escolha de situações propícias para seu ensino, bem como as técnicas possíveis de serem mobilizadas em suas resoluções. Estas técnicas serão explicadas e consideradas como corretas por tecnologias que, por sua vez, são justificadas por teorias pertinentes ao tema em estudo.

Neste trabalho, justificamos as técnicas mobilizadas na resolução das tarefas pelas concepções de números fracionários: parte-todo, medida, quociente, razão e operador associadas a cada uma das situações.

Dessa forma, a escolha de uma OM consiste na decisão de o que se deve ensinar para os alunos, em nosso caso, o que de números fracionários o aluno de quinta série deve aprender. Esta escolha implicará diretamente na elaboração de uma Organização Didática (OD) que consiste em como colocar em prática, na sala de aula, o ensino da Organização Matemática (OM) em jogo.

Por outro lado, Artigue (1990) sugere uma análise epistemológica baseada em estudos históricos, para que o pesquisador liberte-se de possíveis representações errôneas que possa ter de seus saber.

Mediante essas escolhas teóricas, realizamos alguns estudos preliminares para a formação de professores pretendida. O primeiro tratou da questão da terminologia utilizada para se referir ao objeto matemático em discussão: frações, números racionais ou números fracionários que nos levou a adotar o termo “números fracionários” para nos referir a qualquer expressão escrita na forma de fração, inclusive, aquelas que envolvem números complexos ou polinômios.

Um estudo epistemológico apoiado na TAD com a intenção de identificar os tipos de tarefas que se encontravam na razão de ser dos números fracionários pautados nas concepções que poderiam ser associadas a essas tarefas foi realizado e mostrou, conforme síntese apresentada na página 87 deste trabalho que, basicamente, três necessidades provocaram o surgimento dos números fracionários: a de medir, a de distribuir e a de comparar que encaminharam ao desenvolvimento de tarefas para medição, distribuição e comparação. A evolução das sociedades e o surgimento de outras necessidades como as de registrar e calcular com os resultados de medições, distribuições e comparações conduzem a necessidade de transmissão desses novos conhecimentos.

Considerando, em nosso estudo, as produções que tinham como finalidade o ensino desses conhecimentos, encontramos em referências da Antiguidade até os tempos modernos tipos de tarefas que associam, sobretudo, as concepções de medida, quociente e razão, mas, que solicitam em suas técnicas de resolução a mobilização das concepções parte-todo ou operador.

Outro estudo preliminar foi a escolha da Organização Matemática que serviu como referência para a formação dos professores e elaboração e análise das Organizações Didáticas que os professores em formação apresentaram para o ensino de fracionários na quinta série.

Esta organização considerou, tanto os resultados do estudo epistemológico como alguns resultados de pesquisa a respeito de números fracionários, mostrando que a TAD contribui de forma ímpar na organização do que se pretende ensinar, sendo uma vantagem da escolha de uma OM evitar, durante a elaboração da OD correspondente, a escolha de tarefas de mesmo tipo só permitam a mobilização de uma técnica, o que caracterizaria a repetição do mesmo saber-fazer.

Como instrumento de análise das OD, utilizamos os Momentos Didáticos apresentados por Chevallard (1999) que permitem descrever a construção de uma OD que se caracteriza por ensaios, reformulação, paradas e avanços. Assim, de acordo com a definição de cada um dos seis momentos, descritos neste trabalho, a partir da página 168, analisamos as OM possíveis de serem mobilizadas nas OD apresentadas pelos professores.

Utilizamos ainda como auxiliar para a análise dessas OD, a noção de Grau de Completitude de uma OM definidos por Bosch, Fonseca e Gascón (2004). O Grau de Completitude permite avaliar o grau de rigidez de uma OM observando, em especial se apresenta tipos de tarefas que permitam mobilizar diferentes técnicas, além de tarefas reversíveis ou abertas e a incidência ou não do elemento tecnológico.

O emprego da TAD mostrou que é possível evitar, na elaboração de uma OD, a escolha de tarefas de mesmo tipo ou de tarefas que solicitam a mobilização da mesma técnica que representariam o mesmo saber-fazer que caracterizaria uma ação repetitiva para os alunos.

Dessa forma, entendemos que a OM escolhida para a formação é uma contribuição para a instituição escolar no sentido de explicitar uma variedade tal de tipos de tarefas e técnicas que permitam a conceituação de fracionários para a quinta série. A OM permite ainda que o professor analise suas próprias escolhas, a fim de verificar que tipos de tarefas ou técnicas precisa modificar, acrescentar ou retirar.

O método de pesquisa utilizado considera alguns pressupostos da pesquisa-ação que postula a explícita interação entre pesquisadores e sujeitos da situação de investigação para estabelecer a prioridade dos problemas a serem tratados, prevendo o acompanhamento das decisões, ações e de toda atividade intencional no processo.

Nesse sentido, os professores participaram ativamente dos trabalhos e de algumas decisões, como a escolha da sala de quinta série em que o trabalho seria desenvolvido, a professora que conduziria esses trabalhos, a escolha de variáveis didáticas para a OD que seria aplicada, entre outras que faziam parte das discussões de cada encontro em particular. No entanto, o tema de estudo não foi escolhido pelo grupo, porque percebemos que não o fariam, visto que acreditavam nas dificuldades dos alunos e em seu pleno domínio do assunto.

Partimos do princípio que estávamos realizando uma formação continuada planejada e desenvolvida em uma instituição universitária que, do ponto de vista

pragmático, promoveu reflexões sobre a maneira como o professor orienta suas próprias ações. Nesse sentido, buscamos desencadear processos de mudanças de atitudes, concepções e práticas em um ambiente de colaboração entre os participantes que acreditamos cria condições para a reflexão individual e coletiva,

Colocamos em prática a formação por meio de ações que foram planejadas, prevendo a elaboração de uma Organização Didática para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental para ser aplicada em sala de aula. Com esse objetivo, elegemos como prioridade as seguintes ações formativas globais:

- *Produção individual de uma sequência para o ensino de fracionários para a quinta série.*

Esta ação faz parte da primeira etapa da formação e permitiu caracterizar o problema de estudo para os professores, além de ser responsável pelos primeiros contatos com seus *não saberes* sobre números fracionários.

- *Produção em grupo de sequência com base nas individuais com mesmo objetivo.*

Esta ação permeou três etapas da formação: uma que constou da elaboração em grupos da sequência; na outra, foi desenvolvida a formação específica sobre números fracionários e, finalmente, a última etapa, na qual foram retomados os trabalhos para elaboração coletiva da sequência de ensino. Cada uma pontuando ações decorrentes de avaliações e decisões tomadas durante todo o processo.

No desenvolvimento desta ação formativa, várias ações pontuais tiveram de ser decididas para permitir a continuidade das atividades. Uma delas ocorreu quando da percepção, pelos professores, de seus *não saberes* fazendo com que as emoções aflorassem, mediante queixas dos alunos, pais e de sua formação etc., solicitando ações formativas rápidas para reverter esse quadro.

- *Análise coletiva da OD elaborada durante a formação.*

A OD analisada foi elaborada pela formadora e tal ação justifica-se pela mobilização, por parte dos professores, de OM rígidas e pouco abrangentes para o ensino pretendido. Acreditamos que talvez a OD poderia ter sido elaborada pelos próprios professores se o conteúdo matemático efetivamente fosse por eles dominados. Desse modo, a OD foi discutida na quinta etapa da formação e apresentou-se em fichas de atividades para o ensino de fracionários para uma quinta série, considerando ao máximo as sequências de ensino elaboradas pelos professores. A discussão desta OD permitiu que os professores explicitassem alguns resultados da formação na forma de sugestões de alterações pertinentes, inclusive, a sugestão de incluir atividades para as operações com fracionários.

- *Aplicação da OD construída durante a formação em uma sala de quinta série.*

Esta ação, desenvolvida na sexta etapa da formação, foi, em parte, a responsável por um novo olhar do professor para o aluno, que foi possível com base na observação da atuação da formadora no comando da sala de aula, aplicando

algumas fichas da OD elaborada. Assim, a liberdade dada aos alunos, para se expressarem e produzirem, isto é, colocá-los como agentes de sua própria aprendizagem, fez com que os professores descobrissem a importância da observação objetiva dos alunos em ação.

Embora se planejem ações formativas globais, esse tipo de formação pode apresentar alguns momentos críticos, como angústia e desequilíbrio provocados pela constatação de seus *não saberes*, que a tornam vulnerável e imprevisível, solicitando decisões e ações imediatas caracterizadas por ações pontuais.

Essa formação, que durou meses, foi analisada baseada no registro de observações feitas durante todos os encontros por, pelo menos, três observadores focando a construção pelos professores de dois mapas conceituais com a palavra-chave: frações e as Organizações Didáticas que elaboraram no decorrer da formação.

Acreditamos que contribuímos com um método de formação continuada que pretendia desenvolver a autonomia do professor, tanto em relação a conteúdos matemáticos como ao ensino desses conteúdos, que o leva a produzir novos conhecimentos e não apenas a reproduzir. Parece-nos que durante a produção eles podem apresentar seus *não saberes*, enquanto estes podem ser camuflados pelo discurso em situações de reprodução.



# Principais resultados, questões de pesquisas e nossas hipóteses

Tentamos responder nossas questões de pesquisa e validar ou não as hipóteses, sem perder de vista a participação dos professores durante as atividades, a heterogeneidade de suas formações anteriores, bem como suas histórias de vida.

Em busca de respostas para nossa primeira questão de pesquisa: *Que Organização Didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação?*

Constatamos pela análise dos mapas conceituais, realizados com base na palavra-chave frações que, no primeiro mapa, realizado no início da formação, os professores enfatizaram técnicas e nomenclaturas referentes aos fracionários. No segundo, realizado depois da formação específica sobre fracionários a palavra fração não foi citada nem qualquer concepção de números fracionários, embora duas delas priorizem o conteúdo e uma o conhecimento.

Assim, acreditamos que os sentimentos de angústia provocados pela constatação do *não saber* de um conteúdo matemático que julgavam dominar, impediu-os de explicitar, tanto conceitos anteriores quanto os resultantes da formação.

Dessa forma, nossa questão é respondida por OM rígidas que focam a mobilização da concepção parte-todo em contextos que envolvem superfícies, em situações que são resolvidas pela técnica da dupla contagem das partes. Além da concepção de razão, que foi mobilizada como sinônimo de divisão com o predomínio da técnica da regra de três, justificada por raciocínios algébricos apoiados em noções de proporcionalidade.

A busca da resposta para esta questão levou-nos a observar algumas dificuldades dos professores em formação. Embora tivessem acesso a situações que associavam as várias concepções por meio de diversos tipos de tarefas e técnicas, eles apresentaram dificuldades em tomar decisões e colocá-las em prática para obter

OD que mobilizassem OM mais amplas e, assim pudessem favorecer a construção de conhecimentos pertinentes às diversas concepções de fracionários pelos alunos.

Outro ponto a ser considerado foi a dificuldade em produzir em grupo, embora estivessem acostumados a trabalhar dessa forma como aprendizes de Geometria, na primeira fase de nosso projeto. Um dos impedimentos para essa produção em grupo pareceu-nos ser a dificuldade em colocar em prática decisões tomadas para a elaboração da OD.

Além disso, viram-se bloqueados pela percepção de seus *não saberes*, de forma tão profunda, que não conseguiram elaborar a sequência de ensino que pretendiam. Só foram se sentir à vontade para contribuir, de maneira consistente, quando a formadora apresentou a OD por ela elaborada. Era como se soubessem o que deveriam fazer, mas não como.

Mas, a maior dificuldade apresentada no tratamento do conteúdo e, de forma geral, foi fazer relações entre tarefas ou entre técnicas mostrando, muitas vezes, na falta de um olhar crítico para as situações, o não desenvolvimento de capacidades para construir ou analisar com certo objetivo.

Entendemos que essas dificuldades e a produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimentos históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização. O que fica evidente quando afirmam que “*razão é quociente*”, mesmo que na situação a divisão não faça sentido ou quando se surpreendem com a resolução de uma regra de três por tabela, sem explicitar uma letra como incógnita ou, ainda, quando procuram justificativas para a regra de divisão de números fracionários.

De forma geral, nossas análises permitiram indicar algumas mudanças nas concepções de números fracionários, não tanto por garantir que estejam aptos a promover ações formativas eficazes com autonomia para a aprendizagem do assunto por seus alunos, mas, por percebermos a conscientização do grupo da limitação do domínio que tinham desse conteúdo, além da não eficácia de um ensino baseado em regras, sem compreensão. Não acreditamos que possam voltar às antigas práticas para tratar de fracionários.

Embora iniciassem o processo buscando saídas para a aprendizagem dos alunos e afirmassem que estes nada sabiam a respeito de números fracionários, percebemos, no decorrer das atividades, a compatibilidade dessas afirmações com seus próprios *não saberes* que explicitados tornaram-se conscientes e os conduziram a momentos de angústias, incertezas e inseguranças.

Mesmo sendo necessários para a aprendizagem, tanto do conteúdo como de autonomia esses momentos nos revelaram que a reflexão a respeito do conteúdo provocada pela formação deve se aprofundar a ponto de perceber possíveis *não saberes* dos professores, para que esses possam ser tratados efetivamente e garantir alguma aprendizagem. Caso contrário, podemos correr o risco de provocar

discussões superficiais que, momentaneamente, parecem surtir efeito, mas, que não produzem mudanças de práticas a longo prazo.

No entanto, essas formações precisam de tempo, muito tempo, para que realmente possam ser proveitosas para o professor e, conseqüentemente, para o aluno. Por isso, talvez seja mais coerente pensar no papel de um assessor de matemática que esteja em contato com os professores discutindo suas necessidades diárias que o ajude a analisar e preparar suas próprias ações formativas e não formações esporádicas e curtas que discutam, muitas vezes, assuntos que os professores não estão envolvidos naquele momento.

Bosch e Gascón (2001) consideram as tarefas que solicitamos na formação como rotineiras; percebemos que, para esses professores a preparação de aula ocorre basicamente pela reprodução de livros didáticos sem reflexões profundas a respeito das escolhas que podem fazer em seu papel ativo para promoção da aprendizagem de seus alunos.

Embora tendo contato anterior com teorias preocupadas com a aprendizagem e com situações didáticas, diferentes das apresentadas nos livros didáticos durante a formação, apresentaram dificuldades em mudar suas práticas.

Constatamos que, conforme os professores avançavam em seus estudos, mais percebiam a fragilidade de seus conhecimentos sobre fracionários, mostrando a necessidade de uma formação que discutisse amplamente as concepções de fracionários, tipos de tarefas associadas a elas e possíveis técnicas mobilizadas nas resoluções dessas tarefas de acordo com a OM de referência.

No entanto, o retorno à produção da sequência mostrou a carência de autonomia desses professores, em idas e vindas estéreis para a concretização do que pretendiam por um bloqueio, típico como reação de adultos que percebem conhecimentos tidos como efetivos serem ameaçados.

Na busca de respostas para nossa segunda questão: *É possível encaminhar professores de matemática a reflexões que possibilitem mudanças nas concepções que têm de seus alunos proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar?*

Constatamos a possibilidade de mudança no olhar dos professores para seus alunos, quando permitimos que o professor observasse a prática de métodos de ensino flexíveis e interativos que deram para o aluno o lugar efetivo de aprendiz.

Assim, as discussões a respeito dos alunos, durante toda a formação, apontavam para sua falta de interesse e seus *não saberes* como impedimento de novas aprendizagens. A reflexão dessa deficiência na aprendizagem dos alunos como provocada pelo ensino ministrado, só ocorreu durante a aplicação da OD em uma sala de quinta série. Como prevíamos, os professores acreditavam que uma revisão do conteúdo seria suficiente.

No decorrer da formação, tivemos depoimentos de mudança de atitudes, tanto em relação ao conteúdo em jogo como nas relações desses professores com

seus alunos. Eles tinham prazer de comentar durante os encontros cada pequeno avanço que percebiam construir em suas salas de aula, o que talvez tenha permitido que se mantivessem motivados para continuar participando do projeto.

Com certeza, esses avanços ocorreram de maneira diferente em cada professor, alguns se mostraram mais propícios às mudanças e arriscaram-se tentar implantá-las em suas aulas, outros, mais resistentes, testemunharam igualmente algumas mudanças, mas, com muito mais reservas.

Outro resultado significativo, também, em maior ou menor grau de intensidade, foi a constatação, por esses professores, da possibilidade de um trabalho que permita dar aos alunos alguma autonomia na construção de seus próprios conhecimentos. Esta percepção foi possibilitada pela observação objetiva de alunos em ação na sala de aula por esses professores.

Este tipo de mudança deve-se, provavelmente, a possibilidade de ver um professor mais experiente, do ponto de vista matemático e didático, atuando na sala de aula, interagindo, prevendo e solicitando a participação do aluno, bem como concluindo e institucionalizando os conteúdos de números fracionários trabalhados. Era como se esses professores soubessem, o que deveriam fazer, mas não como fazer.

Aliás, esta é uma necessidade que todos gostariam de ver satisfeita em suas formações, pois como afirmaram o discurso teórico que recebem cai no vazio porque não sabem como transformá-los em prática. Nesse aspecto merece a crítica aos estágios supervisionados das formações iniciais que, em sua maioria, não têm tal preocupação e a possibilidade de o professor em exercício ter um assessor que possa cumprir esse papel, para que haja uma efetiva mudança nas práticas dos professores em exercício.

Por outro lado, observamos que esses professores usavam os *não saberes* dos alunos, mais como um escudo de defesa do que pela observação e avaliação coerente desses alunos. Embora não possamos afirmar que lhes dão um novo lugar na instituição escolar, porque interferências externas (pais, escola, sistema escolar, ...) ainda não o permitem, vislumbram a possibilidade de uma aprendizagem efetiva dos alunos.

Nossas constatações são confirmadas por Estrela (1994), quando afirma que o professor, geralmente, “olha” para sua classe, mas não a vê, porque não sabe observar de forma objetiva seus alunos. Davis e Oliveira (1990) afirmam que é importante a interpretação que o professor faz do comportamento dos alunos, para que, de fato, exista a interação professor-alunos e estes possam construir seus conhecimentos.

Pretendendo responder nossa terceira questão: *É possível em uma formação continuada promover ações que permitam aos professores alguma mudança em sua prática de ensino de números fracionários para uma quinta série?*

Percebemos que a falta de formação para tomadas de decisão que se apresentariam com o desenvolvimento de alguma autonomia, concorre como uma das prováveis causas das dificuldades apresentadas pelos professores.

Isso, provavelmente, porque estão acostumados a desempenhar seu papel, baseados em noções e princípios disponíveis na instituição escolar que não foram criadas por eles e, muitas vezes, são desconhecidas, porque foram instituídas em momentos históricos diferentes.

Constatamos que a formação inicial não os preparou nem para ensinar conteúdos matemáticos básicos, nem para desenvolverem autonomia suficiente para aprofundar esses conhecimentos ou se apropriar de resultados de pesquisa, que lhes poderiam auxiliar a melhor ensinar.

As emoções e sentimentos explicitados claramente no segundo mapa conceitual foram o ponto chave para as mudanças dos professores, da percepção de desequilíbrio de seus conhecimentos de fracionários ao entusiasmo de ver os alunos trabalhando em grupo e gostando da régua de polegadas, que haviam rejeitado durante a elaboração do material. O fato é que esse desequilíbrio foi necessário para promover a aprendizagem do conteúdo e de alguma autonomia.

As concepções que os professores tinham no início da formação a respeito de fracionários funcionaram na realidade como um bloqueio a novas realidades, não permitindo diferentes possibilidades de atuação e compreensão. Um tema considerado de pleno domínio pelos professores, quando colocado para uma reflexão mais profunda deixa-os embaraçados, tanto do ponto de vista emocional como em relação ao discurso que fazem sobre o *não saber* de seus alunos.

Entendemos que a possibilidade de mudança na prática de ensino de fracionários de professores em exercício pode ser conquistada com ações formativas planejadas, para que os professores possam refletir profundamente não só sobre as práticas, mas também sobre seus conhecimentos desse conteúdo.

No entanto, não podemos afirmar categoricamente que nossa formação propiciou tal resposta, visto que não os acompanhamos ensinando em suas próprias salas de aula, embora vários depoimentos apresentados revelem alguns indícios de mudanças de atitudes não, necessariamente, relativas ao tema de nosso estudo.

De qualquer forma, o material de ensino produzido durante a formação foi aceito pela professora da classe de quinta série onde foi aplicado e ela mostrou interesse em adotá-lo, mesmo sem fazer parte do grupo em formação. Esse querer, logo foi incorporado pelos professores do grupo no sentido de auxiliá-la no que fosse preciso, para que o material pudesse ser utilizado não só por essa professora, mas também por outros professores de quinta série. No entanto, esta é uma perspectiva de mudança que não pudemos acompanhar em nossos estudos.

Outro resultado mostrou-nos que uma formação colaborativa deve ser planejada por ações formativas globais que conduzam os professores a agir e refletir,

tanto sobre suas ações como sobre suas carências didáticas e pedagógicas. Esse planejamento inicial é modificado, de acordo com as necessidades que se apresentam, por decisões que se traduzem em ações pontuais que devem ser tomadas de imediato, pois sem elas, provavelmente, estas conclusões poderiam não ter acontecido.

No entanto, o formador deve estar preparado para agir em momentos difíceis, tanto no sentido de manter a confiança do professor no formador, sem a qual nada pode ser feito como para mostrar sensibilidade aos percalços que enfrentam, sem perder a direção e os propósitos da formação.

Do ponto de vista teórico, nossos resultados confirmam as afirmações de Chevallard (1999) a respeito das ações do professor, quando se prepara para ensinar um conteúdo “observando” um ou vários livros didáticos, “analisando”, geralmente, de maneira superficial o conteúdo, “avaliando” esse conteúdo para finalmente, “desenvolver” sua própria obra.

Da mesma forma, confirmam os estudos de Balacheff (1995) quando afirma que é possível a coabitação em um sujeito de conhecimentos contraditórios aos olhos de um observador que relaciona as situações como aos olhos do sujeito estas são vistas como distintas, o que talvez justificaria a dificuldade dos professores fazer relações de forma geral.

Por outro lado, as concepções dos professores a respeito de fracionários funcionaram como filtro de acordo com Ponte (1992) bloqueando novas realidades e novas possibilidades de atuação. Provavelmente, na medida que as reflexões explicitam os conhecimentos contraditórios citados por Balacheff, os professores utilizam-nos como escudo no sentido de evitar prováveis desequilíbrios. Por outro lado, Schulmann (1987) afirma que o professor deve compreender a fundo a matéria que ensina, pois, esta é a fonte principal da compreensão por parte do aluno.

Mas, para Davis e Oliveira (1990) afeto e cognição constituem aspectos inseparáveis que estão presentes em qualquer atividade e o afeto é a energia, para que a estrutura cognitiva passe a operar. Nesse sentido, Day (1999, apud Saraiva e Ponte, 2003) acredita que é preciso apoiar as ansiedades que acompanham as dificuldades provocadas pela mudança e dar tempo, para que os professores reflitam porque um dos obstáculos a mudança é a insegurança pessoal. Mudança esta que, para Saraiva e Ponte (2003) é possível quando o professor se desenvolve e não é “desenvolvido”, pois a mudança deve ser interiorizada em níveis cada vez mais profundos.

# Implicações e perspectivas futuras

Entendemos que nossos resultados implicam a busca de novos caminhos para a formação continuada de professores em exercício na direção de suas relações com o saber que pretendem ensinar, de suas relações com os alunos voltadas para a aprendizagem e suas relações com seu aperfeiçoamento profissional.

Do ponto de vista do saber a ser ensinado as formações, geralmente, procuram tratar os *não saberes* que os professores alegam ter, quando lhes dão essa oportunidade ou assuntos que os formadores acreditam que os professores não sabem, por pequenos períodos.

Assim, ao contrário, mostramos que os professores precisam também de formação para conteúdos que acreditam saber, não para constatar que seu domínio é restrito, mas, para se apropriarem de resultados de pesquisa e novos enfoques para seu ensino. Por outro lado, observamos que a formação deve dar o tempo necessário, para que possam se apropriar de novos conhecimentos, o que não pode ser realizado em apenas alguns encontros..

A atenção para as relações com os outros participantes do grupo de professores em formação, também, deve fazer parte das ações formativas, pois como percebemos não estão habituados a participar de produções coletivas; pelo contrário, estão acostumados a decidir suas ações didáticas e pedagógicas solitariamente.

O fato leva a reforçar a questão do tempo de formação, visto que esta deve propiciar as trocas necessárias com os colegas e com o saber, até que mudanças que possibilitem um ensino mais significativo possam ser observadas em suas práticas. Esse tempo, certamente, deverá variar de acordo com o grupo em formação.

Entendemos que tanto a questão do tempo de formação como a necessidade explicitada por esse grupo de professores de observar alguém atuando em sala de aula em atividades colaborativas, sugerem o papel de um assessor de Matemática que os auxilie no cumprimento satisfatório de suas tarefas docentes diariamente.

Por outro lado, reafirmamos a exigência do domínio da Matemática a ser ensinada, para que o professor possa compreender e empregar métodos de ensino flexíveis e interativos, visto que seus pontos de vista, suas crenças e escolhas influenciam sua prática que deveria ser considerada já na formação inicial. Quando isto não acontece, não faz sentido a formação continuada tratar os professores como alunos, atuando sobre situações elaboradas por outros, mas, como adultos que podem analisar e refletir sobre suas práticas e compreender assim as vantagens de mudá-las e o benefício decorrente para seus alunos.

Nesse sentido, a Andragogia apresenta-se, segundo Cavalcanti (1999), como uma teoria que estuda a aprendizagem de adultos. Para essa teoria, os adultos sentem-se motivados a aprender, quando percebem vantagens e benefícios de um aprendizado ou, ainda, consequências negativas para seu não conhecimento.

Em nosso trabalho, observamos que o comprometimento com as atividades desenvolvidas é um fator importante para a formação. Como vimos poucos se engajaram e efetivamente, participaram da totalidade dos trabalhos, outros vinham de modo esporádico e a maioria dos professores da escola negou-se a participar. Podemos entender que isso acontece pelo professor não perceber vantagens ou consequências negativas em sua participação. Para Cavalcanti (1999) as motivações mais acentuadas dos adultos são internas, relacionadas com a satisfação pelo trabalho realizado, melhora da qualidade de vida e elevação da auto estima que acreditamos devem ser levadas em conta no planejamento de uma formação continuada.

Sabemos que cada grupo tem suas características e são estas que determinam seus caminhos de formação; no entanto, acreditamos que os professores precisam aprender a analisar objetivamente suas práticas e ter autonomia para se apropriar de forma colaborativa na escola de resultados que permitam mudar o quadro atual da aprendizagem.

Em termos de futuras perspectivas, nosso estudo deixa em aberto algumas questões. Uma delas, relativa a números fracionários, seria a escolha de uma Praxeologia Didática para as operações com fracionários. Outra seria a escolha de uma Praxeologia Didática que permitiria a institucionalização do Conjunto dos Números Racionais, além de Praxeologias Matemáticas mais amplas, para o estudo de fracionários em outros conteúdos do Ensino Fundamental, como frações algébricas, por exemplo.

Estes estudos vislumbram, então, a construção do campo conceitual dos racionais para esse nível de ensino. Estudos desse tipo envolvendo números complexos e polinômios no Ensino Médio permitiriam, então, a construção do campo conceitual dos números fracionários.

Uma outra perspectiva que vemos, seria um estudo mais aprofundado a respeito do professor como observador de seus alunos em ação em sala de aula. Esse

estudo, certamente, contribuiria para a formação inicial e continuada no sentido de melhor prepará-los para buscar a aprendizagem de seus alunos.

Esta sugestão é feita por constatar que os professores queriam que a formação dos alunos, tratada neste trabalho, tivesse mais tempo, além de permitir a avaliação dos alunos para verificar ou não a aprendizagem.

Um outro estudo seria o que permitisse encontrar o perfil de um assessor de Matemática. Entendemos que esse assessor teria a função de atender os professores de matemática de uma ou mais escolas de uma região, assessorando-os nas escolhas didáticas e pedagógicas pertinentes para cada conteúdo a ser ensinado, nas quais os professores organizados por série pudessem colaborar nas decisões tomadas e apropriar-se de novos enfoques para privilegiar a aprendizagem.

Além disso, o assessor pode atuar como formador no sentido de encaminhar os professores a compreenderem sugestões e novos enfoques, tendo como foco a aprendizagem dos alunos. Não resta dúvidas, o aluno tem mais facilidade em responder, satisfatoriamente, a ações positivas que mostrem interesse por sua real aprendizagem.

Mas, quem pode ser esse assessor? Seria essa atuação a ideal para esse assessor na escola? Como e onde formar esse assessor? Acreditamos que deva dominar a Matemática e seus aspectos didáticos e pedagógicos, além de estar preparado para tratar com o professor em exercício, ajudando-o em um ambiente colaborativo e de respeito às diferenças.

Assim, concluímos nosso trabalho esperando que tenham sido revêlados novos caminhos para a formação (inicial ou continuada) de professores e a necessidade de trabalhos que permitam uma melhor compreensão dos mecanismos de mudança de concepções e atitudes dos professores.

Na realidade, concordamos com Ponte (1992), quando cita que é necessária uma outra atitude da sociedade em relação à escola e, outra atitude da escola em relação a si mesma.

Esta renovação passará, certamente, por uma dinâmica de projetos inovadores que colocarão novos desafios aos professores, exigindo uma outra forma de estar na profissão, com uma maior disponibilidade de investimento, maior curiosidade intelectual (tanto no que diz respeito ao domínio curricular como às novas correntes pedagógicas e metodologia de ensino), isto é, uma capacidade mais efetiva de trabalhar em grupo aberta à crítica e com sentido de autoavaliação.



# Referências

- ADJIAGE, Robert; PLUVINAGE, François. *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. 2000, v. 20, n° 1, p. 4-88.
- ALPHONSE, Munyazikwiye. *Problèmes didactiques liés aux écritures des nombres*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 1995. v. 15, n° 2, p. 31-62.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. et al. *Uma Caracterização dos Professores de Matemática de 5ª a 8ª séries da Rede Pública do Estado de São Paulo*. 21ª ANPED – Caxambu, MG. 1998.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lúcia. *A geometria no Ensino Fundamental: concepções de professoras e de alunos*. 24ª Reunião da ANPED – Caxambu, MG. 2001.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lúcia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia M. *A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professoras e alunos*. Revista Brasileira de Educação, set/out/nov/dez 2004, n° 27, Rio de Janeiro.
- ARTIGUE, Michèle. *Épistémologie et Didactique*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 10-2.3, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1990. p. 241-286.

- AZANHA, José Mário Pires. *Comentários sobre a formação de professores em São Paulo*. In: SERBINO, Raquel Volpato et al (Org.). *Formação de Professores*. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 1998. (Seminários e debates).
- BALACHEFF, Nicolas. *Conception, connaissance et concept*. In: Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques, 1994-1995, Séminaire n° 157. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1995, p. 219-244.
- BELLEMAIN, Paula Moreira Balar; LIMA, Paulo Figueiredo. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental*. Natal: SBHMata, 2002.
- BECKER, Fernando. *Educação e construção do conhecimento*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.
- BEHR, Merlyn J. et al. *Rational-number concepts*. In *Acquisition of mathematical concepts and process*. New York: R. Lesh e M. Landau (Eds.), 1983, p. 91-123).
- \_\_\_\_\_. *Rational Number, Ratio and Proportionality*. 1992. In PME-NA XX, volume I (p. 89-93) Raleigh, North Carolina. Disponível em <http://education.umn.edu/rationalnumberproject>. Acessado em 16/03/2004.
- BELL, E. T.. *Historia de las matemáticas*. Tradução de R. Ortiz. 3. ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1996.
- BOAVIDA, Ana Maria, PONTE, João Pedro da. *Investigação colaborativa: potencialidades e problemas*. In: Refletir e investigar sobre a prática profissional, GT1 (Org.). Lisboa: APM, 2002, p. 43-55.
- BOSCH, Marianna; CHEVALARD, Yves. *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 1999, v. 19, n° 1, p 77-124.
- BOSCH, Marianna; FONSECA, Cecílio; GASCÓN, Josep. *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales em las instituciones escolares*. In: Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 24/2.3, Grenoble, França: La Pensée Sauvage, 2004, p. 205-250.

- BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Las Prácticas Docentes Del Profesor de Matemáticas*. XI ème École d'Été de Didactiques des Mathématiques. França: 2001. versão provisória. Disponível em: [http://ugr.es/~godino/diidm/almeria/practicas\\_docentes.pdf](http://ugr.es/~godino/diidm/almeria/practicas_docentes.pdf). Acessado em 17/05/2005
- BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Organiser l'étude. 2. Theories & Empiries*. Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletrônica.
- BOURDON, M. *Éléments D'Algèbre*. 19ª Edição, Revista por M. E. Prouhet. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897. 655 p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- BRITO, Márcia Regina F. de. (Org.). *Psicologia da educação Matemática: teoria e pesquisa*. Florianópolis: Insular, 2001.
- BROUSSEAU, Guy. *Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques*. In: Recherches em Didactique des Mathématiques. V.4. N° 2, p. 165-198, 1983.
- BROUSSEAU, Guy. *Fondements et Méthodes de La Didactique des Mathématiques*. In: Recherches em Didactique des Mathématiques. V.7. N° 2, p. 33-115, 1986.
- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Ed. 1984, 318 p.
- CARDOSO, Ana Maria et al. *O movimento da autonomia do aluno – repercussões a nível de supervisão*. In: ALARCÃO, Isabel (Org.) *Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão*. Portugal: Porto, 1996, p. 63-88.
- CARPENTER, Thomas P. et al. *Teaching and learning racional numbers*, versão preliminar, Winsconsin Center for Education Research, 1994.
- CAVALCANTI, Roberto de Albuquerque. *Andragogia: a aprendizagem dos adultos*. Revista de Clínica Cirúrgica da Paraíba, nº 6, Ano 4, julho de 1999. Disponível em: <http://www.ccs.ufpb.br/depcir/andrag.html>. Acessado em 28/06/2005.

CHEVALLARD, Yves. *Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. V. 12, n° 1, p. 73-112, 1992.

\_\_\_\_\_. *L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 19. n° 2. 1999, p.221-266.

\_\_\_\_\_. *Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions*. Actes de la 11<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletrônica.

CHEVALARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CISCAR, Salvador Llinares, GARCIA, Maria Victoria Sánchez. *Fracciones: la ración parte-todo*. Madri: Editora Sintesis S.A. 1988. 168 p.

CRAMER, Kathleen et al. *Research on rational number, ratio and proportionality*. 1998. PME-NA XX, v. 1, pp. 89-93. In <http://education.umn.edu/rational-numberproject>, acessado em 16/03/2004.

CUNHA, Antonio Geraldo de. *Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

CUNHA, Maria Carolina Cascino da. *As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> séries*. Dissertação (mestrado em Ensino da Matemática) PUC/SP. 1997.

D'AUGUSTINE, Charles H. *Métodos modernos para o ensino da Matemática*. Tradução de Maria Lúcia F. E. Peres. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1976.

DAVIS, Philip J.; HERSCH, Reuben. *A experiência matemática*. 2. ed. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAVIS, Cláudia; OLIVEIRA, Zilma de. *Psicologia na Educação*. São Paulo: Cortez, 1990. (Série Formação do professor).

DUVAL, Raymond. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1993, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.

\_\_\_\_\_. *Sémiosis et pensée humaine*. Suíça: Peter Lang S.A. 1995. p. 1-86.

ESTRELA, Albano. *Teoria e prática de observações de classes: uma estratégia de formação de professores*. 4. ed. Portugal: Porto, 1994.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FARIA, Wilson de. *Mapas conceituais: aplicações ao ensino, currículo e avaliação*. São Paulo: EPU, 1995. (Temas básicos de educação e ensino).

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

GARCIA, M<sup>a</sup> Victoria Sanches. *Dificuldades específicas em el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros*. Ministério de Education, Cultura y Desporte. 2003. p. 10-27.

GODINO, Juan; BATANERO, Carmen. *Significado Institucional Y Personal de Los Objetos Matemáticos*. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. V. 14, n° 3, 1994. p. 325-355. Disponível em: [www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm](http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm). Acessado em 16/06/2005.

\_\_\_\_\_. *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Granada: Proyecto de Investigación y desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnologia. 2002. p. 414-443.

GODINO, Juan et al. *Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. Análisis didáctico mediante la Teoría de las Funciones Semióticas*. In XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática. Córdoba, Abril 2003. Disponível em: <http://ugr.es/local/godino/siidm/>. Acessado em 17/05/2004.

GUNDLACH, Bernard H. *Números e Numerais*. Coleção: Tópicos da História da Matemática. São Paulo: Atual Editora, 1992, 77 p.

- HERNSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*. Tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Editora Polígono S/A. 1970. 413 p.
- IFRAH, Georges. *História Universal dos Algarismos*. Volume 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- \_\_\_\_\_. *Os Números – A História de uma Grande Invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.
- IMBERNÓN, Francisco. *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. 3. ed. São Paulo, Cortez, 2002. (Coleção Questões da nossa época; v.77).
- JAHN, A. P. et al. *Lógica das equivalências*. In: 22ª Reunião Anual da ANPEd – Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu/MG. 1999.
- KARLSON, Paul. *A Magia dos Números: A Matemática ao Alcance de Todos*. Coleção Tapete Mágico XXXI. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugenio Brito e Frederico Porta, Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.
- KIEREN, Thomas E. *Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development*. In: Number Concepts and Operations in the middle grades. J. Hiebert & M. Behr (Eds.). 1988, p. 162-181.
- KIEREN, Thomas E. *Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understand*. In *Rational Numbers: an integration of Research*. Carpenter, Fennema e Romberg (org), New Jersey: LEA, 1993, p. 49-84.
- LALANDA, Maria Conceição; ABRANTES, Maria Manuela. *O conceito de reflexão em J. Dewey*. In: ALARCÃO, Isabel (Org.) *Formação Reflexiva de Professores – estratégias de supervisão*. Portugal: Porto Editora, 1996. p. 41-62.
- LIPMAN, Matthew. *O pensar na educação*. 3.ed. Tradução de Ann Mary F. Perpétuo. Petrópolis: Vozes, 2001.
- LINARD, Monique. *L'autonomie de l'apprenant et lês TIC*. Anais: Reseaux humains/Réseaux technologiques, Présence à distance. Université de Poitiers, 2000, CROP Portiers, p. 41-49. Disponível em: <http://www.eopathie.com/publications.htm>.

- \_\_\_\_\_. *Autoformation, éthique et technologies: enjeux et paradoxes de l'autonomie*. In: *Autoformation et enseignement supérieur*, ALBERO, B. (Org.). Hermes/Lavoisier, 2003, p. 241-263. Disponível em: <http://www.eopathie.com/publications.htm>.
- LUDKE, Menga; ANDRE, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986. (Coleção Temas básicos de educação e ensino).
- MANRIQUE, Ana Lúcia; SILVA, Maria José F. da; ALMOULOU, Saddo Ag. *Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental*. 25ª Reunião da ANPED – Caxambu, MG. 2002.
- MANRIQUE, Ana Lúcia. *Processo de Formação de Professores em Geometria: mudanças em concepções e práticas*. Tese (doutorado em Psicologia da Educação) PUC/SP, 2003.
- MEC. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental-Matemática*. Brasília, 1998.
- MEC. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Referências para Formação de Professores*. Brasília, 1999.
- MELLO E SOUZA. *As grandes fantasias da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Getúlio Costa, 1945. 348p.
- MENEZES, Darcy Leal de. *Abecedário da Álgebra*. Rio de Janeiro: Departamento de Imprensa Nacional. 1959, v.1.
- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.
- MOREIRA, Marco Antonio. *Aprendizagem significativa*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção tendências em educação matemática, 11).

NACARATO, Adair Mendes. *A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e desafios frente às políticas públicas*. Recife. Anais ENEM 2004a. Disponível em: <http://www.sbem.com.br>.

\_\_\_\_\_. *O professor que ensina Matemática e sua relação comos diferentes materiais didáticos: desafios e resistências*. Anais VII EPDM, 2004b. Disponível em: [http://www.sebempaulista.org.br/epem/anais/mesa\\_redonda/mr13-adair.doc](http://www.sebempaulista.org.br/epem/anais/mesa_redonda/mr13-adair.doc).

NEYRET, Robert. *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. Tese (doutorado Didactique des Mathématiques). Université Joseph Fourier – Grenoble 1. 1995.

NIVEN, Ivan Norton. *Números: racionais e irracionais*. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984 (Coleção fundamentos da matemática elementar).

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças Fazendo Matemática*. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Helia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. *Tarefas de investigação em Matemática: histórias da sala de aula*. In: Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática, Portugal, Portalegre: SPCE-SEM, 1998, p. 107-125. Disponível em: [http://membros.aveiro-digital.net/matematica/textos/p\\_189-206.pdf](http://membros.aveiro-digital.net/matematica/textos/p_189-206.pdf).

PAVANELLO, Regina Maria. *Geometria e Construção de Conceitos Aritméticos: investigando algumas inter-relações*. In: Teoria e Prática da Educação. v.4. n° 8. Maringá: UEM, junho/2001, p. 113-123

PLUVINAGE, François. *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*. In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. 1998. p. 125-138.

PONTE, J. P. da. *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação*. In: Educação Matemática: temas de investigação. Lisboa: J.P.Ponte (Ed.) 1992. p.185-239.

- \_\_\_\_\_. *Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso?* 1994. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/jponte/docs-pt/94-ponte\(noesis\).rtf](http://www.educ.fc.ul.pt/jponte/docs-pt/94-ponte(noesis).rtf). Acessado em: 10/05/2005.
- \_\_\_\_\_. *Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional*. Conferência no IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Universidade de Aveiro, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/cdp.htm>
- POST, Thomas, BEHR, Merlyn, LESH, Richard. *Interpretations of Rational Number Concepts*. In: Mathematics for Grades 5-9. Reston, Virginia: L. Silvey & Smart (Eds.). 1982, p. 59-72. Disponível em <http://education.umn.edu/rationalnumberproject>, acessado em 16/03/2004.
- ROUCHE, Nicolas. *Pourquoi ont-ils inventé des fractions?* Paris: Ellipses/Edition marketing S.A. 1998, 125p.
- SALLÁN, José Maria Gairín. *Sistemas de representación de números racionales positivos. Um estúdio com maestros em formación*. In Contextos Educativos, 2001, p. 137-159.
- SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática – Curso ginásial: 1ª série*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1960.
- \_\_\_\_\_. *Matemática – Curso ginásial: 3ª série*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.
- SANTOS, Vinício de Macedo. *Avaliação em matemática: o que compete ao professor*. Anais ENEM 2004, Mesa-redonda: Da avaliação do rendimento para a avaliação da aprendizagem matemática.
- SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Programa de Avaliação Educacional. Avaliação do Rendimento das Escolas Públicas do Estado de São Paulo – etapa 94*. (SARESP), 1995.
- \_\_\_\_\_. *Programa de Formação Continuada “Teia do Saber”*. Projeto, 2005. Disponível em: <[http://cenp.edunet.sp.gov.br/TRSaber/Teia\\_saber/Projeto/202005.pdf](http://cenp.edunet.sp.gov.br/TRSaber/Teia_saber/Projeto/202005.pdf)> Acessado em 24/06/2005.

- SARAIVA, Manuel; PONTE, João Pedro da. *O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática*. 2003. Quadrante, 12 (2), p. 25-52. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Saraiva-Ponte\(Quadrante\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Saraiva-Ponte(Quadrante).doc)
- SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática). *Anais do I Seminário Nacional de Licenciaturas*. Bahia, Salvador, 2003. Disponível em: [www.sbem.com.br](http://www.sbem.com.br). Acessado em 09/09/2004.
- STRUIK, Dirk J. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 2ª edição. Lisboa: Gradiva, 1997.
- SCHUBRING, Gert. *Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aula*. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2003.
- SHULMAN, Lee S. *Conocimiento y enseñanza*. In: *Estudios públicos*, 83. Centro de Estudios Públicos. Traduzido por Alberto Ide. Chile: Santiago, 1987. p. 163-196.
- SILVA, Maria José Ferreira da. *Sobre a introdução de número fracionário*. São Paulo: PUC/SP. 1997. Dissertação (mestrado em Ensino da Matemática).
- SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. *Medida e números fracionários*. VII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Rio de Janeiro: 2001.
- SILVA, Maria José Ferreira da; MANRIQUE, Ana Lúcia; ALMOULOU, Saddo Ag. *Possíveis mudanças de postura em professores do Ensino Fundamental trabalhando com Geometria*. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Recife: 2004.
- TARDIF, Maurice. *Saberes Profissionais dos Professores e Conhecimentos Universitários*. Elementos para uma Epistemologia de prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação*. Nº 13. 2000.
- THIOLENT, Michel. *Metodologia da pesquisa-ação*. 12.ed. São Paulo: Cortez, 2003. (Coleção temas básicos de pesquisa-ação).

- THOMPSON, Alba Gonzalez. *A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica*. In: Zetetiké, v. 5, n° 8, Campinas, SP: UNICAMP – FE – CEMPEM, 1997. p. 11-44. (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática).
- VALENTE, Vagner Rodrigues. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. 2. ed. São Paulo: Annablume editora, FAPESP, 2002.
- VALENTE, Vagner Rodrigues (org.). *O Nascimento da Matemática do Ginásio*. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.
- VERGNAUD, Gérard. *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Um exemple: les structures additives*. In: Petix X, n° 22, p. 51-69, 1989-1990.
- VIZCARRA, Rafael Escolano; SALLÁN, José Maria Gairín. *Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria*. In: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM). marzo de 2005, n° 1, p. 17-35. Disponível em: [www.fisem.org](http://www.fisem.org), acessado em 16/03/2004.

## Sites

<http://www.malhatlantica.pt.mathis/> acessada em 16/06/2004.

<http://www.geocities.com/CollegePark/Quad/8357/hamurabi.htm> acessada em 16/06/2004

<http://www.prandiano.com.br> acessada em 10/6/2004.

[http://descartes.cnice.mecd.es/taller\\_de\\_matematicos/Historia](http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicos/Historia) acessada em 15/05/2004.

<http://www.matematica.br.historia> acessada em 16/06/2004



## **Material da formação específica: as concepções de números fracionários**

### **1 Introdução**

#### **1.1 Significado**

Em nossas atividades para elaboração de uma sequência de atividades que desse conta do ensino dos números fracionários, para a quinta série, o primeiro ponto importante levantado foi a necessidade de que as crianças dessem significado a esse conhecimento. Vimos também que muitas situações permitiam interpretações diferentes para os números fracionários e o quanto seria importante trabalhar com essas interpretações seria importante para o aprendizado da criança. Chamamos essas interpretações de concepções e as discutiremos considerando suas principais características em situações que as associam, bem como o tratamento necessário para a resolução de cada uma dessas situações. Veremos as seguintes concepções parte/todo, medida, quociente, razão e operador.

#### **1.2 Quantidades**

Quantificar significa associar um número, por meio de contagem ou medição, a alguma grandeza. Historicamente o conjunto dos números naturais surge para quantificar grandezas discretas e o conjunto dos números reais para quantificar grandezas contínuas. Boyer (1974, p. 52) diz que:

Originalmente, nos círculos pitagóricos, as grandezas eram representadas por pedrinhas, [...] mas na época de Euclides surge completa mudança de ponto de vista. As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em Os elementos os próprios inteiros

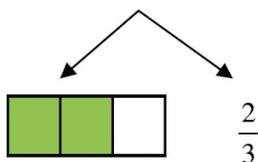
são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas [...] era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos.

Ainda, de acordo com Boyer (1974), isso se deve, provavelmente aos paradoxos de Zeno e outros. O mais conhecido é o da corrida de Aquiles com a tartaruga. Como esta sai com vantagem Aquiles por mais depressa que corra nunca a alcançará. *Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade"* (p. 51).

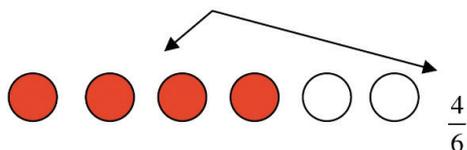
### 1.3 Representações

Além, da linguagem natural que utilizamos normalmente para descrever as situações, duas representações visuais se apresentam: o símbolo  $a/b$  que representa numericamente a situação e a figura, de regiões ou conjuntos divididos em partes de mesma quantidade, que ajuda a entender ou pesquisar a solução da situação. Observe os seguintes exemplos:

Dois terços do retângulo é verde



Quatro sextos das bolinhas são vermelhas



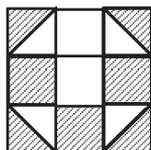
## 2 Concepções

### 2.1 Parte/todo

- 1) Pintar dois terços da figura abaixo.



- 2) Que fração da figura está pintada?



3) Pintar dois terços das bolinhas abaixo.



## 2.2 Características

As situações, que associam essa concepção evidenciam partes de alguma quantidade, que é considerada como um todo ou inteiro, presentes em todas as discussões que envolvem o desenvolvimento do conceito de número fracionário. Esta interpretação depende da divisão de uma quantidade contínua (área, massa, tempo, ...) ou de uma quantidade discreta (coleção de objetos) em partes ou sub-conjuntos de mesma quantidade.

O número  $a/b$  é usado para descrever uma divisão em que o inteiro ou todo foi dividido em  $b$  partes e dessas foram consideradas  $a$  partes. Desse ponto de vista o número  $a$  não pode exceder o número total de partes  $b$ , isto é, a fração  $a/b$  deve ser menor ou igual a 1.

Nas situações que associam a concepção parte-todo, três pontos merecem atenção: a natureza do inteiro, como ele pode ser dividido e o que será considerado uma parte, pois remetem à diferenças de tratamento da situação.

## 2.3 Caso discreto

Aqui o inteiro (todo) pode ser representado por um conjunto de objetos idênticos, e neste caso, a situação parte/todo é tratada por números naturais que representam as quantidades de objetos que podem ser contados, agrupados ou distribuídos. Podemos considerar três tipos de situações.

a) Situações de contagem

*Que fração das bolinhas é vermelha?*



Quando efetuamos essa pergunta consideramos o conjunto das cinco bolinhas como um inteiro e pedimos a representação pelo número  $4/6$  da relação que existe entre o número de bolinhas vermelhas e o número total de bolinhas. Entendemos então que “quatro sextos das bolinhas são vermelhas” e que para obter a resposta, primeiro contamos o total de bolinhas e depois as bolinhas que são vermelhas. Este procedimento é chamado de dupla contagem das partes.

## b) Situações de agrupamento

*Se Pedro tem três bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas, qual a fração do total de bolinhas que cada um possui?*

Nesta situação o inteiro passa a ser o conjunto formado pelas bolinhas dos três meninos e as frações obtidas:  $3/12$ ,  $4/12$  e  $5/12$  representariam a relação entre a quantidade de bolinhas de cada um dos meninos e a quantidade total de bolinhas. Para chegar à resposta foi necessário obter a soma  $3 + 4 + 5$  e relacioná-la com o número de bolinhas de cada um.

## c) Situações de distribuição

Pintar  $3/4$  das bolinhas abaixo.



Nesta situação, o número que representa a quantidade total de bolinhas deverá ser dividido em quatro partes, de mesma quantidade, para que dessas sejam consideradas três para serem pintadas.

Para resolver o problema contamos o total de bolinhas e efetuamos sua distribuição em 4 grupos ou dividimos o total por quatro, percebendo que cada parte contém 3 bolinhas, isto é um quarto das bolinhas corresponde a três. Como queremos três quartos teremos então que pintar 3 dessas partes, ou seja, 9 bolinhas. Na verdade as situações que envolvem a concepção parte/todo no discreto nos remetem diretamente à divisão nos naturais ou ainda à concepção de razão se entendermos que “*de cada quatro bolinhas temos que considerar três*”.

Cabe destacar que:

Existem situações que associam a concepção parte-todo em contextos discretos que não têm solução. Por exemplo, não podemos dividir quinze bolinhas em quatro partes, porque o número de bolinhas não é um múltiplo de 4. Aqui, a linguagem fracionária é inadequada porque a situação se encaixa nas divisões com resto dos números naturais, pois não podemos dividir uma bolinha de gude. É importante perceber que uma flor, ou um carro, ou um botão etc. não podem ser divididos porque caso o fizéssemos esses objetos perderiam suas características, por exemplo, o botão deixaria de ser botão e isto é inerente às grandezas discretas que são tratadas por números naturais e não por fracionários.

Por outro lado, temos situações em que impropriamente utilizamos a fracionária para objetos diferentes. Por exemplo, quando dizemos que metade dos

peixinhos do aquário é vermelho, na realidade não estamos nos referindo a fracionários, mas a divisão de números naturais.

## 2.4 Caso contínuo

Quando apresentamos uma superfície, previamente dividida em partes congruentes, para identificar o número fracionário que corresponde a alguma parte dessa superfície, só precisamos contar duas vezes, uma para identificar o total de partes e outra para contar as partes que serão consideradas. Na verdade estamos discretizando o contínuo para utilizar somente a contagem, da mesma forma que fizemos no caso discreto.

Um ponto a ser discutido, neste caso, é o que entendemos por igualdade das partes. As apresentações de superfícies totalmente divididas em partes congruentes induzem ao entendimento de que a igualdade das partes implica na igualdade da forma e da área (partes congruentes) o que não é verdade.

## 2.5 Forma das partes

Como o ensino enfatiza nas situações que associam a concepção parte-todo em contextos contínuos a contagem das partes de figuras previamente divididas em partes congruentes, não possibilita discussões a respeito de área e forma.

Em situações de divisões não usuais, como as apresentadas abaixo, é comum a alegação da não possibilidade da identificação da fração que representa a parte pintada da figura, sob o argumento de que a figura não está dividida em partes “iguais”.



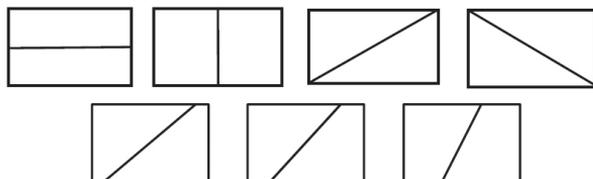
Por outro lado, em figuras como as abaixo, pode acontecer o contrário. A contagem das partes enfatizada no ensino pode conduzir a não percepção de que as partes não são “iguais”, nem em forma, nem em área e, a identificação das partes pintadas pelas frações  $3/5$  e  $2/6$ , respectivamente.



Com certeza esses tipos de erros, poderiam ser evitados se o enfoque para a construção da concepção parte-todo em contextos contínuos, não se resumisse à contagem das partes de figuras já divididas, mas sim na relação entre áreas, a partir de tarefas que solicitassem a divisão de figuras, que conduziriam naturalmente também à percepção da equivalência tanto de áreas, quanto dos números fracionários que as representam.

## 2.6 Divisão do inteiro

Se tomarmos um retângulo para dividir em duas partes de mesma área, por exemplo, existiriam várias possibilidades para essa divisão. Entre elas podemos considerar, por exemplo, as possíveis por um único traço.



Ou, as possíveis com mais traços ou linhas curvas.



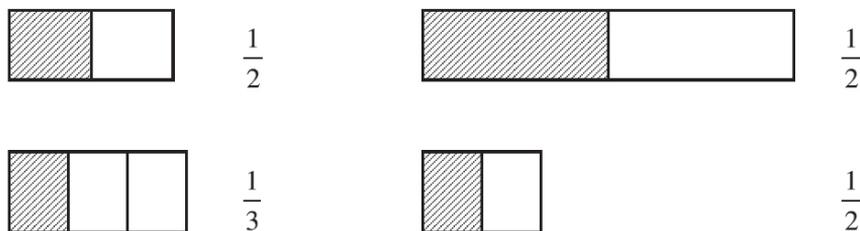
A tarefa de solicitar a divisão de inteiros encaminha para a necessidade de um planejamento e tomada de decisão para desenhar os traços que dividirão a figura.

Embora o círculo seja, normalmente, usado para representar fracionários e muitos materiais manipulativos desenvolvidos para o ensino empregam essa forma, dividi-lo em partes iguais não é tarefa simples, pois exige a identificação de seu centro e algumas técnicas de desenho geométrico para decidir onde desenhar as linhas, a não ser que utilizemos essa forma para ser dividida por meio de dobraduras.

Cabe destacar que:

Em muitos casos, o aluno, ao observar as divisões e utilizar a contagem para identificação de partes, perde a referência do inteiro, principalmente em situações de comparação.

Observe, nas duas primeiras figuras abaixo que, embora a parte pintada de ambas possa ser representada pelo mesmo número, a área não é a mesma, porque a área dos inteiros é diferente. Nas outras figuras, acontece o contrário, embora a área pintada seja a mesma, o número fracionário que as representa é diferente porque a área dos inteiros é diferente.



É frequente, em livros didáticos, aparecer ilustrações com divisão de frutas, pães, bolos etc. em “partes iguais”, considerando uma divisão visual supostamente de “mesma área”. No caso de um bolo, a igualdade não pode ser a “área” de cada pedaço, mas sim a quantidade de bolo que tem em cada pedaço que só poderia ser determinada pelo seu “peso” (massa). É o caso também da pizza, exemplo clássico do ensino de frações. Não estamos aqui, descartando esses modelos, que são úteis para que as crianças deem significado à necessidade dos novos números, mas questionando a igualdade das partes tão enfatizada no ensino. Nesses casos temos que supor e não afirmar que as partes são iguais.

## 2.7 Medida

- 1) Qual a distância entre o ponto A e o zero?



- 2) Qual a distância entre os pontos A e B?



Nesta concepção a fração  $a/b$  é associada a uma unidade de medida que foi dividida em  $b$  partes de mesma medida, das quais foram consideradas  $a$  partes. Podemos, por exemplo, associar a fração  $a/b$  a um ponto de um segmento de reta tomado como unidade, que foi dividido em  $b$  partes congruentes (ou em um múltiplo de  $b$ ), dos quais foram consideradas  $a$  partes. Na verdade, a divisão da unidade caracteriza uma relação parte-todo no contínuo.

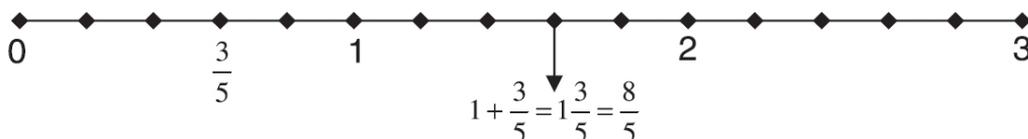
## 2.8 Características

A principal característica da concepção de fracionários como medida, é a utilização repetida da fração  $1/b$  para determinar uma distância. Normalmente, solicita-se a medida da distância entre dois pontos usando  $1/b$  como unidade de medida e utiliza-se a representação da figura de uma reta numérica ou de uma

régua. Para essas representações é necessário algum conhecimento de escala, a presença do zero como ponto de partida e intervalos de medidas iguais. O principal desafio será entender que a fração  $1/b$  é uma unidade de medida que deve ser usada repetidamente para determinar o comprimento desejado e que este, no final, pode ser representado por uma fração  $a/b$  que, por sua vez, representará  $a \times \frac{1}{b}$ , ou seja,  $a$  vezes a ocorrência da unidade  $1/b$ .

Nas situações de medida, é preciso a determinação de uma unidade de medida invariável, a especificação dos pontos de início e de final da medição a ser realizada e números fracionários para que se concretize o ato de medir.

Tomando um segmento com mais de uma unidade podemos obter a ocorrência da fração efetivamente como um número e perceber que  $3/5$  é um número entre o 0 e o 1 e, ainda, que  $1\frac{3}{5}$ , por exemplo, é um número entre 1 e 2. Além disso, entender que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais observando que os números racionais preenchem os “vazios” entre os números naturais.:



Outro ponto importante das situações que associam a concepção de medida, que não ocorre satisfatoriamente na concepção parte-todo, é a ocorrência, de forma natural, de frações maiores que a unidade, da notação de números mistos e da soma de duas medidas, o que favorece a percepção da equivalência no reconhecimento de que a mesma medida recebe nomes diferentes em função de novas divisões da unidade.

Cabe destacar que:

Historicamente muitos povos sentiram a necessidade de outros números, que não os naturais, para poder representar resultados, principalmente de medições, conduzindo-os a buscar uma unidade que não exigisse a representação fracionária, no entanto, diante da impossibilidade de realizar essa tarefa cada construiu suas próprias unidades. Um consenso parcial ocorreu somente em 1792 com a criação do sistema métrico decimal que se consolidou, principalmente, para facilitar as relações comerciais entre povos diferentes.

A concepção de medida é necessária no ensino porque ajuda os alunos a perceber a necessidade dos números fracionários, a lhes dar significado e a construir um novo campo de conhecimentos. Mas, isto só acontecerá se eles puderem escolher unidades de medidas não padronizadas e a perceber a necessidade de sua

subdivisão para poder associar um número à grandeza que está sendo medida. Em medidas de comprimento isto pode ser facilmente obtido a partir de tiras de papel consideradas como unidade. O uso de réguas, neste caso, seria desaconselhável, em um primeiro momento, porque como as divisões já estão explícitas as crianças não percebem as subdivisões da unidade voltando a tratar as situações de medição somente com a contagem.

## 2.9 A reconstituição do inteiro

Podemos apresentar aos alunos tarefas em que as figuras representem partes e solicitar que o inteiro seja reconstituído. Uma boa compreensão de frações deve permitir que a partir do inteiro se identifique qualquer parte desse inteiro, mas também, que a partir de partes se reconstrua o inteiro. As duas concepções estudadas nos permitem elaborar atividades desse tipo:

- 1) Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.



- 2) Se  $\frac{2}{7}$  das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?
- 3) Se o desenho abaixo representa  $\frac{2}{3}$  da unidade qual é a unidade?



Este caminho de volta permitirá a constatação de que no caso da concepção parte/todo associada a superfícies podemos obter inteiros com formas diferentes como resposta, o que não acontecerá no caso discreto ou na concepção de medida, em que encontramos uma única solução. Além disso ajuda a desenvolver a percepção visual de figuras e seu tratamento a partir da composição, aprofunda a compreensão das concepções envolvidas e da reversibilidade de situações.

## 2.10 Quociente

- 1) Se temos três pizzas para distribuir igualmente entre quatro crianças, quanto cada uma vai receber?
- 2) Se temos nove bolinhos para distribuir igualmente entre cinco crianças, quanto cada uma vai receber? Qual a sentença matemática que representa essa ação?

- 3) João tem 25 bolinhas de gude e quer distribuí-las entre seus três sobrinhos. Quando cada um irá receber?
- 4) Tenho três pizzas e quero dar metade de cada uma delas para cada criança. Para quantas crianças posso distribuir as pizzas.

## 2.11 Características

Historicamente alguns povos associaram os fracionários diretamente à divisão de naturais em situações de distribuição desenvolvendo técnicas para obter tais resultados.

A concepção de fracionários enquanto quociente é associada diretamente a atos de distribuição ou de divisão em que a fração  $a/b$  representa que  $a$  foi distribuído ou dividido em  $b$  partes. Nesta concepção o numerador  $a$  não representa partes do inteiro ou da unidade, mas algo que será dividido em um número  $b$  de partes. Nestes casos o número  $a$  pode ser menor, maior ou igual a  $b$ .

Nas situações que associavam as concepções anteriores estávamos quantificando e trabalhando com uma única variável: o inteiro ou a unidade de medida, agora podemos ter duas variáveis, por exemplo: pizzas e crianças, embora a concepção parte-todo seja mobilizada na distribuição solicitada. A principal característica das situações que associam a concepção de quociente seja a representação do fracionário pela operação de divisão.

## 2.12 Caso discreto

A distribuição de 12 bolinhas entre 3 meninos, por exemplo, implica na mesma quantidade de bolinhas para cada um e pode ser representada por  $12 \div 3$ . Na realidade, trata-se de uma situação que envolve a divisão de números naturais.

Cabe destacar que:

Situações que associam a concepção de quociente em contextos discretos solicitam, na realidade, a mobilização da divisão euclidiana, no exemplo (3) teríamos:  $25 = 3 \times 8 + 1$ , cada criança recebe oito bolinhas e sobrá uma. As crianças provavelmente determinarão algum critério para distribuir a bolinha que resta, pois com certeza não tentarão partir a bolinha porque sabem que obterão pedaços de vidro e não bolinhas.

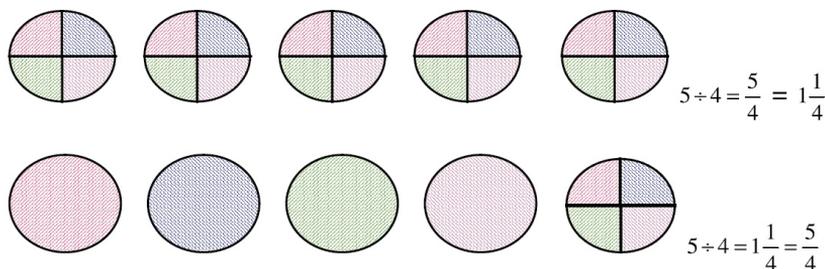
As crianças, normalmente, realizam com facilidade tarefas de divisão em contextos discretos, porque estas podem ser realizadas por procedimentos diretos de contagem, como é o caso da divisão em seu aspecto partitivo: dada a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade, solicita-se a quantidade de cada parte. Algumas dificuldades podem surgir se a tarefa apresentada se relacionar ao aspecto da divisão por cotas: quando é dada

a quantidade de inteiros e a quantidade de cada parte e solicita-se a quantidade de partes possíveis.

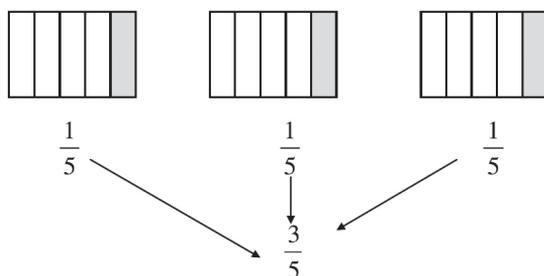
### 2.13 Caso contínuo

Como as situações na concepção de quociente solicitam uma divisão, as dificuldades na procura de partes que têm mesma área, já vista na situação parte/todo, permanecem, sendo necessário um plano de ação com procedimentos de estimativa, de tentativa ou mesmo de operações aritméticas para determinar a solução do problema.

As situações que associam esta concepção em contextos contínuos se prestam satisfatoriamente à divisão de várias regiões ao mesmo tempo, como por exemplo: Dividir cinco pizzas igualmente entre quatro pessoas. Este é um tipo de problema que pode apresentar, entre outros, dois caminhos de solução: a divisão de cada pizza em quatro, destinando para cada pessoa cinco partes ou a distribuição de uma pizza inteira para cada uma e a divisão de uma das pizzas em quatro partes. As duas soluções nos levam ao mesmo resultado, mas podem ser representadas de maneiras diferentes. O código misto e a operação de divisão aparecem na equivalência com a fração maior que um encontrada na distribuição.



Já para *dividir três barras de chocolate igualmente entre cinco crianças* é necessária a divisão dos três chocolates, sendo que uma das possibilidades pode ser representada por:



Nas duas situações podemos perceber que a partir da divisão satisfatória de uma das pizzas ou de um dos chocolates, o processo pode ser repetido para a divisão dos restantes.

Essas situações favorecem a construção de significados diferentes, pois a ação de dividir uma unidade em cinco partes e tomar três delas ( $\frac{3}{5}$  como parte/todo ou medida) é diferente da ação de dividir três inteiros em cinco, embora as duas sejam representadas pelo mesmo número fracionário.

Cabe destacar que:

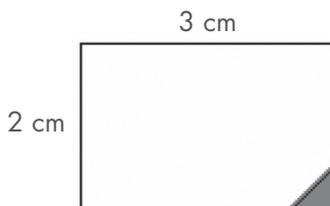
Quando utilizamos pizzas, chocolates, bolos, ... para as situações de ensino pretendemos que a partir delas as crianças deem significado às novas quantidades encontradas. Quando dividimos uma pizza em quatro partes e associamos a cada uma a fração  $\frac{1}{4}$  estamos considerando apenas o aspecto visual da igualdade das partes pois esta só poderia ser obtida a partir do “peso” da pizza inteira e das partes o que não faz sentido algum na realidade. O mesmo acontece nas situações que envolvem chocolates pois a maioria destes já são fabricados dividido em partes “iguais”.

## 2.14 Razão

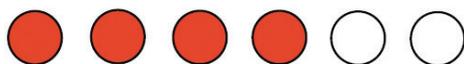
Diferente das situações anteriores, as que associam a concepção de razão não são representadas por uma partição ou medição ou distribuição, mas pela comparação de duas quantidades (do mesmo objeto ou de objetos diferentes), isto é, as razões podem ser utilizadas como um índice comparativo entre duas quantidades.

## 2.15 Algumas situações

- 1) Uma receita pede 2 copos de açúcar para 3 copos de farinha. Quanto de farinha é necessário para fazer uma receita utilizando 15 copos de açúcar? Quantas receitas poderiam ser feitas?
- 2) Em um saco existem quatro bolas pretas e cinco bolas brancas. Tirando aleatoriamente uma bola qual é a probabilidade de que seja preta?
- 3) Em uma caixa existem três bolas vermelhas e duas azuis. Qual é a razão das bolas vermelhas para as bolas azuis?
- 4) Qual a fração do retângulo abaixo que está pintada?



- 5) Que fração das bolinhas é vermelha? Qual a razão das bolinhas vermelhas para o total de bolinhas?



- 6) Se um jogador de basquete acerta uma bola em cada duas que arremessa em um jogo e três em cada quatro no jogo seguinte. Qual é a sua performance nos dois jogos?
- 7) Se em uma sala de aula temos dois meninos para cada três meninas qual a porcentagem de meninos nessa classe?
- 8) Qual a velocidade em km/h de um carro que percorre 4 km em 6 minutos?

## 2.16 Características

Uma das características dos números fracionários enquanto razão é a predominância da ideia de par ordenado de números naturais, descrito de acordo com a situação por um fracionário  $a/b$  ou por  $a : b$ . Por sua vez, esta razão determina uma proporção, visto que qualquer alteração feita em  $a$  provocará uma mudança previsível em  $b$ .

Por exemplo, se identificamos em uma situação a razão  $3/4$  (ou 3 para 4) teremos conseqüentemente as razões  $6/8$  ou  $9/12$  e assim por diante, que nos permite definir a proporção como a igualdade entre duas razões e representá-la genericamente por  $a/b = c/d$  ou  $a : b :: c : d$ , que se lê “ $a$  está para  $b$ , assim como  $c$  está para  $d$ ”. A descrição inicial obtida da situação apresentada pode ser entendida como uma constante que se conserva na proporcionalidade.

Sob este ponto de vista nem sempre se pode identificar um inteiro, embora nas comparações realizadas além da relação parte/todo podem ser detectadas relações do tipo todo/todo ou parte/parte.

O trabalho com razões pode encaminhar os alunos a perceber a equivalência de números fracionários, a desenvolver o pensamento proporcional, além de poder se tornar uma excelente ferramenta para a resolução de problemas.

Cabe destacar que:

A importância da razão está na quantidade de situações da realidade em que aparecem:

- A razão pode transmitir uma noção de grandeza relativa quando define uma nova grandeza a partir de duas outras grandezas apresentadas, como por exemplo, a velocidade média que relaciona espaço e tempo. Nestas situações podemos ter situações que exigem simplesmente a comparação entre

o espaço e o tempo ou a busca de valores adicionais para uma proporção obtida (regra de três).

- As escalas nos mapas planos e miniaturas são representadas por razões que relacionam as medidas utilizadas nos mapas (ou miniatura) com as medidas reais.
- As receitas culinárias e misturas de líquidos também envolvem diretamente a ideia de razão.
- A densidade demográfica também é um exemplo da utilização de razão, pela comparação da quantidade de habitantes por  $\text{km}^2$  de uma região.
- Na probabilidade a utilização da razão lhe dá um caráter de simples cálculo aritmético quando se compara a quantidade de casos favoráveis com a quantidade de casos possíveis.
- Na porcentagem podemos estabelecer uma razão a partir da comparação entre um número dado e conjuntos de 100 partes. Por exemplo, um desconto de 15% em um objeto que custa 300 reais poderia ser entendido por:

$$\begin{array}{r} 15,00 \text{ ----- } 100,00 \\ 15,00 \text{ ----- } 100,00 \\ 15,00 \text{ ----- } 100,00 \end{array}$$

O que leva a perceber que existe a mesma relação entre 15 e 100 e 45 e 300. A diferença entre a concepção de razão e a parte/todo é bastante sutil.

A razão entre medidas de áreas permitirá identificar uma relação parte/ todo em situações que a parte em questão do inteiro não permite o recobrimento total desse inteiro considerado com partes congruentes à inicialmente dada do tipo do exemplo 4, apresentado acima.

## 2.17 Dificuldades

Algumas situações que associam a ideia de razão apresentam obstáculos de caráter operatório. Por exemplo, quando pensamos em triplicar a quantidade de ingredientes de uma receita de bolo, podemos pensar em multiplicar a quantidade de ingredientes por 3 ou somar três vezes a quantidade dos ingredientes da receita. Tal interpretação pode levar o aluno a operar de forma errônea com números fracionários e entender que  $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$  ou que  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ .

Outra questão que surge com a concepção de razão é a possibilidade de representá-la pelo quociente de dois números. Existem situações em que a divisão dos dois números envolvidos aparece de forma natural. Este é o caso de dizer que um carro que percorre 300 km em 5 horas percorreu essa distância a uma velocidade média de 60 km/h. O mesmo não acontece no caso da receita de bolo, pois não faz sentido dizermos que usamos aproximadamente 0,67 açúcar/farinha.

Existe uma crença de que razão é divisão, e em alguns casos isso é verdade e tem significado, mas em outros casos isso não se aplica.

Talvez por tais obstáculos houve um tempo em que as razões e proporções eram representadas somente por  $a : b : c : d$ , provavelmente para assinalar que temos uma ação específica de comparação entre dois números e não um número fracionário, embora em outras situações a representação fracionária para comparações não causem esse tipo de problemas.

## 2.18 Operador

- 1) Se  $\frac{2}{3}$  de 12 é 8, por quanto tenho que multiplicar o 8 para obter 12?
- 2) Se minha receita de bolo pede 3 copos de leite mas eu só tenho 2, quanto devo tomar dos outros ingredientes para fazer o bolo usando esses 2 copos de leite?
- 3) Dado um retângulo com medidas 4 e 6 centímetros obter um novo retângulo que tenha as medidas dos lados iguais a  $\frac{3}{4}$  das medidas originais.

## 2.19 Características

Em situações que associam a concepção de operador o número fracionário assume o papel de transformar uma situação inicial para produzir uma situação final adquirindo um caráter funcional de transformação.

Esta interpretação pode nos conduzir a entender esse número fracionário como uma máquina de transformação. No terceiro exemplo acima, a fração  $\frac{3}{4}$  atua sobre as medidas dos lados do retângulo assumindo o papel de transformar as medidas iniciais do retângulo dado nas medidas dos lados do novo retângulo. É como se tivéssemos uma máquina que transforma o que entra em seus  $\frac{3}{4}$ .

Essa ideia apresenta um contexto natural para o desenvolvimento da noção de composição de transformações, de inverso de um fracionário a partir do operador que reconstrói o estado inicial e também da noção de identidade com o operador que não modifica o estado inicial.

Assim, percebemos que o número fracionário é considerado como um número e não como um par de números e que as situações que associam o fracionário como operador pode envolver:

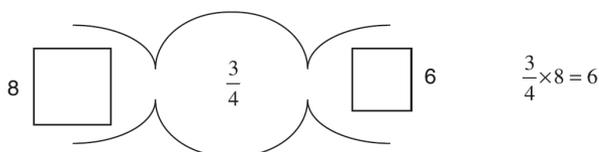
- um operador que produz situações finais diferentes dependendo da situação inicial;
- *operadores diferentes que produzem a mesma situação final (operadores equivalentes);*
- *operadores que voltam a situação inicial (operador inverso);*
- *o operador que não altera a situação inicial (operador idêntico).*

Nessas situações podemos associar a operação de multiplicação, tanto de um inteiro por um fracionário, quanto entre fracionários, traduzindo por exemplo, o dobro de  $1/5$  por  $2 \times \frac{1}{5}$  ou ainda, a metade de dois terços por  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ , sendo que esta, geralmente, é chamada de fração de fração e interpretada como a ação do fracionário  $1/2$  sobre a fração  $2/3$  que produz o estado final de  $2/6$ .

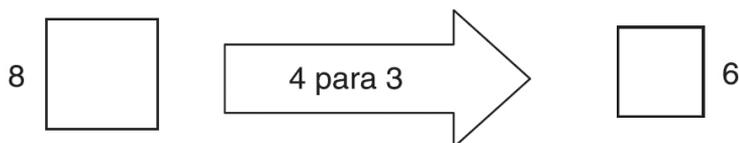
## 2.20 Caso contínuo

Em contextos contínuos, o fracionário  $a/b$  pode ser considerado um operador que reduz as medidas de uma figura (comprimento ou área) se  $a < b$  e a amplia nos casos em que  $a > b$ . No exemplo, a seguir, o operador que transforma a figura é  $3/4$ , também, chamado de razão de semelhança, embora a razão que reduz as medidas da figura inicial seja “de 4 para 3”.

Associando a esse exemplo uma máquina de transformação que operara com  $3/4$ , temos:



Utilizando razão temos:



Com as duas maneiras de proceder obteremos como situação final, um quadrado com 6 cm de lado. Fica implícito nessa ação que primeiro atua a operação de divisão ( $8 : 4 = 2$ ) e depois a de multiplicação ( $2 \times 3 = 6$ ) que serão representadas por  $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ , porque queremos encontrar  $3/4$  de 8 cm”.

Com a razão entendemos que para cada 4 cm da figura inicial consideramos 3 cm na nova figura. Assim, com o devido cuidado podemos, a partir das concepções de operador e razão desenvolver as noções de ampliação e redução de figuras, por exemplo.

## 2.21 Caso discreto

Nas quantidades discretas a fração  $a/b$  produz sobre a quantidade de elementos de um conjunto um efeito que resulta em  $a/b$  vezes a quantidade de elementos do conjunto inicial,  $3/4$  de 16 bolinhas é um conjunto com  $\frac{3}{4} \times 16$  bolinhas, que

resulta em 12 bolinhas. Se pensarmos na razão entre o número de bolinhas do conjunto de partida para o número de bolinhas do conjunto de chegada temos que de 4 bolinhas do conjunto inicial foram tomadas 3. Mas, só podemos ter um fracionário operando sobre o número de elementos de um conjunto se esse número for múltiplo de  $b$ .

As porcentagens podem ter a característica de operador se interpretarmos, por exemplo, que 60% de 35 corresponde ao fracionário  $60/100$  atuando sobre 35 e representarmos tal ação por  $\frac{60}{100} \times 35$ .

O fracionário atuando como operador descreve um estado a partir da situação dada e uma ordem a partir da ação realizada estabelecendo duas formas de equivalência:

- a) de operadores diferentes que atuam sobre o mesmo estado inicial produzindo o mesmo estado final.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times \frac{2}{3}$	8
12	$\times \frac{4}{6}$	8
12	$\times \frac{8}{12}$	8

Esta infinidade de operadores serão chamados de equivalentes porque provocam o mesmo efeito no objeto em que são aplicados e permitem estabelecer a relação  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \dots$

- b) de estados: quando o mesmo operador atua sobre estados iniciais diferentes produzindo a mesma transformação.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times \frac{2}{3}$	8
24	$\times \frac{2}{3}$	16
54	$\times \frac{2}{3}$	36

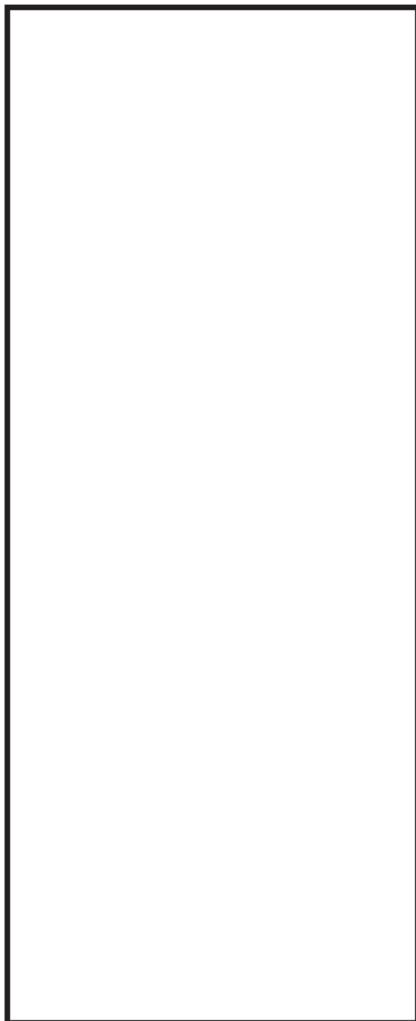
A equivalência aqui surge na comparação do estado inicial e do estado final e permite estabelecer a relação  $\frac{12}{8} = \frac{24}{16} = \frac{54}{36} = \dots$



## **Material de formação dos alunos**

### **1 Ficha 01**

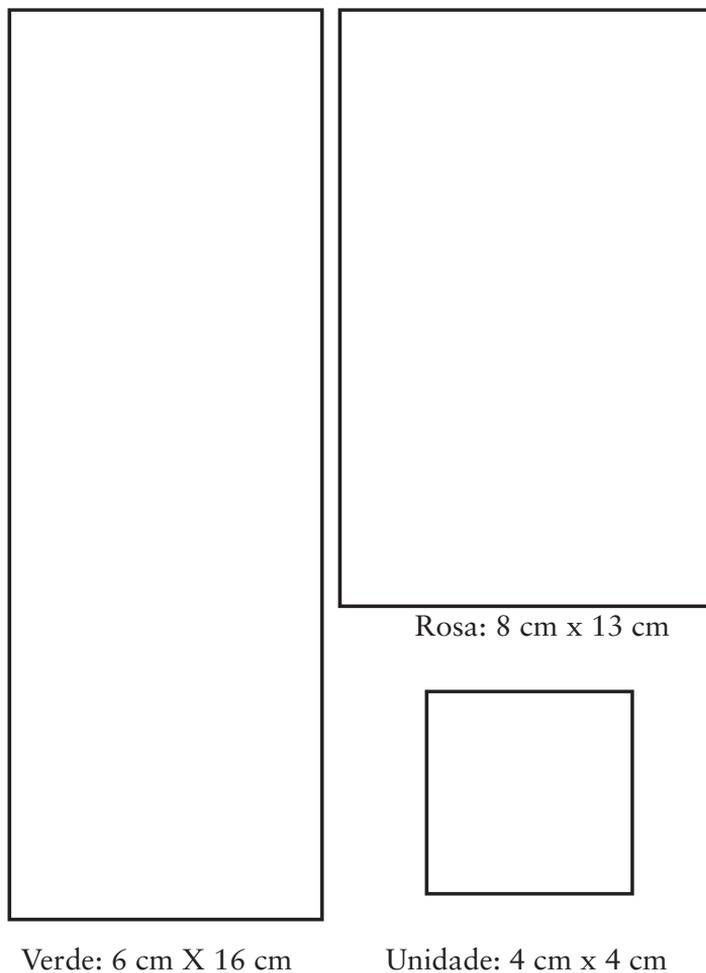
- 1) Temos 9 bolinhos iguais para distribuir igualmente entre três crianças. Quanto cada criança recebeu? Qual a sentença matemática que resolve o problema?
- 2) Se os mesmos bolinhos tivessem que ser distribuídos igualmente para quatro crianças, quanto cada criança iria receber? Qual a sentença matemática que resolve o problema?
- 3) Cinco crianças foram à cantina da escola para comprar chocolates, mas só encontraram quatro barras do chocolate que queriam. Resolveram comprá-los e dividir igualmente entre as cinco. Represente a sentença matemática que resolve o problema e responda qual parte do chocolate cada criança recebeu.
- 4) Quatro jovens depois de assistirem uma fita de vídeo resolveram pedir cinco pizzas para o lanche. Que parte das pizzas cada um irá receber?
- 5) Um idoso criador de ovelhas deixará de herança para seus três filhos 360 ovelhas. Quantas ovelhas cada um receberá quando o pai falecer? E se o criador tivesse 361 ovelhas?
- 6) O Sr. João, visitando seus cinco sobrinhos, trouxe nove dúzias de bolinhas para distribuir igualmente entre eles. Quantas bolinhas cada sobrinho recebeu?
- 7) Temos 28 balas e queremos distribuir de modo que cada criança receba 7 balas. Para quantas crianças podemos distribuir as balas?
- 8) Usando o cartão quadrado que você recebeu, como unidade de medida de área, dê a medida do comprimento, da largura e da área das folhas coloridas que você recebeu.



Amarela: 8 cm x 20 cm.



Azul: 8 cm x 18 cm

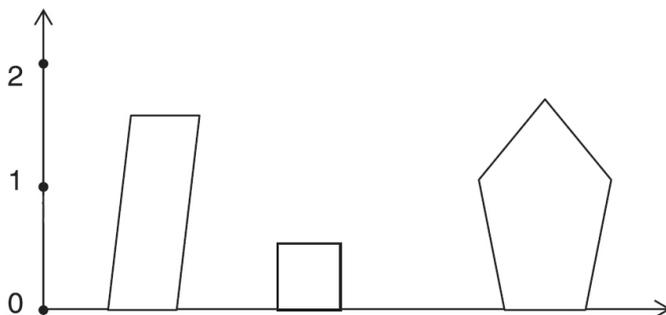


## 2 Ficha 02

- 1) Cada elemento do grupo deve escolher uma régua e medir o comprimento e a largura da carteira.
- 2) Com as réguas do exercício anterior medir os segmentos abaixo.



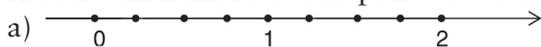
3) Determine a altura das figuras representadas abaixo.



- 4) João trabalha na manutenção de uma estrada e sabe que 6 latas de tinta dão para pintar um quilômetro da linha do meio da rodovia. Hoje ele recebeu 27 latas de tinta para fazer esse serviço. Quantos quilômetros ele poderá pintar? E se ele recebesse 28 latas?
- 5) Represente no segmento abaixo os números  $\frac{2}{4}$  e  $\frac{3}{4}$  e identifique outros dois números entre elas.

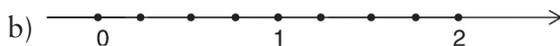


6) Associe um número a cada ponto das retas numeradas abaixo.



Complete com dois desses números:

..... é menor que .....      ..... é maior que.....



Complete com dois desses números:

78..... é menor que .....

..... é maior que .....

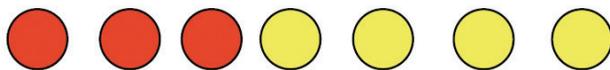


Complete com dois desses números:

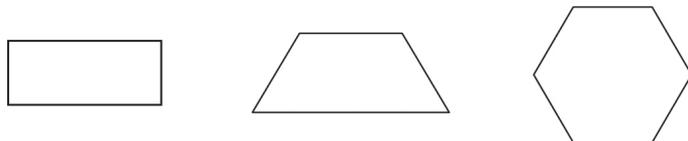
..... é menor que .....

..... é maior que .....

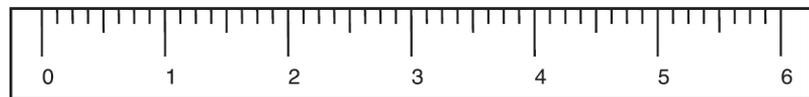
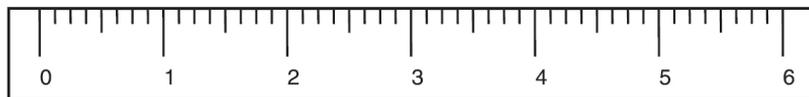
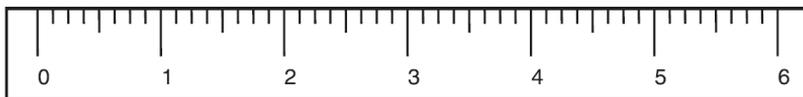
- 7) Que parte dos círculos desenhados abaixo é vermelho? E que parte deles é amarela?



- 8) Divida as figuras abaixo em três partes iguais. Que relação existe entre cada parte encontrada e a figura dada?



- 9) Um agricultor fez uma plantação em parte de seu terreno retangular do seguinte modo: a metade do terreno foi plantada com feijão, na metade do restante plantou milho e o restante foi dividido em duas partes iguais: uma para o pomar e outra para construir a casa.
- Faça uma figura representando a distribuição feita pelo sítante em seu terreno.
  - Que tipo de plantação ocupa a maior parte do terreno? E que tipo ocupa a menor parte?
  - Qual é a maior região: a deixada para a construção da casa ou para o pomar?
  - Que parte do terreno ocupa a região plantada com feijão?
  - Que parte do terreno ocupa a plantação de milho?
  - Que parte do terreno ocupa a parte onde fica o pomar?



12 cm




16 cm

### 3 Ficha 03

- 1) Monte o quebra cabeças que você recebeu e responda que parte do triângulo representa:

um triângulo verde:

um losango:

um trapézio:

um hexágono:

quatro hexágonos e um triângulo:

três losangos:

quatro trapézios:

cinco hexágonos:

um hexágono e dois losangos:

seis trapézios, um losango e

cinco triângulos:

- 2) Que peças do quebra-cabeças podem representar as frações abaixo:

$$\frac{1}{5}$$


---

$$\frac{2}{5}$$


---

$$\frac{3}{25}$$


---

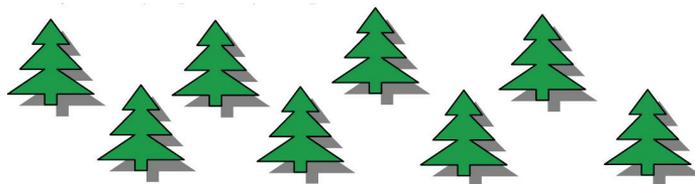
$$\frac{7}{25}$$


---

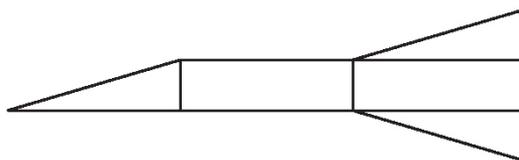
$$\frac{18}{25}$$


---

3) Circule, se possível, três quartos das árvores desenhadas abaixo.



4) Colorir quatro sétimos do desenho abaixo.



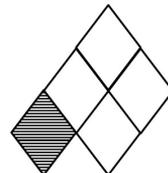
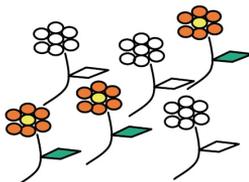
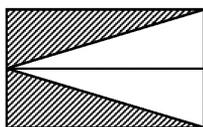
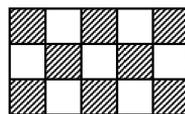
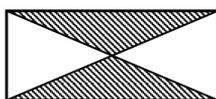
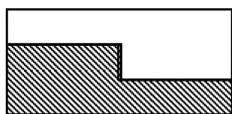
5) Qual a distância do ponto inicial ao ponto A?



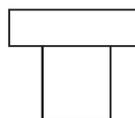
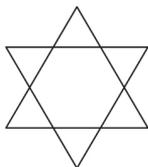
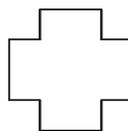
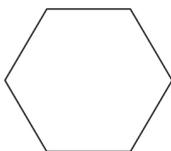
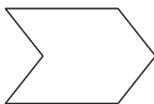
6) Circule, se possível, um terço dos sapinhos desenhados abaixo.



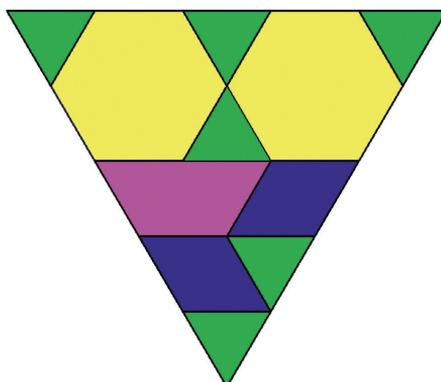
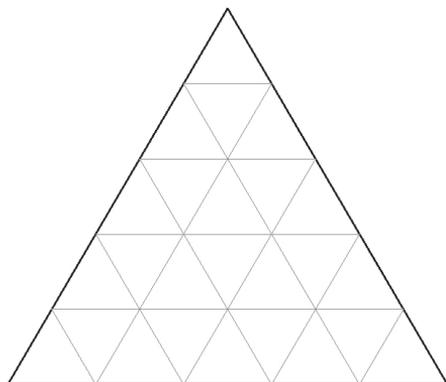
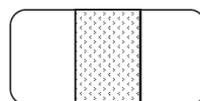
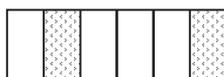
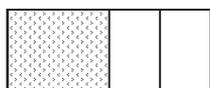
- 7) Identifique a fração que representa a parte pintada de cada um dos desenhos abaixo:



- 8) Pinte dois terços dos desenhos abaixo.



- 9) Quais das figuras abaixo tem um terço pintado?

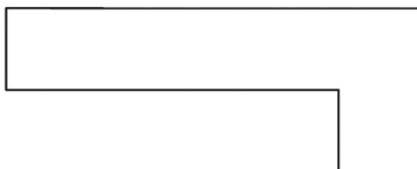


### 4 Ficha 04

- 1) Dobre as folhas retangulares e circulares que você recebeu da forma pedida e determine a fração que representa cada parte.
  - a) em quatro partes iguais
  - b) em oito partes iguais
  - c) em 16 partes iguais
  - d) Quantos  $\frac{1}{16}$  precisamos para ter  $\frac{1}{4}$  de cada folha?
- 2) Qual a distância entre o ponto A e o ponto B?



- 3) Se o desenho abaixo representa  $\frac{3}{5}$  do desenho original, complete o desenho para obtê-lo.



- 4) Se  $\frac{2}{7}$  das bolinhas de gude de Francisco são brancas e ele tem 24 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Francisco tem?
- 5) Associe um número a cada ponto da reta numérica abaixo.



Complete com dois desses números:

a) ..... é menor que ..... ..... é maior que .....



Complete com dois desses números:

a) ..... é menor que ..... b) ..... é menor que .....  
 ..... é maior que ..... ..... é maior que .....

- 6) Inês pediu para Márcia sua receita para massa de torta. E Márcia passou a seguinte receita:  
 Ingredientes  
 1 xícara de chá de leite  
 2 ovos  
 $\frac{1}{2}$  xícara (chá) de óleo

200 gramas de queijo tipo minas ralado grosso

50 gramas de queijo parmesão ralado.

1 xícara (chá) de aveia

$\frac{1}{2}$  xícara (chá) de farinha de trigo.

1 colher de sopa de fermento em pó.

Como Inês sempre recebe visitas, preparou uma tabela com os ingredientes da torta de acordo com o número de pessoas que recebe.

a) Complete a tabela

Pessoas	Receitas	Leite xícara	Ovos unidade	Óleo xícara	Minas gramas	Parmesão gramas	Aveia xícara	Farinha xícara	Fermento colher
1	$\frac{1}{2}$								
2	1								
3	$1\frac{1}{2}$								
4	2								
5									
6									
7									
8									

b) Qual a relação que existe entre a quantidade de óleo e de aveia?

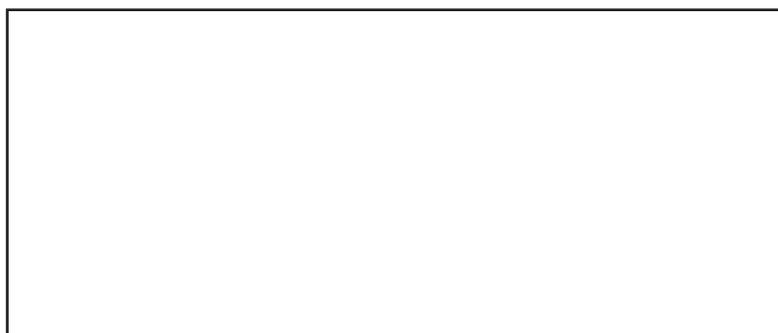
c) Qual a razão entre a quantidade de farinha e aveia?

d) Qual a relação que existe entre a quantidade de xícaras de farinha e de ovos?

- 7) Se distribuirmos igualmente 5 chocolates para um grupo de 8 crianças e 5 dos mesmos chocolates para um outro grupo com 6 crianças. Em qual dos dois grupos as crianças comerão mais chocolate?
- 8) Se distribuirmos igualmente 3 chocolates para um grupo de 5 crianças e 9 dos mesmos chocolates para um outro grupo com 15 crianças. Qual é o grupo em que as crianças comerão mais?
- 9) Se distribuirmos 3 tortas entre 4 crianças e 4 tortas iguais as primeiras entre outras 5 crianças, quem comerá mais?
- 10) Temos três tortas iguais e queremos distribuir de forma que cada criança receba  $\frac{3}{5}$  de uma torta. Para quantas crianças podemos distribuir as tortas? Dê a sentença matemática que representa a solução do problema.



9 cm x 16,5 cm



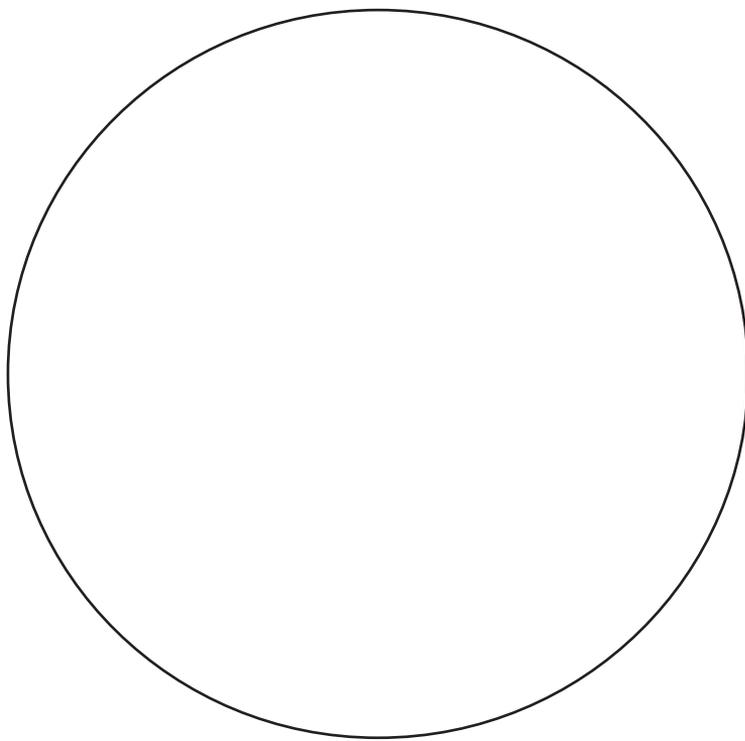
7,5 cm x 18 cm



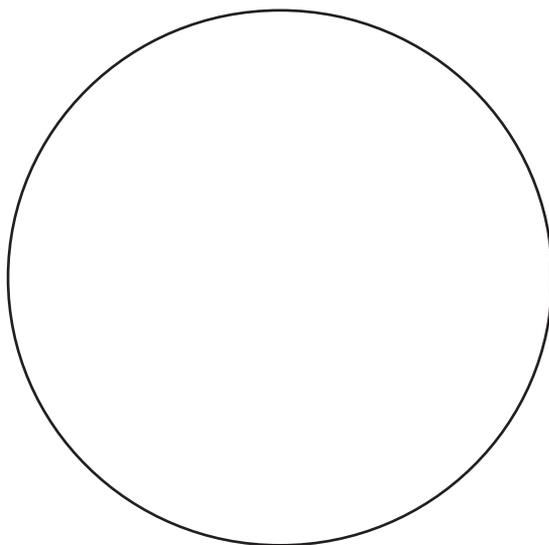
13,5 cm



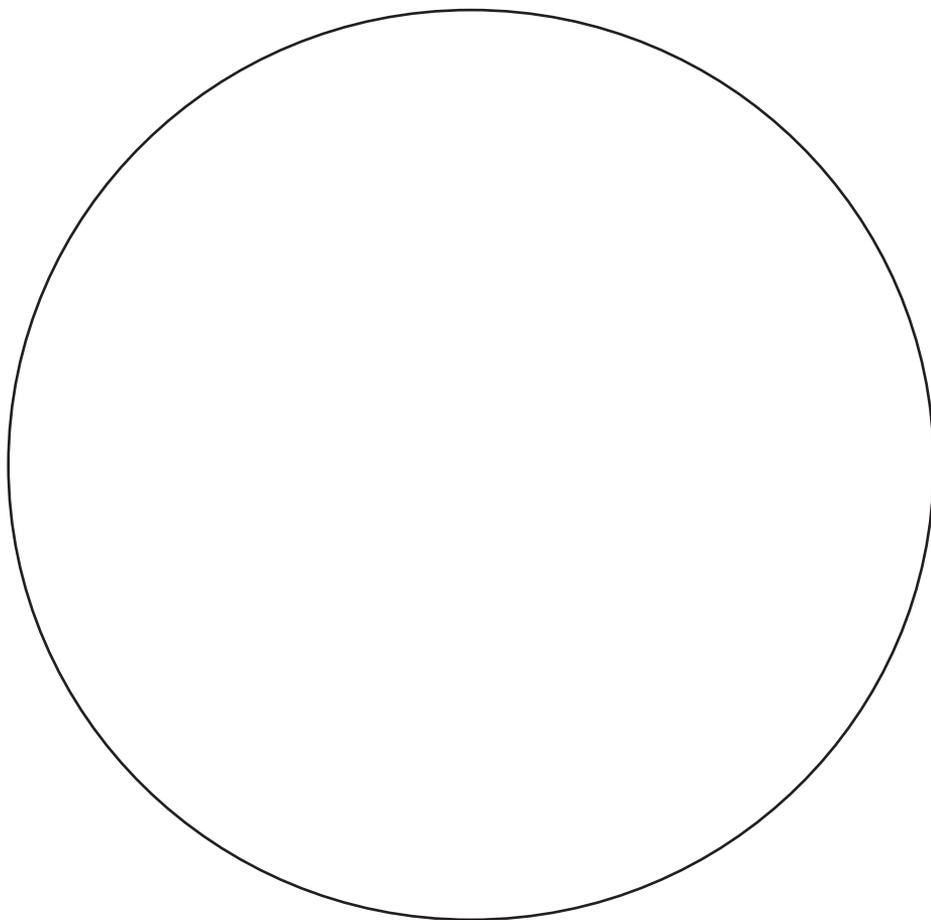
10 cm



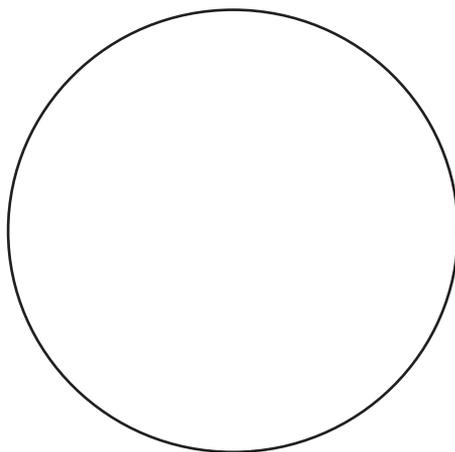
Diâmetro: 14 cm



Diâmetro: 10 cm



Diâmetro: 15 cm



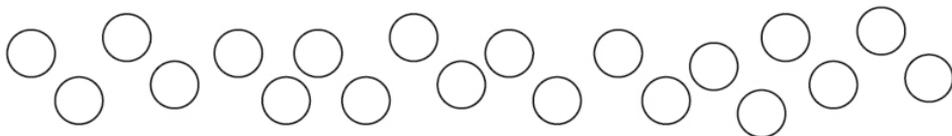
Diâmetro: 8 cm

## 5 Ficha 05

- 1) Na votação para o grêmio de sua escola com 1000 alunos votantes, houve 240 votos para a chapa Azul. Qual a razão entre o número de votos da chapa azul e o número de votantes?
- 2) Uma receita pede 3 copos de açúcar para 10 copos de farinha. Se tenho 15 copos de açúcar quantos copos de farinha preciso? Quantas receitas poderei fazer?
- 3) Um carro faz, na estrada, 8 km com 1 litro de álcool.
  - a) Quantos litros de álcool são necessários para esse carro percorrer 100 km?
  - b) Quantos km ele percorre com 45 litros de álcool?
- 4) Para fazer 10 camisas são gastos 25 metros de tecido. Quantos metros são necessários para se fazer 30 camisas?
- 5) Desenhe um retângulo que tenha  $\frac{3}{4}$  da medida do comprimento e da largura do retângulo abaixo.



- 6) Em um curral há 69 vacas, dois terços delas são da fazenda vizinha. Quantas vacas vieram da outra fazenda? Represente as operações que você fez com uma sentença matemática.
- 7) O ano tem 12 meses. Responda quantos meses corresponde a:
  - a) dois terços do ano
  - b) três quartos do ano
  - c) um ano e um terço do ano.
- 8) A capacidade de  $\frac{3}{5}$  de um barril é 36 litros.
  - a) Qual a capacidade de  $\frac{1}{5}$  desse barril?
  - b) Qual a capacidade do barril?
- 9) a) Pinte a metade de um quinto das bolinhas abaixo.

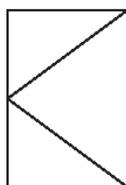


- b) Que parte das bolinhas você pintou?

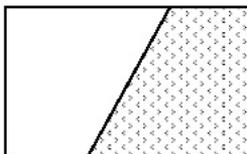
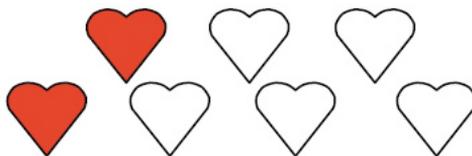
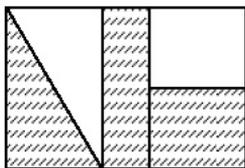
- 10) Pinte um quinto do retângulo desenhado abaixo. Depois pinte a metade da parte que já está pintada com outra cor. Que parte do retângulo você pintou duas vezes?



- 11) Se o desenho abaixo representa  $\frac{2}{4}$  do desenho original, complete-o para obter o desenho original.



- 12) Temos seis pizzas para serem distribuídas de tal forma que cada criança receba  $\frac{3}{4}$  de uma pizza. Para quantas crianças podemos distribuir as pizzas? Dê a sentença matemática que representa a solução do problema.
- 13) Identifique a parte de cada um dos desenhos abaixo que está pintada:



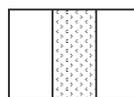
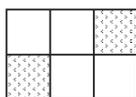
## 6 Ficha 06

- 1) Numa festa uma criança comeu  $\frac{3}{8}$  dos doces de uma bandeja e outra criança comeu  $\frac{3}{7}$  de outra bandeja igual à primeira. Quem comeu mais?
- 2) Em uma pizzaria seis pessoas de uma mesa comeram quatro pizzas e numa outra mesa três pessoas comeram duas pizzas do mesmo tamanho. Em que mesa as pessoas comeram mais pizza?

- 3) Se dividirmos três bolinhos iguais entre quatro crianças e quatro bolinhos do mesmo tipo entre outras cinco crianças quem come mais?
- 4) Se fizermos um café com 3 colheres de pó e 4 xícaras de água e outro com 4 colheres de pó e 6 xícaras de água, qual café ficará mais forte?
- 5) Identifique a fração que representa cada um dos pontos marcados no desenho abaixo e depois coloque outros cinco pontos com a fração que o representa.



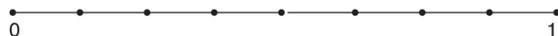
- 6) Que parte de cada figura está pintada? Qual das duas têm maior parte pintada?



- 7) Associe a cada figura a fração que representa a parte que está pintada. Qual delas têm a maior parte pintada?



- 8) Associe a cada ponto um número.



- 9) Dê um número fracionário que represente:

a) o número  $\frac{1}{2}$  com denominador 12.

b) o número  $\frac{3}{4}$  com denominador 12.

c) o número  $\frac{5}{6}$  com denominador 30

d) o número  $\frac{7}{10}$  com denominador 30.

- 10) Em uma fábrica, para tingir uma calça comprida foram utilizados para cada tubo de tinta branca três tubos de tinta azul. O gerente quer fazer uma tabela para conseguir a mesma cor em outras quantidades de calças tingidas. Ajude completando a tabela a seguir.

Branca	Azul
1	3
	6
7	
	18
15	

Que relação podemos observar nessa tabela?

11) Quem é maior  $\frac{5}{8}$  ou  $\frac{7}{10}$ ?

## 7 Ficha 07

- 1) Primeiro pinte  $\frac{1}{2}$  do retângulo desenhado abaixo, depois pinte  $\frac{1}{6}$  do mesmo retângulo de outra cor. Qual a parte do retângulo que você pintou? Represente a sentença matemática que representa a solução do problema.

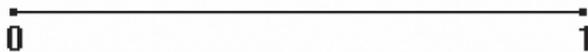


- 2) Pinte  $\frac{1}{2}$  do segmento desenhado abaixo. Logo a seguir pinte, de outra cor,  $\frac{1}{6}$  do mesmo segmento. Que parte do segmento você pintou?



- 3) Calcule  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ .

- 4) Pinte  $\frac{3}{4}$  da linha desenhada abaixo. Logo a seguir pinte, de outra cor,  $\frac{1}{6}$  da linha. Que parte da linha você pintou:



- 5) Calcule  $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ .

- 6) Se apagássemos  $\frac{1}{4}$  da parte pintada do retângulo abaixo, que parte desse retângulo permaneceria pintada? Dê a sentença matemática que representa o que você fez.



- 7) Qual seria a parte pintada do retângulo desenhado abaixo se pintássemos  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$  desse retângulo?



- 8) Represente  $1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$  numa reta numérica e dê a resposta com uma sentença matemática.



- 9) Calcule  $1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ .

- 10) Complete:

a)  $\frac{3}{4} = \dots + \dots$

b)  $\frac{5}{6} = \dots + \dots + \dots$

- 11) Em uma classe metade das crianças são meninos e em uma outra classe um quarto das crianças é de meninos. Se colocarmos as duas classes juntas qual a parte das crianças que são meninos?

- 12) Efetue os cálculos abaixo.

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$

b)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$

c)  $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} =$

d)  $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} =$

e)  $\frac{2}{9} + 1 + \frac{7}{9} + 3 =$

f)  $\frac{3}{9} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3} =$

g)  $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} =$

h)  $8\frac{3}{5} - 7\frac{2}{5} =$

## 8 Ficha 08

- 1) Dê a expressão matemática e calcule:

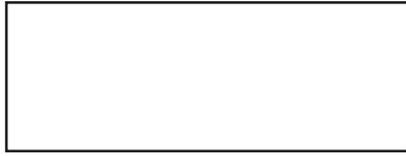
a) o dobro de  $\frac{2}{3}$

c) o quádruplo de  $\frac{1}{5}$

b) o triplo de  $\frac{2}{3}$

d) o quádruplo de  $\frac{3}{7}$

- 2) Pinte a metade de dois terços do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou? Dê a sentença matemática que representa o que você fez.

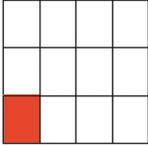


- 3) Pinte um quarto de dois terços do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou? Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.

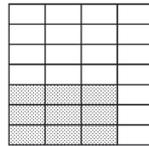


- 4) Sabendo que a área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas da altura e da largura do retângulo, calcule a área dos retângulos assinalados abaixo.

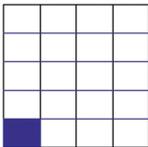
a)



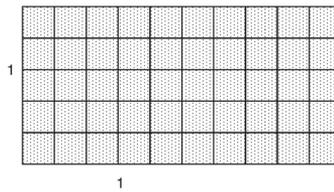
b)



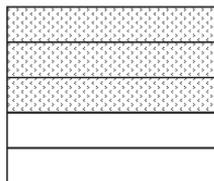
c)



d)



- 5) Pinte um quinto da parte que está hachurada na figura abaixo. Que parte da figura você pintou? Qual a sentença matemática que representa essa situação?



- 6) Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.



