

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA
TEORIA DA RELATIVIDADE I
ORIGEM E EVOLUÇÃO DAS IDEIAS SOBRE A RELATIVIDADE

2018

Blucher

Introdução ao estudo da teoria da relatividade I

© 2018 *Antonio Giuseppe Roth*

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.

do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,

Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por
quaisquer meios, sem autorização escrita da Editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Roth, Antonio Giuseppe

Introdução ao estudo da teoria da relatividade I / Antonio
Giuseppe Roth. -- São Paulo : Blucher, 2018.

340 p. : il., color.

Bibliografia

ISBN 978-85-8039-311-8 (impresso)

ISBN 978-85-8039-312-5 (e-book)

1. Física 2. Relatividade (Física) 2. Física - História

I. Título

18-0199

CDD 530.1

Índices para catálogo sistemático:

1. Física

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA
TEORIA DA RELATIVIDADE I
ORIGEM E EVOLUÇÃO DAS IDEIAS SOBRE A RELATIVIDADE

“Eu ouço os mortos. Sou um repórter do passado.”
Laurentino Gomes, autor de “1808” e “1822”

Maynard Keynes estudou os manuscritos secretos de Newton sobre alquimia e religião. Observou, por exemplo, que certos metais parecem ter vida e crescer como plantas. Buscava a Pedra Filosofal, não para ficar rico, mas para descobrir os segredos de como Deus criou o Universo.

Edmund Halley, astrônomo e físico inglês (1656-1742), perguntou a Isaac Newton, físico, matemático e astrônomo inglês, qual a forma das órbitas dos planetas? Resposta: Elipse. Para prová-lo, Newton descreveria a gravidade na sua monumental obra: “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. (ver parágrafo 4.6, e parágrafo 4.7).

Einstein costumava dizer: O sucesso vem de 1% de inspiração e 99% de transpiração.

Nós não temos Amigos. Nós não temos Inimigos. Nós temos Instrutores.
Ronnie Von.

A descoberta quase acidental dos raios X por Röntgen em 05/11/1895 é considerada por alguns como o início da 2ª Revolução Científica (a 1ª começou com Copérnico e sua descoberta de que a Terra se move em torno do Sol e se consumou com o método científico de Galileu). Sua descoberta (‘) significa que a idade da física clássica (o mundo mecânico de Galileu e Newton) estava chegando ao fim. Paul Strathern.

“Eppur si muove” (não obstante se move). Dizem que Galileu teria murmurado após ter abjurado que a Terra orbita em torno do Sol, conforme a Teoria de Copérnico, em vez da Teoria de Ptolomeu que afirmava ser a Terra imóvel.

O importante é dar flores em vida.
Robson Monteiro.

O Homem constrói a casa para dar à Mulher. E a Mulher constrói o Lar para dar ao Homem. (Clarice Lispector)
The woman of my life.

Em geral as mulheres entendem de moda mais que você, siga os conselhos dela.

Há pessoas que se casam em comunhão de males (Gabaglia).

O Barão de Itararé era filho de índia. Tinha um jornal: A Manhã. Angariou vários desafetos com seus ditos ferinos.

Para evitar tantas agressões pôs cartaz no Portal do jornal: Entre sem Bater. Algumas máximas suas: Os homens nascem iguais, mas se tornam desiguais.

A força é o mais desagradável dos instrumentos de corda.

Quem empresta Adeus.

Quando pobre come galinha um dos 2 está doente.

Mandela só foi Mandela porque não se permitiu o Ressentimento, após 27 anos de reclusão.

Uma observação a respeito da inclusão escolar. Se não tem “eu” não tem “outro”. É preciso então, mostrar a diferença entre o “eu” e o “outro”.

Como pesar um elefante? Pelos meios convencionais é difícil. Mas se utilizarmos o Princípio de Arquimedes, usando um tanque ou uma piscina e calculando o peso do volume de água deslocada, fica mais fácil.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Walter Del Picchia da Escola Politécnica da USP, pela colaboração e o incentivo demonstrados.

À minha esposa Dionizia, pela paciência, compreensão e encorajamento na execução deste trabalho.

À Maria Amélia A. Amato Calvoso, pelo estafante trabalho de digitação e execução das ilustrações.

APRESENTAÇÃO

A intenção deste livro é mostrar como, partindo dos conceitos da Física clássica, se chega aos conceitos da Relatividade. Fazemos uma perspectiva evolutiva e histórica dos conceitos físicos até atingir os conceitos relativísticos. No 1º volume, abordaremos a relatividade especial ou restrita e, no 2º, a Relatividade geral.

Na Introdução mostramos a importância da contribuição dos antigos gregos para a formação da Ciência, então chamada de Filosofia, principalmente de Aristóteles, Pitágoras e Arquimedes. As explicações eram apoiadas em evidências, não mais na religião, superstição ou mitologia. Aristóteles pela primeira vez mencionou o nome “Física” para observações da natureza; Pitágoras sistematizou a Geometria; e Arquimedes estabeleceu o Princípio da Hidrostática e as primeiras máquinas simples: roldanas e alavancas.

Mostramos as várias etapas pelas quais a Física passou. Newton desenvolveu a Mecânica Clássica, com suas leis, incluindo a lei da Gravitação universal, com base nas teorias de Copérnico, Kepler e Galileu. Maxwell elaborou suas equações fundamentais, tomando-se as experimentações e leis de Gauss, Coulomb, Ampère e Faraday, prevendo a existência das ondas eletromagnéticas, confirmadas por Hertz, e considerando a luz como onda eletromagnética. Einstein, tomando a Mecânica clássica, as equações de Maxwell e a experiência de Michelson-Morley, desenvolveu a teoria da Relatividade especial e geral, apresentando uma nova visão do Universo, com o espaço curvo, buracos negros, desvio das raiais espectrais e desvio das órbitas planetárias (como a de Mercúrio), e Einstein também confirmou a proposição de Max Planck sobre o *quantum*, dando início à Mecânica quântica, ao explicar o efeito fotoelétrico.

Galileu é considerado o primeiro físico na aceção moderna, por priorizar a experimentação e utilização da matemática nos fenômenos físicos. Ele descobriu a aceleração da gravidade, contrapondo-se à ideia intuitiva de Aristóteles sobre a queda dos corpos, ao afirmar que os corpos pesados caem mais rápidos do que os leves. Galileu postulou que, no vácuo, corpos com pesos diferentes chegavam ao solo ao mesmo tempo, confirmado pelo astronauta David R. Scott na Lua.

Em seguida, apresentamos as equações de transformação de Galileu, que seria a Relatividade galileana.

O Capítulo 2 é dedicado aos Sistemas de unidades métricas e como foram obtidos.

Explicação do interferômetro de Michelson-Morley e sua utilização para medir o comprimento de onda do $K\gamma^{86}$ como padrão do comprimento. Esse interferômetro também foi usado para medir a velocidade da luz, de grande importância na teoria da Relatividade.

Esclarecemos como se mede o tempo e de que forma Galileu descobriu a medição mais precisa na sua época por meio do pêndulo.

A seguir, consideramos o Movimento Harmônico Simples (MHS) e sua relação com a lei de Hooke, da deformação elástica dos corpos, e também relacionamos o MHS e o pêndulo. Essas considerações serão importantes para a compreensão do movimento ondulatório e nas ondas eletromagnéticas. Também servem de base para a Balança de torção de Cavendish, usada para medir massas e cargas elétricas.

Apresentamos a importância do Quartzo para medições elétricas e do tempo.

No Capítulo 3, fornecemos a lei de Hooke e a Elasticidade.

O Capítulo 4 foi dedicado às leis de Newton e à interação gravitacional. Esclarecemos que, contrariamente à ideia intuitiva do tempo absoluto de Newton, Einstein formulou que o tempo é relativístico, como será explicado no Capítulo 7.

No Capítulo 5, consideramos a interação elétrica e magnética. Recapitulamos as leis de Coulomb, Gauss, Faraday-Henry e Ampère-Maxwell, e o teorema de Gauss-Ostrogradsky. Conceituamos as grandezas escalares, vetoriais e tensoriais: campos e equação da continuidade. Recordamos as oscilações do circuito indutância-capacitância e as oscilações eletromagnéticas. Desenvolvemos o quadripotencial para um espaço-tempo quadridimensional a partir do qual obtemos a força de Lorentz.

Também obtivemos o tensor do campo eletromagnético, levando em conta a proposição de Minkowski, sobre a utilização de um tensor de 2ª ordem, associando os vetores campo elétrico e campo magnético para um espaço quadridimensional: x, y, z e t , como variáveis independentes.

Concluimos com a resolução do Vetor de Poynting, a partir das energias dos campos elétrico e magnético, incluindo também uma solução vetorial.

No Capítulo 6, desenvolvemos uma equação da continuidade quadridimensional.

No Capítulo 7, esclarecemos que até Maxwell acreditava que as ondas eletromagnéticas fossem as oscilações de certo meio denominado “éter luminífero”. Em 1881, Michelson e Morley se encarregaram de comprová-lo. Surpreendentemente, para eles, não o conseguiram, pois a velocidade da luz medida em seu interferômetro não detectou nenhuma variação da velocidade, seja no sentido $N - S$ ou $E - W$. Lorentz sugeriu, com sua equação da contração, que o próprio equipamento compensaria a eventual diferença das velocidades, hipótese muito controversa.

Somente em 1905, Einstein postulou que a velocidade da luz, no vácuo, seria invariável para qualquer sistema de coordenadas. Essa hipótese faz parte da teoria da relatividade restrita, que passamos a descrever.

Desenvolvemos então: a relatividade do tempo, tempo e os buracos negros, relatividade da massa, descoberta do elétron por J.J. Thomson, e a relação entre massa e energia, resultando na fórmula $E = (\Delta m)c^2$. Exemplos de sua aplicação: fissão nuclear, fusão nuclear.

Além disso, tratou-se de diversos assuntos: contribuição de Henri Poincaré; usinas atômicas de energia e acidentes: Three mile Island, Chernobil, Fukushima; postulado da relatividade; transformação de Lorentz; validade das fórmulas; e o decaimento radioativo e meia-vida.

Nos Anexos, descrevemos vários itens que não couberam no texto principal,¹ como: Teorema de Pitágoras; Galileu e a descoberta da aceleração da gravidade; Princípio da Ação mínima ou de Hamilton; 1º e 2º princípios da termodinâmica; temperatura absoluta; entropia; princípio da incerteza de Heisenberg à luz do princípio da ação mínima; equação da onda de Schrödinger; teoria dos erros de Gauss; Resiliência e energia de deformação; CERN confirma que neutrinos não viajam mais rápido que a luz; como Newton deduziu a lei da gravitação; a dedução da 3ª lei de Kepler; etimologia e filologia das cônicas; aplicação da 3ª lei de Kepler; superfície da esfera conforme Arquimedes; volume da esfera por cálculo integral; o papel da teoria especial da relatividade na Física atômica e nuclear; a teoria do movimento browniano e, por fim, Einstein na comprovação da existência do átomo.

¹ Embora tenham relações com a relatividade.

SOBRE O AUTOR

Antonio Giuseppe Roth

Graduado em Engenharia Civil e Industrial pelo Instituto Mackenzie, tem mestrado em Engenharia Aeronáutica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e cursos de doutoramento em Engenharia Nuclear pela mesma instituição, também possui cursos de doutoramento fornecidos pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Já trabalhou como professor de Teoria, Exercícios e Laboratório em Engenharia Mecânica do ITA e de Teoria e Exercícios no Instituto Mackenzie. Também foi professor no Instituto de Física da Faculdade Farias Brito (atual Universidade de Guarulhos) e na Faculdade de Engenharia Valeparaibana de São José dos Campos, onde lecionou a disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, foi pesquisador no Instituto de Atividades Espaciais do Centro Técnico de Aeronáutica (CTA) e no INPE de São Paulo e de Atibaia. Passou por cursos de extensão na University of Miami e em Boulder, Colorado (EUA).

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	
Introdução	17
CAPÍTULO 2	
Sistemas de unidades	23
CAPÍTULO 3	
Elasticidade	39
CAPÍTULO 4	
Leis de Newton	43
CAPÍTULO 5	
Interação elétrica e magnética	57
CAPÍTULO 6	
Equação da continuidade quadridimensional	143
CAPÍTULO 7	
Relatividade especial ou restrita	145
REFERÊNCIAS	187
ANEXO 1	
Demonstração do Teorema de Pitágoras	191
ANEXO 2	
Como Galileu descobriu a aceleração da gravidade	195
ANEXO 3	
Princípio da ação mínima ou de Hamilton	205

ANEXO 4	
1º Princípio da termodinâmica.....	215
ANEXO 5	
2º Princípio da termodinâmica.....	223
ANEXO 6	
Princípio da incerteza de Heisenberg à luz do princípio da ação mínima.....	237
ANEXO 7	
Resiliência	277
ANEXO 8	
Cern confirma que neutrinos não viajam mais rápido que a luz	289
ANEXO 9	
Lei da gravitação de Newton	291
ANEXO 10	
Teorema de Arquimedes e superfície da esfera conforme Arquimedes	323
ANEXO 11	
O papel da teoria especial da relatividade na física atômica e nuclear	327

1

CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste livro é mostrar como os conceitos e teorias evoluíram na Física, partindo de forma empírica (experimental) para depois realizar uma síntese que, posteriormente poderá evoluir para previsões de novos conceitos. Antes de abordar essa evolução, faremos um breve histórico de como a Física teve seu início, ainda quando era Filosofia.

O mais significativo, do ponto de vista intelectual, foi o despertar da Grécia. Devemos à Grécia Antiga um legado cultural para a civilização ocidental, que originou a ciência como a compreendemos hoje. A ciência se separou da religião; a Astronomia marginalizou a Astrologia; o domínio tornou-se antes da razão que da intuição; as explicações sobre o funcionamento do mundo passaram a ser apoiadas em evidências, não mais na religião, na superstição ou em contos de fadas; introduziu-se a prova na matemática; os teoremas substituíram o procedimento habitual; as regras e as leis começaram a ser derivadas do estudo dos fenômenos naturais.

O teorema de Pitágoras leva seu nome pois ele foi o primeiro a prová-lo. Os gregos continuavam acreditando em deuses, mas, a partir de então, o comportamento divino passou a estar sujeito aos limites da razão. Pitágoras (287 a.C.-212 a.C.) foi além e declarou que o mundo se comportaria, fatalmente, segundo um modelo matemático. Ele foi o primeiro a afirmá-lo no século VI a.C., e nós ainda cremos em sua afirmação. Pitágoras pôde ter instituído a visão matemática do mundo, mas a visão científica grega foi estabelecida pelo filósofo Aristóteles. Esses dois pensadores foram considerados filósofos em sua época. A ciência era parte da Filosofia, que em grego antigo significa “amor à sabedoria”. Posteriormente a ciência veio a ser conhecida como Filosofia da natureza.

Pitágoras é considerado o pioneiro da Matemática por sua grande e valiosa contribuição a essa ciência (STRATHERN). A própria palavra matemática, usada pela primeira vez por ele, veio do grego *mathema*, que significa “aquilo que se aprende”, ou ciência. Foi somente no milênio seguinte que as

palavras “filosofia”, “matemática” e “ciência” desenvolveram gradualmente os significados independentes de que hoje dispõem.

A primeira síntese, tomando as teorias de Copérnico, Kepler e Galileu, desenvolveu o que é conhecido hoje como a mecânica clássica, com as leis devidas a Newton, incluindo a lei da gravitação. A segunda síntese, tomando as experimentações e leis de Gauss, Coulomb, Ampère e Faraday, desenvolveu as equações fundamentais de Maxwell (em forma diferencial e integral), prevendo a existência das ondas eletromagnéticas (confirmada por Hertz) e considerando a luz como onda eletromagnética.¹

A terceira síntese, devida a Albert Einstein, tomou a mecânica clássica, as equações de Maxwell e a experiência de Michelson-Morley, e desenvolveu a teoria da relatividade (especial e geral), proporcionando uma nova visão do Universo com espaço curvo (tetradimensional), curvatura da luz (sob a influência de um campo gravitacional), buracos negros, desvio das raias espectrais e desvio das órbitas planetárias (p. ex., a de Mercúrio). Einstein também promoveu o pontapé inicial da mecânica quântica, vislumbrada inicialmente por Max Planck (com a quantização da energia), com a explicação do efeito fotoelétrico e a conclusão da natureza dual da luz (ondulatória e corpuscular), seguindo os passos de Niels Bohr (teoria das órbitas eletrônicas dos átomos).

Naturalmente, foram citados os mais conhecidos, mas não podemos esquecer a contribuição de muitos outros.

1.1 CINEMÁTICA E DINÂMICA

Aristóteles (384-322 a. C.) descreveu que um corpo pesado cai mais rapidamente que um leve. Contudo, Galileu (1564-1642, considerado o fundador da Física moderna) determinou experimentalmente que as coisas não eram bem assim. Usando um relógio de água, examinou o movimento de corpos esféricos percorrendo vagorosamente um plano inclinado e obteve que, independentemente do peso, quando o corpo está sujeito apenas à gravitação, a relação entre a velocidade e o tempo é sempre constante e igual à aceleração: $a = \frac{v}{t}$, e a distância percorrida será: $s = at^2/2$. Então se conclui que a aceleração da gravidade é a mesma para qualquer peso, desprezando-se a resistência do ar.²

¹ Em 1865, Maxwell concluiu teoricamente a existência das ondas eletromagnéticas, e afirmou que a luz deveria ser uma onda eletromagnética. Essa conclusão era muito arrojada na época. Suas ideias custaram a ser aceitas, mesmo por grandes físicos. Assim, em 1867, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio a quem conseguisse demonstrar experimentalmente a existência das ondas eletromagnéticas. Em 1879, o físico alemão Heinrich Hertz conseguiu prová-lo com seu oscilador. Essas ondas descobertas por Hertz se tornariam, futuramente, meios de comunicação, dando origem ao telégrafo, rádio, televisão etc. Olivier Heaviside, matemático e físico inglês, traduziu a teoria eletromagnética de Maxwell em termos vetoriais (LAROUSSE).

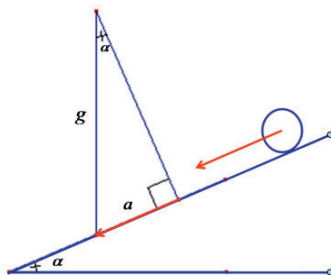
² Todos sabem que o primeiro homem a pisar na Lua foi o astronauta Neil Alden Armstrong, através da Nave norte-americana Apollo 11, em 21 de julho de 1969. Mas quem lembra que o astronauta David R. Scott, da Apollo 15, fez a seguinte experiência, transmitida ao vivo pela televisão: deixou cair, de uma determinada altura, uma pena e um martelo, lado a lado, na superfície da Lua, onde não existe ar?, corroborando o que Galileu dissera – se uma pena e um pedaço de chumbo fossem deixados cair no vácuo, chegariam ao chão ao mesmo tempo, pois suas acelerações seriam iguais –, o Coronel Scott afirmou: “Isso prova que o Sr. Galileu estava certo”.

No entanto, tudo o que apresentamos ainda é parte da cinemática, isto é, a descrição do movimento dos corpos. Não se levou em conta a relação entre a força (no caso, o peso) que provoca o movimento e a aceleração a que o corpo fica sujeito (o objetivo da dinâmica). Veremos isso no Capítulo 4, sobre as leis de Newton. Para maiores detalhes a respeito da aceleração da gravidade, ver Anexo 2, intitulado “Como Galileu descobriu a aceleração da gravidade”.

A importância histórica de Galileu é enorme. Além de suas descobertas em Física e Astronomia, ele abalou o prestígio do aristotelismo, e também estabeleceu o experimento e a formulação matemática do resultado da experiência como fundamento das Ciências Exatas. Em 1633, foi condenado à prisão domiciliar³ e proibido de publicar livros. Conta a história que ele teria murmurado: “*Eppur si muove*” (no entanto se move). Em 12 de setembro de 1982, ao visitar a Universidade de Pádua, o Papa João Paulo II retirou as acusações de heresia feitas pela Inquisição e, em novembro de 1992, o reabilitou definitivamente, reconhecendo Galileu como um físico genial, apesar dos 360 anos de atraso (LAROUSSE).

1.1.1 Exemplo ilustrativo

Solta-se uma bola sobre um plano inclinado e esta se põe em movimento para baixo, necessitando de 4seg para percorrer a distância de 100cm . Qual é a sua aceleração em cm/seg^2 ? Quantos cm ela teria caído, verticalmente, no mesmo tempo?



Solução:

Distância percorrida:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad x = 100\text{cm}$$

Tempo de percurso: $t = 4\text{seg}$

Explicitando a aceleração:

³ Por ter defendido o heliocentrismo de Copérnico, isto é, que a Terra se move em torno do Sol.

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 100}{16} \quad \therefore a = 12,5 \text{ cm/seg}^2$$

Utilizando a mesma fórmula e considerando a aceleração a como a aceleração da gravidade:
 $a = g = 981 \text{ cm/seg}^2$ (1)

Obtemos: $x = \frac{1}{2}gt^2$.

Essa será a distância percorrida na vertical durante o mesmo intervalo de tempo $t = 4 \text{ seg}$.

$$\therefore x = \frac{1}{2}981 \times 16 = 7848 \text{ cm} = 78,48 \text{ m}$$

Qual será a inclinação α do plano inclinado para obter a aceleração $a = 12,5 \text{ cm/seg}^2$ após percorrer a distância $x = 100 \text{ cm}$?

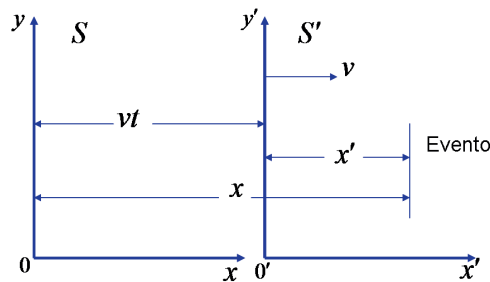
Por trigonometria temos:⁴

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{g} = \frac{12,5}{981} = 0,012742$$

Pela tabela de funções trigonométricas: $\alpha = 0^\circ 43' 47''$.

Portanto, a inclinação é menor do que 1° .

1.2 EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU



⁴ O ângulo formado pela perpendicular ao plano inclinado e a vertical tem seus lados perpendiculares ao ângulo formado pelo plano inclinado com a horizontal, logo, são iguais.

O referencial inercial S' move-se com velocidade v em relação ao referencial (sistema de referência) S , no sentido positivo do eixo horizontal (x, x') comum aos dois. Um observador em S registra as coordenadas espaço-tempo x, y, z, t para um evento, e outro observador, em S' , registra as coordenadas x', y', z', t' para o mesmo evento.

Referenciais com um eixo horizontal comum (x, x') :

O referencial S' se afasta de S com velocidade v .

As coordenadas y e z , perpendiculares ao movimento, não são afetadas, isto é, $y = y'$ e $z = z'$.

No instante inicial $t = t' = 0$, quando a origem dos dois sistemas coincide.

O tempo é considerado absoluto e, portanto, comum aos dois sistemas.

Teremos então as equações de transformação de Galileu:

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

Veremos, posteriormente, que estas equações somente são válidas para baixas velocidades, quando v é muito menor que c , $v \ll c$, sendo c a velocidade da luz no vácuo (ver Relatividade do tempo, Seção 7.2, e Relatividade do comprimento, Seção 7.3).

Na mecânica clássica, a interação das partículas materiais é feita pela energia potencial de interação, função das coordenadas das partículas (ver Seção 4.8).

Derivando as equações anteriores em relação a t ou t' , tem-se o mesmo, pois $t = t'$:

$$v'_{x'} = v_x - v \quad v'_{y'} = v_y \quad v'_{z'} = v_z$$

Sendo: $v_x = dx/dt$ $v'_{x'} = dx'/dt'$ etc. (1)

As equações em (1) fornecem a regra galileana para a comparação das velocidades de um corpo medidas por dois observadores em movimento relativo de translação.

SISTEMAS DE UNIDADES

2.1 SISTEMA MKSC

Comprimento: metro (m)
Massa: quilograma (kg)
Tempo: segundo (s)
Carga elétrica: Coulomb (C).

O metro foi definido originalmente como a décima milionésima parte da distância do Polo ao Equador no meridiano de Paris.¹ Posteriormente verificou-se que ele diferia 0,023% do valor pretendido (barra do metro-padrão).

Então, adotou-se como padrão o valor de 1.650.763,73 comprimentos de onda da luz emitida, no vácuo, pelo isótopo do criptônio Kr^{86} , excitado por carga elétrica, na radiação vermelho alaranjada.

Assim: comprimento de onda $\lambda = 6057,80211 \text{ \AA}$

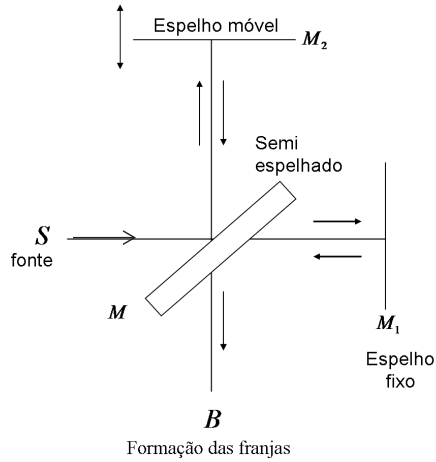
$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} m$$

¹ Ou seja 10^{-7} de um quadrante do meridiano terrestre, isto é, $1/4$ de uma circunferência passando pelos polos.

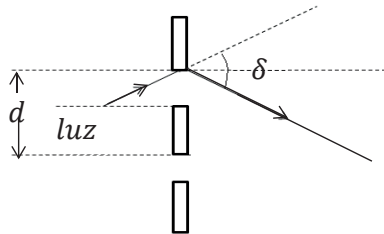
$$1.650.763,73 \times 6057,80211 \times 10^{-10} = 1,00m$$

Utiliza-se um interferômetro de Michelson (o mesmo utilizado na célebre experiência de Michelson-Morley).

Esquema:



2.1.1 Fendas múltiplas



$$\text{sen } \frac{\delta}{2} = \frac{n\lambda}{2d}$$

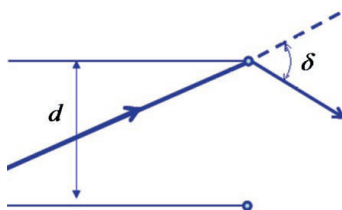
λ = comprimento de onda

São fendas paralelas, de mesma largura, separadas por intervalos iguais. Esse dispositivo é denominado "Rede de difração". Sua primeira construção foi realizada em 1814 por Joseph von Fraunhofer (1787-1826).

As redes de difração foram inicialmente montadas com fios metálicos muito finos, de 0,04 a 0,6 mm de diâmetro, separados por intervalos de 0,0528 mm a 0,6866 mm. Atualmente, são constituídas com uma lâmina de vidro onde se riscam, com diamante, uma grande quantidade de linhas retas igualmente intercaladas.

Cada fenda gera uma onda. As ondas paralelas se interferem, como as ondas do mar ou do som. Quando o som ricocheteia em uma parede, as interferências podem se aniquilar ou reforçar, e também provocar ecos. Algo semelhante acontece quando a luz se reflete nos espelhos do Interferômetro de Michelson (SEARS; STRATHERN).

Na interferência, formam-se franjas, isto é, zonas intercaladas de claro e escuro. As zonas claras são de reforço, e as escuras, de aniquilação das ondas. [Ver redes de difração de Fraunhofer (1787-1826)].



$$\text{sen} \frac{\delta}{2} = \frac{n\lambda}{2d}$$

A rede de difração é formada pela lâmina de vidro onde se riscam, com diamante, um grande número de linhas retas igualmente intervaladas.

No interferômetro de Michelson, no lugar da lâmina de vidro com riscas, teremos a interferência devida aos trens de ondas refletidas em M_1 e M_2 , que interferem em M e, conforme o deslocamento de M_2 , podem ser reforçados ou anulados, formando franjas de interferência, semelhantes a listras de zebra (SEARS).

Em nosso caso, $\delta = 180^\circ$, logo, $\lambda = \frac{2d}{n}$.

2.1.1.1 Exemplo ilustrativo

Contam-se 792 franjas ao se deslocar o espelho M_2 de 0,233mm.

Qual é o comprimento da luz utilizada?

$$\lambda = \frac{2L}{N} = \frac{2 \times 0,233 \times 10^7}{792} = 5883 \text{ \AA}$$

Quando o espelho M_2 é deslocado de uma distância $\lambda/2$, a diferença do trajeto de luz variará de λ , e a figura de interferência sofrerá um deslocamento de uma franja.

A precisão alcançada com o metro padrão é de cerca de uma parte em 10^7 . Se esse erro ocorresse no ajuste da bússola giroscópica, poderia ocasionar um desvio de $1.600km$ em um foguete lançado para a Lua.

As ondas luminosas têm comprimento de aproximadamente $5 \times 10^{-5} cm$, resultando em uma precisão de uma parte em 10^9 .

Originalmente, o quilograma foi definido como a massa de um bloco de platina mantido em Sèvres, nas proximidades de Paris.

Para fins práticos, a massa de 1 kg é 1.000 vezes igual à massa de $1cm^3$ de água destilada à temperatura de $4^\circ C$, condição na qual a densidade da água é máxima (ALONSO, FINN; HALLIDAY, RESNICK; ENC. BRITANNICA).

A fórmula da densidade é: $\rho = \frac{m}{V}$, ou seja, massa por unidade de volume.

Para fins práticos, um litro de água tem a massa de $1kg$

$$1l = 1dm^3 \quad 1dm = 10cm \quad 1m = 100cm$$

Logo, $1dm^3 = 1000cm^3$.

Qualquer fenômeno periódico que se repita no tempo pode servir para sua medição. Pode ser um pêndulo oscilante, uma mola espiral ou um cristal de quartzo.

Desde os tempos primitivos, a duração do dia tem sido usada como padrão de tempo.

O dia tem 24 h de 60 min cada, e cada min, 60 s. Logo, o dia tem: $24 \times 60 \times 60 = 86.400s$.

Define-se o segundo (s) como a fração $1/86400$ do dia solar médio e é denominado de “tempo universal” (TU).

Em 1956, o Congresso Internacional de Pesos e Medidas redefiniu o segundo considerando um período anual.

Devido às ações das marés, o período de rotação da Terra está aumentando gradualmente, por isso, tomou-se o ano de 1900, fornecendo o ano trópico (intervalo entre duas passagens sucessivas pelo equinócio vernal, em 21 de março de cada ano) com $365d \ 5h \ 48 \ min \ 45,97 \ seg = 31556925,9747 \ s$

Assim, o segundo é definido então como a fração: $1/31556925,9747$ do ano trópico de 1900, e essa unidade é denominada “tempo das efemérides” (TE).

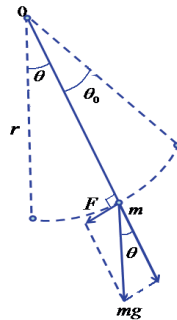
2.1.2 Pêndulo simples

Em 1581, Galileu entrou na Universidade de Pisa para estudar Medicina. Em certa ocasião, quando assistia a uma missa na Catedral de Pisa, observou uma lâmpada que balançava pendurada do teto por um longo fio. Ele notou que, independentemente da amplitude, o período de oscilação era constante. Ao chegar em casa, construiu um pêndulo com um pedaço de corda e um peso de chumbo. Ao realizar experiências com pesos e cordas de comprimentos diferentes, chegou à conclusão de que o período, para pequenas oscilações, dependia unicamente do comprimento do pêndulo.

Então, Galileu concebeu um tipo de pêndulo que podia ser usado para medir os batimentos cardíacos dos pacientes e o apresentou a alguns membros do departamento médico, que ficaram tão impressionados a ponto de roubar sua ideia (naquele tempo não havia registro de patentes). Apesar disso, o *pulsilogium*, como ficou conhecido, granjeou a Galileu certo renome local.

Posteriormente Christiaan Huygens, em 1656, foi o responsável por sua aplicação geral como controlador do tempo em relógios.

A grande virtude do pêndulo como medidor do tempo está no fato de que, para pequenos arcos de oscilação, seu período depende somente do comprimento do pêndulo e praticamente independe da extensão do arco.



Sendo F a força restauradora $F = -mg \operatorname{sen}\theta$

O sinal negativo indica que a sua direção é contrária ao crescimento do arco.

Para pequenas oscilações: $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$

Logo: $F = -mg\theta$

O ângulo θ em radianos é medido como a razão entre o arco e o raio:²

² Outro modo é medir os ângulos em graus, tomando como base o ângulo reto 90° . Como a circunferência tem quatro ângulos retos, tem-se: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$. Assim, a circunferência completa tem $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

$$\theta = \frac{x}{r} \quad (1)$$

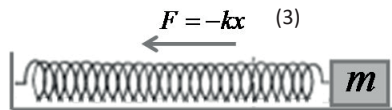
Assim, a circunferência tem 2π radianos.

$$\text{Portanto: } F = -mg \frac{x}{r} = -\frac{mg}{r} x \quad (2)$$

A força é proporcional ao deslocamento x .

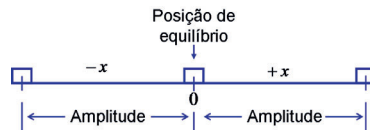
2.1.3 Movimento harmônico simples (MHS)

Seja um corpo de massa m deslizando sobre uma superfície lisa e ligado a uma mola.



Distendemos a mola e soltamos o corpo, que tende a voltar à posição inicial, mas oscila entre as posições $-x$ e $+x$.

Chamamos F de força restauradora, ou força elástica (devido às propriedades elásticas da mola). A fórmula $F = -kx$ é conhecida como Lei de Hooke, de autoria de Robert Hooke (1635-1703), que descreve a deformação³ elástica dos corpos. A lei foi descoberta em 1660 e publicada somente 16 anos depois.



$$F = -kx = ma \quad \therefore a = -\frac{k}{m} x \quad (3a)$$

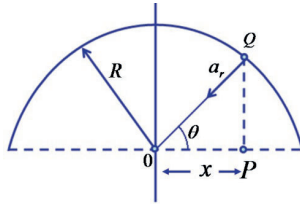
Onde a é aceleração e a Força F é massa vezes aceleração (ver seções 4.3 e 4.4)

k é chamada de constante elástica

Consideremos o ponto Q movendo-se em trajetória circular com velocidade angular constante ω (rad/seg): $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

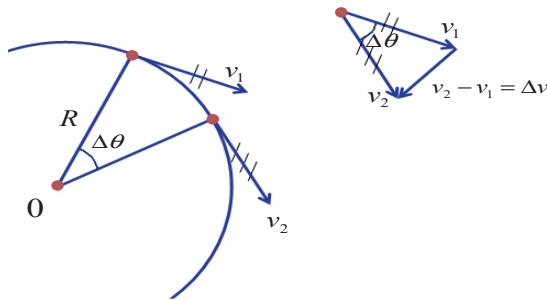
³ Ver Capítulo 3, "Elasticidade".

P é a projeção de Q no eixo dos x e P se move para frente e para trás em movimento harmônico simples, como veremos.



Consideremos somente a cinemática do movimento P , isto é, não consideramos a força que o provoca. A aceleração de P será: $a = -a_r \cos \theta$, sendo a_r aceleração radial ou centrípeta.

Para calcular a_r :



$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Delta \theta = \frac{\Delta v}{v} \quad \text{ou} \quad \Delta v = v \Delta \theta \quad (\text{aproximadamente})$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (\text{aproximadamente})$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$, a aproximação torna-se exata:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{Porém: } \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Logo: $a_r = v\omega$

$$\text{Porém, } v = R\omega \quad (3b)$$

Deduzindo da Equação (1), derivando em t:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dx}{dt}, R \text{ é constante, } \omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ e } v = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore a_r = v\omega = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \quad (3a1)$$

Voltando ao movimento harmônico simples (MHS): $a = -a_r \cos \theta \therefore a = -\omega^2 R \cos \theta$, sendo em nosso caso, R amplitude máxima: $x = R \cos \theta$

Logo: $a = -\omega^2 x$ Como ω é constante, a só depende de x .

Comparando com $a = -\frac{k}{m}x$, ver Equação (3a).

$$\text{Então: } \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Mas: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3c)$$

Sendo T o período de uma volta.

O ângulo de uma volta é 2π rad, ou período, e T é o tempo gasto em uma volta ou período, resultando ω em rad por seg, velocidade angular.

$$\text{Logo: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

Outra forma de resolver é:

$$\text{Como: } a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{Temos da equação: } a = -\frac{k}{m}x$$

$$\text{Portanto: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{É uma equação diferencial de 2ª ordem.}$$

$$\text{Então: } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (4b1)$$

É uma função cuja derivada de segunda ordem em relação ao tempo seja igual à própria função, com sinal oposto e multiplicado por uma constante k/m . As funções *seno* e *coseno* satisfazem essas condições. Assim:

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t$$

Essa propriedade não é afetada se a função coseno for multiplicada pela constante R . Levando em consideração $\theta = \omega t$, sendo ω constante: $x = R \cos \omega t$.

$$\frac{dx}{dt} = -\omega R \operatorname{sen}\omega t \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 R \operatorname{cos}\omega t$$

Substituindo na equação: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Teremos: $-\omega^2 R \operatorname{cos}\omega t = -\frac{k}{m}R \operatorname{cos}\omega t$

Conclui-se que: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (4a)

Significado físico da constante ω .

Se o tempo t for aumentado de $2\pi/\omega$, a função se torna:

$$x = R \operatorname{cos}\omega(t + 2\pi/\omega) = R \operatorname{cos}(\omega t + 2\pi) = R \operatorname{cos}\omega t \quad (4b2)$$

Isto é, a função é periódica e se repete após o intervalo de tempo $2\pi/\omega$, que é denominado de período T .

Como $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ver Equação (3c),

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

[Ver Seção 5.22, Equação (0)]

e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, que é uma velocidade angular (*rad/seg*).

2.1.4 Pêndulo simples

Retomando a Equação 2: $F = -\frac{mg}{r}x$, podemos fazer a análise dinâmica desse MHS.

Vemos que obedece à Lei de Hooke: $F = -kx$, Equação (3).

Comparando as duas equações: $k = \frac{mg}{r}$, introduzindo na Equação (4b1),

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg/r}{m}x = -\frac{g}{r}x \quad \text{ou}$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}\theta$ (6), pois $x = r\theta$, ver Equação (1) e Anexo 6, “Resolução da equação da onda”, Equação (9).

Substituindo na equação do período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [Equações (4) e (5)]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/r}} \quad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \quad \therefore \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mg/r}{m}x = -(g/r)x \quad \text{ou}$$

$d^2\theta/dt^2 = -(g/r)\theta$ (6), pois $x = r\theta$, ver Equação (1) e também Anexo 6, “Resolução da equação da onda”, Equação (9).

Vemos que para pequenas oscilações (desde que $\text{sen}\theta \cong \theta$). T é independente de m . Depende somente de r . É um método conveniente para medir a aceleração da gravidade g (conhecendo T e r).

Quando a amplitude de oscilação não for pequena, usamos: $r \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \text{sen}\theta$

$$\text{Integrando em relação a } t: \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{r}(\cos\theta - \cos\alpha)$$

Integrando novamente em t :

$$T = \sqrt{\frac{2r}{g}} \int_{-a}^a \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{-a}^a \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (\text{Integral elíptica})$$

α , amplitude de oscilação do pêndulo, posição angular para $t = 0$ com velocidade 0.

Desenvolvendo pelo teorema do binômio, e depois integrando termo por termo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \text{sen}^4 \frac{\theta_m}{2} + \dots \right)$$

θ_m deslocamento angular máximo (COURANT; YAVORSKI; HÜTTE).

Somente para amplitudes muito grandes é que o pêndulo difere de $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Para pequenas amplitudes é suficiente tomar apenas o primeiro termo de correção e pode-se substituir $\text{sen} \frac{1}{2}\theta_0$ por $\frac{1}{2}\theta_0$, resultando em: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 \right)$

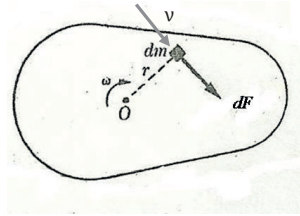
θ_0 em rad

É suficiente para a maioria das situações práticas. De fato, o termo $\theta_0^2/16$ contribui com menos de 1% para amplitudes menores que 23° .

Para maior exatidão, o período pode ser calculado com o grau de precisão necessário, tomando-se a quantidade suficiente de termos da série.

Quando $\theta_m = 15^\circ$, o período mais exato difere do aproximado em menos de 0,5%.

2.1.5 Pêndulo de torção



Conjugado ou torque elementar: $dC = r dF$ (7a) [Momento da força elementar; ver Equação (2), Capítulo 3, “Elasticidade”].

Porém, pela Segunda Lei de Newton: $dF = \frac{d}{dt}(v dm)$ e $v = \omega r$ $\therefore dF = r dm \frac{d\omega}{dt}$

Nesse caso, a massa dm e o raio r não variam com o tempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Logo: $dC = r^2 dm \alpha$

α = aceleração angular

A quantidade: $dI = r^2 dm$ chama-se momento de inércia elementar.

Integrando para o corpo todo, teremos o torque total: $C = \int \alpha r^2 dm$

$$\therefore C = \alpha \int r^2 dm = \frac{d\omega}{dt} \int dI$$

A expressão geral do conjugado será: $C = \frac{d}{dt}(I\omega)$, semelhante a $F = \frac{d}{dt}(mv)$.

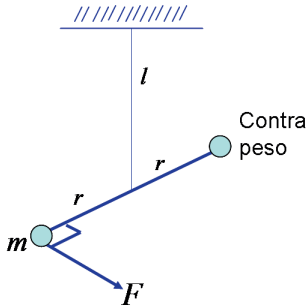
Considerando a quantidade de movimento angular do elemento: $v r dm = \omega r^2 dm = dL$.

A quantidade de movimento angular do total do corpo será: $\int \omega r^2 dm = \omega \int r^2 dm$.

Como vimos, $I = \int r^2 dm$, é o momento de inércia do corpo. Então, a quantidade de movimento angular pode ser definida como: $L = I\omega$.

$C = \frac{d}{dt}(I\omega) = \frac{d}{dt} \left[\int r^2 dm(\omega) \right] = \frac{d\omega}{dt} \int r^2 dm = \alpha I$, para I constante no tempo, como vimos anteriormente.

Logo: $C = I\alpha$ (para I constante), pois $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$.



(2.9)

A balança de torção de Cavendish, utilizada para experiências com massas e cargas elétricas, é constituída de um fio de fibra ou metálico, de comprimento l que sustenta uma haste de comprimento $2r$, tendo em uma extremidade um corpo de prova (massa ou carga elétrica) e, na outra extremidade, um contrapeso. O corpo de prova fica sujeito a uma força de atração ou repulsão F . A haste é defletida de um ângulo θ na horizontal, provocando no fio uma torção que deve ser contrabalançada.

Essa deflexão é provocada pelo torque (momento):

$$C = -K\theta \quad (8) \quad [\text{Ver Capítulo 3, "Elasticidade", Equação (3)}]$$

K (*kapa*) é o módulo de torção do fio, que depende do material do fio.

$$\text{Momento } C = F \cdot r$$

A fórmula é válida para pequenas deflexões.

$$\text{Como } C = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \text{ temos } \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta$$

Para $\theta = \frac{x}{r}$, sendo x o deslocamento do corpo de prova

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{K}{I}\left(\frac{x}{r}\right), \text{ como } r \text{ é constante, } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{I}x$$

$$F = -kx \quad \text{e} \quad a = -\frac{k}{m}x$$

Comparando com a Equação (3a), vemos que obedece à Lei de Hooke.

Não contrabalançando a torção, o corpo de prova vai oscilar com um período como na Equação (4):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

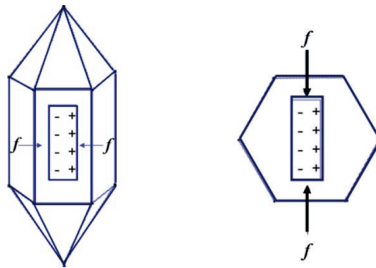
$$\text{Em nosso caso: } \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Conhecendo K e medindo T , pode-se determinar o I de qualquer corpo rígido em relação ao eixo de rotação. Ou conhecendo I e medindo T , pode-se determinar K .

Muitos instrumentos envolvem oscilações de torção, como o galvanômetro e a balança de torção.

O volante de um relógio é um exemplo de movimento harmônico angular. O torque restaurador é fornecido por uma mola espiral (“cabelo”).

2.1.6 Quartzo



O cristal de quartzo tem a forma de um prisma hexagonal, terminado por duas pirâmides hexagonais.

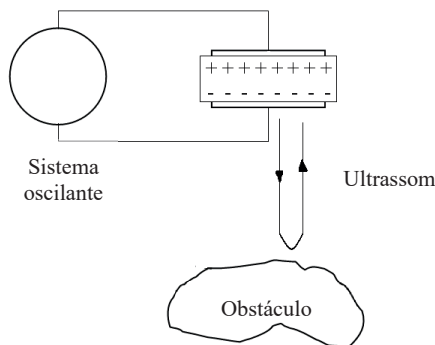
De duas em duas, as arestas laterais são terminadas por facetas, que faltam nas arestas intermediárias, resultando uma dissimetria particular.

Suponhamos ter cortado um prisma reto de base retangular, como mostra a Figura, com faces paralelas aos eixos principais do cristal.

Jacques e Pierre Curie descobriram, em 1882, que esse prisma é piezoelétrico, isto é, que pode se eletrizar por compressão ou tração, e que suas faces opostas ficam com cargas de sinais diferentes.

Reciprocamente, o fenômeno é reversível, isto é, ao eletrizar as referidas faces, o prisma se alongará ou encurtará.

Como aplicação, utiliza-se para medidas elétricas e substitui o galvanômetro. Também produz ultrassons. Um sistema oscilante de radiofrequência, produzindo com frequência de 100.000Hz , carrega alternadamente as duas faces de uma lâmina de quartzo, produzindo contrações e dilatações de 100.000Hz , fazendo vibrar por ressonância um tubo sonoro.



O ultrassom será produzido, propagando-se na água a 1500m/s , altamente direcional e sem difração.

As vibrações retornam e o próprio cristal atua como receptor, emitindo corrente elétrica de sinal fraco, que é amplificado através da grade de uma válvula triodo ou transistor. As ondas são ouvidas e registradas. Serve para detectar submarinos, nivelamento do fundo do mar, *icebergs*, navios submersos e outros obstáculos (LEMOINE, GUYOT).

Atualmente, é muito utilizado na medição de tempo, em relógios e cronômetros, ao proporcionar uma frequência constante. Este assunto será retomado oportunamente.

O relógio mais preciso inventado até hoje é o atômico, por basear-se na transição entre dois estados quânticos do átomo de Cs^{133} , em que há absorção ou emissão de radiação eletromagnética de uma frequência bem definida.⁴ Um exemplo desse relógio é o que está instalado no National Physical Laboratory em Teddington, próximo de Londres. (7)

$$\text{Frequência} = 9.192.631.770 \text{ oscil/seg}$$

⁴ Com isso, o momento magnético dos átomos de Cs^{133} é alterado, podendo ser convenientemente defletido por campos magnéticos oscilantes (mesma frequência da transição).

C , a quarta letra de MKSC, é a unidade de carga elétrica Coulomb, que será definida oportunamente. No momento, podemos dizer que é, em valor absoluto, igual ao conteúdo de carga negativa de $6,2418 \times 10^{18}$ elétrons, ou de igual número de carga positiva de prótons.⁵

Em engenharia é comum utilizar-se do sistema *MKS* técnico, em que a força constitui uma grandeza fundamental em lugar da massa, que passa a ser grandeza derivada. Nesse caso, a força será medida em *kgf*.

2.2 SISTEMA MKSA

Comprimento: metro (m)
Massa: quilograma (kg)
Tempo: segundo (s)
Corrente elétrica: Ampère (A).

Também chamado de Sistema Internacional (SI) de unidades, foi adotado na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em Paris (1960), e, nesse caso, o Ampère (A) é escolhido por ser mais fácil de medir.

O Coulomb é então definido como a quantidade de carga elétrica que atravessa uma seção de um condutor durante 1 s, quando a corrente que o percorre é de 1 A.

2.3 SISTEMA CGS (SISTEMA GAUSSIANO)

É muito popular nos trabalhos científicos, nele tem-se:

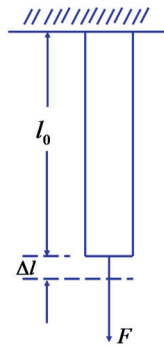
Comprimento: centímetro (cm)
Massa: grama (g)
Tempo: segundo (s).

⁵ Ver a definição apresentada na página inicial do capítulo 5.

3

CAPÍTULO

ELASTICIDADE



Chama-se tensão a relação entre a força F e a secção A onde a força for aplicada.

Pode ser de tração ou compressão: $\sigma = \frac{F}{A}$

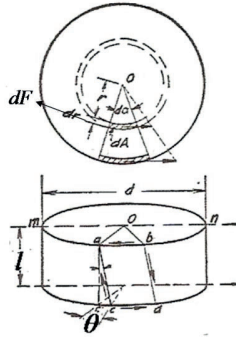
Chama-se deformação a relação entre a variação no comprimento e o comprimento inicial, quando o corpo é sujeito a uma força $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

A relação entre a tensão e a deformação é o módulo de elasticidade E: $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l_0}$

Explicitando F :

$$F = \frac{EA}{l_0} \Delta l \quad (0)$$

$$\therefore F = kx, \text{ com } \Delta l = x \quad (1)$$



Essa é a Lei de Hooke, em que k é a constante elástica [ver Anexo 7, Equação (1)].

Chama-se módulo de rigidez G à relação entre tensão de cisalhamento¹ e deformação de cisalhamento:

$$G = \frac{dF/2\pi r dr}{r\theta/l} \quad \therefore dF = \frac{2\pi G \theta}{l} r^2 dr \quad 2$$

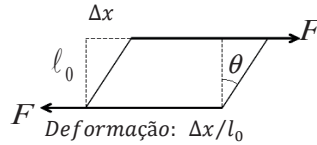
O momento da força (conjugado) será:

$$d\tau = r dF = \frac{2\pi G \theta}{l} r^3 dr \quad (2)$$

[ver Capítulo 2, Equação (7a), Pêndulo de torção].

¹ Tensão de cisalhamento: relação entre força tangencial F_t e a área tangencial A_t em que a força F_t é aplicada: F_t/A_t .

² $r\theta$ é o arco descrito pela extremidade móvel do raio r ao executar um ângulo θ .



Integrando entre $r = 0$ até $r = R$:

$$\mathcal{T} = \int d\mathcal{T} = \frac{2\pi G\theta}{l} \int_0^R r^3 dr$$

$$\therefore \mathcal{T} = \frac{\pi GR^4\theta}{2l} \text{ onde } \frac{\pi G}{2} \text{ constante (3)}$$

Fórmula estabelecida por Coulomb: $C = k \frac{d^4}{l} \theta$

em que C é \mathcal{T} , conjugado.

(Ver Lei de Coulomb)

[ver Capítulo 2, Equação (8), Pêndulo de Torção].

3.1 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Imagine um objeto de borracha sendo esticado ou torcido.

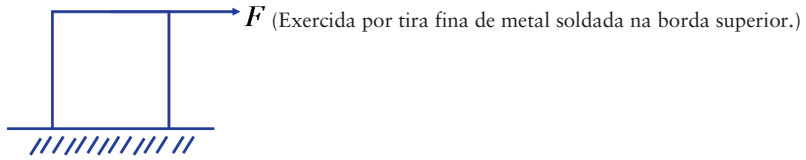
Uma carga de 454kg , suspensa por um fio de aço de $2,44\text{m}$ de comprimento e secção transversal de $0,161\text{cm}^2$, distendeu um fio de $0,305\text{cm}$. Qual é a tensão, a deformação e o módulo de elasticidade desse fio de aço?

$$\text{Tensão: } \sigma = \frac{F}{A} = \frac{454}{0,161} = 2820 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{Deformação: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,305}{244} = 0,00125$$

$$\text{Módulo de elasticidade: } E = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}} = \frac{2820}{0,00125} = 22,6 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

Uma chapa quadrada de latão com $0,61\text{m}$ de lado e $0,635\text{cm}$ de espessura está rigidamente presa no chão por um de seus lados. Qual é a força necessária para deslocar a borda superior de $0,0254\text{cm}$? O módulo de elasticidade transversal (rigidez) desse latão é $3,52 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$.



A força é aplicada à tira de metal em uma área de cisalhamento de: $A = 61 \times 0,635 = 38,8 \text{ cm}^2$

Tensão de cisalhamento: $\tau = F/38,8 \text{ kgf/cm}^2$

Deformação de cisalhamento: $\epsilon = \Delta x/\ell_0 = \frac{0,0254}{61} = 0,000417$

Módulo de elasticidade transversal: $G = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}}$

$$G = 3,52 \times 10^5 = \frac{F/38,8}{0,000417} \quad \therefore F = 5700 \text{ kgf}$$



Imagine um baralho sendo deslocado lateralmente. Suas cartas estarão sujeitas a tensões de cisalhamento (TIMOSHENKO).

4

CAPÍTULO

LEIS DE NEWTON

4.1 PRIMEIRA LEI

Galileu determinou, por intermédio de suas experiências, que uma esfera, em uma superfície plana, uma vez posta em movimento, continuaria indefinidamente, desde que as forças de atrito fossem eliminadas. Com base nisso, Newton formulou sua primeira lei.

A Primeira Lei, ou Lei da inércia, postula que qualquer corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a sair desse estado por forças aplicadas a ele.

Ou seja, se nenhuma força resultante atuar sobre um corpo sua aceleração a será nula.

4.2 SEGUNDA LEI: MASSA

Chegamos ao conceito de massa como inércia, isto é, a resistência ao movimento: $a = \frac{F}{m}$

Quanto maior a massa, maior a força para a mesma aceleração.¹

Assim, temos a equação fundamental da mecânica clássica: $\vec{F} = m\vec{a}$

[Ver observação da Seção 4.4, Equação (1), e da Seção 4.3, “Quantidade de movimento”].

A primeira lei está implícita na 2ª Lei, isto é, quando a força for nula, a aceleração também será nula.

¹ Agora consideramos a relação entre força e aceleração, que é objeto da Dinâmica.

4.3 QUANTIDADE DE MOVIMENTO

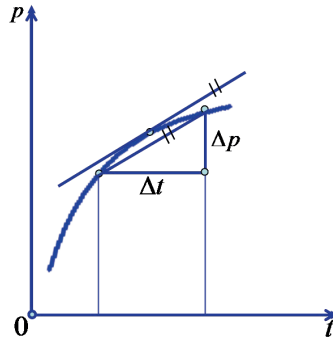


Seja a massa m se deslocando com velocidade \vec{v} , chamamos quantidade de movimento ao produto de m por \vec{v} .

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Originalmente, Newton descreveu a 2ª Lei utilizando o conceito da quantidade de movimento [ver Anexo 9, Equação (2) sob título 2ª Lei e Gravitação Universal].

Quando uma força age sobre um corpo, esta provoca a variação da sua quantidade de movimento em relação ao tempo, na direção da força:



$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Se a massa for constante: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

mas a aceleração: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Logo: $\vec{F} = m\vec{a}$

4.3.1 Exemplo ilustrativo



Um projétil impelido pelos gases da pólvora (que fornece a força) está sujeito à aceleração \vec{a} (GAMOW; HALLIDAY, RESNICK).

4.4 PESO E MASSA

O peso de um corpo é a força gravitacional exercida sobre ele pela Terra. Exerce-se do corpo para o centro da Terra.

Nesse caso, a aceleração da gravidade $\vec{g} = \vec{a}$ e o peso $\vec{W} = \vec{F}$

$$\text{Logo: } \vec{W} = m\vec{g} \quad (1)^2$$

4.4.1 Exemplo ilustrativo

Se uma pessoa pesa 50kgf na superfície da Terra, quanto pesará na superfície da Lua?

Sabendo que a relação das acelerações gravitacionais entre a Lua e a Terra é: $\frac{g_l}{g_t} = 0,166$, o peso na superfície da Lua será: $50 \times 0,166 = 8,3\text{kgf}$ (HALLIDAY, RESNICK; ENC. BRITANNICA).

² Rigorosamente, deveríamos expressar a 2ª Lei na forma: $F = kma$, onde k é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades utilizado. Assim, no sistema MKSC, usamos massa m em quilograma massa, kgm , obtendo a força F em Newtons, N , e k sendo $k = 1$, como mencionado na Seção 4.2.

No sistema MKS técnico, apresentado no fim da Seção 2.1, utilizamos também a massa m em kgm , mas a força em quilograma força kgf , resultará em $k = \frac{kgf}{kgm} \times \frac{seg^2}{m}$, diferente de 1: $k = \frac{1}{9,81} kgf \cdot seg^2 / kgm \cdot m$.

De modo semelhante, no sistema gaussiano cgs, usamos a massa m em grama g , obtendo a força em dinas, que resultará em $k = 1$, e a fórmula resulta em $F = ma$, a expressão preferida pelos físicos.

Vale observar que no sistema MKS técnico, o valor da força em kgf é igual ao valor da massa em kgm , considerando o valor da aceleração da gravidade $g = 9,81\text{m/s}^2$ ao nível do mar, e 40° de latitude, valor padrão, pois g varia com a altitude e a latitude.

4.5 TERCEIRA LEI: AÇÃO E REAÇÃO

A toda ação corresponde uma reação igual e de sentido contrário.

Se o corpo A exercer uma força sobre o corpo B , este exercerá sobre A uma força igual, mas de sentido oposto. Nota-se que as forças de ação e reação atuam sobre corpos diferentes.

4.5.1 Exemplo ilustrativo



Os gases resultantes da queima do combustível do foguete se deslocam para trás através de um ejetor com alta velocidade. Como resultado, o corpo do foguete é empurrado para frente (HALLIDAY-RESNICK; GAMOW).

4.6 INTERAÇÃO GRAVITACIONAL

Em 1665, Isaac Newton, então com 23 anos, mostrou que a gravitação que mantém a Lua em sua órbita é a mesma que faz uma maçã cair do galho de uma árvore.³ Ele concluiu que a Terra atrai tanto a maçã quanto a Lua, e também que: “Qualquer corpo no Universo atrai todos os outros”.

A partir disso, estabeleceu a Lei da Gravitação, que postula: a força gravitacional é diretamente proporcional às massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as massas.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (0)$$

G é a constante de gravitação universal. Ver anexo 9, como Newton a deduziu.

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

Observação

A ideia intuitiva de Newton é que as massas se atraem à distância, dando origem à fórmula da gravitação, semelhante à fórmula de cargas elétricas de sinais opostos que se atraem. Contudo, como será visto no segundo volume desta obra, a ideia de Einstein é que a massa deforma o espaço-tempo quadridimensional, fazendo que as massas em movimento próximas encurvem suas trajetórias.

Assim como a água descendo pela pia, como se o orifício atraísse essa água, isto é, imagine um objeto boiando na água e descendo pela pia, o objeto seria a massa atraída pelo orifício. Na verdade, o orifício

³ Publicada somente em 1687, intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Para uma compreensão de como Newton chegou à Lei da gravitação, ver Anexo 9.

seria uma singularidade matemática nessa analogia, não algo que atraísse a matéria, como imaginava Newton. Ou melhor, imagine um espaço bidimensional representado por uma folha elástica quadriculada, onde se deposita uma bola. A bola provoca uma depressão e as linhas inicialmente retas na proximidade da bola agora se tornam curvas. Se lançarmos uma bolinha de gude em torno da depressão obtemos uma trajetória semelhante à de um planeta em torno do Sol. Nessa interpretação, devida a Einstein, a gravidade é uma deformação na estrutura do espaço bidimensional.

Imagine-se que vivemos em um Universo tridimensional, distorcido localmente pela matéria em uma 4ª dimensão física, a qual não pode ser percebida diretamente. Quanto maior a massa local, maior a gravidade local e maior a distorção, até se obter, em casos extremos, um buraco sem fundo, também conhecido como buraco negro (SAGAN; WILL; EINSTEIN).

A Lei dos períodos de Kepler postula que o quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita [ver Anexo 9, Equação (10), dedução da 3ª lei de Kepler].

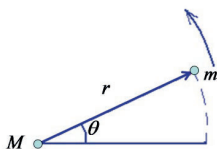
Semieixo maior da elipse a .



Consideremos uma órbita circular de raio r (o raio é equivalente ao semieixo maior).

$$\text{Aplicando } F = ma, \quad \frac{GM}{r^2} m = (m)(\omega^2 r) \quad \text{e} \quad g = a$$

$\omega^2 r$ é a aceleração centrípeta



Substituímos $\omega = 2\pi/T$ em que T é o período [ver Seção 2.1, “Movimento harmônico simples”, Equação (3c)].

Ver na Equação (3), Seção 4.7, uma forma mais exata sugerida por Newton.

$$\text{Encontramos: } T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (1)$$

$\frac{4\pi^2}{GM}$ é uma constante que depende só da massa do corpo central. Obtemos a lei dos períodos de Kepler.⁴

A equação vale também para órbitas elípticas, substituindo r por a [semieixo maior da elipse, a é proporcional a r , ver Dedução da 3ª Lei de Kepler no Anexo 9, Equação (10)].⁵

$$\frac{T^2}{a^3} \quad (1)$$

é a mesma para todas as órbitas planetárias (HALLIDAY, RESNICK, WALKER; ALONSO, FINN).

$T^2/a^3 \cong 3,0 \times 10^{-34} t^2/L^3$ sendo t em anos e L em m ,⁶ mais exatamente, devemos usar a massa reduzida para todas as órbitas planetárias. A propósito, convém consultar a Lei de Titius-Bode, no final do Anexo 9.

Newton testou a validade comparando a aceleração centrípeta da Lua a_c com a aceleração da gravidade⁷

$$g = 9,80 \frac{m}{s^2}$$

$$a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2 = \omega^2 r$$

Ver Capítulo 2, Equação (3a1).

$$r = 3,84 \times 10^8 m = 384000 km \quad e \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = 2,36 \times 10^6 s = 27d7h33 \text{ min} \cong 28d$$

$$a_c = 2,72 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Logo: } \frac{g}{a_c} = 3602 \cong (60)^2$$

Raio da Terra: $R = 6,37 \times 10^6 m = 6370 km$

$$\text{Temos: } \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{384}{6,37}\right)^2 \cong (60)^2$$

⁴ O quadrado do período é proporcional ao cubo do semieixo maior, obtida experimentalmente por observação astronômica.

⁵ A fórmula $P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} a^3$, é mais geral, por levar em conta a área da elipse. A fórmula: $P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$, adapta-se melhor quando a órbita é praticamente circular como a da Terra e a da Lua.

⁶ Semieixo maior: a em $10^{10} m$. Exemplo: para a Terra, $a = 15$, isto é, $15 \times 10^{10} m = 150.000.000 km$ (HALLIDAY, RESNICK, WALKER).

⁷ A ideia é que a gravitação terrestre é compensada pela aceleração centrífuga, e a Lua continua em órbita por inércia.

⁸ Recordemos: $g = \frac{F}{m} = -\frac{GM}{r^2}$. ∴ A gravitação ocasionada pela massa da Terra M é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o centro da Terra e o objeto atraído de massa m .

Logo: $\frac{g}{a_c} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ (2) dentro da precisão dos cálculos, as duas acelerações estão na proporção inversa dos quadrados das distâncias dos pontos ao centro da Terra. Não confundir com a gravidade da Lua, que é devida à sua massa, como já visto, 0,166 vezes menor (ALONSO, FINN).

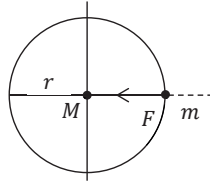
4.6.1 Por que a força gravitacional entre duas massas é proporcional ao quadrado da distância que os separa?

Com a apresentação da força gravitacional, deparamos com uma dúvida recorrente, conforme expresso no título desta subsecção. Com base no que foi visto anteriormente, vemos como Newton justificou simplificada e dependência entre massa e sua distância (uma prova rigorosa de Newton será fornecida no Anexo 9): assim como a maçã que cai do galho de uma árvore é atraída pela Terra, a Lua também é atraída pelo planeta, pensou ele.

Como a órbita da Lua é aproximadamente circular, e o círculo é um caso particular da elipse, Newton aplicou a 1ª Lei de Kepler, que postula que a órbita dos planetas é elíptica. Nesse caso, os dois focos coincidem com o centro. A força F , centrípeta, aponta para o centro do círculo.

Aplicando a fórmula da força centrípeta em um movimento circular:

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \text{e} \quad v = 2\pi r/T, \text{ em que } T \text{ é o período.}$$



Pela 3ª Lei de Kepler, para a órbita circular, temos que: o quadrado do período T é proporcional ao cubo do raio r : $T^2 = kr^3$.

$$\text{Portanto, } F = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{m}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{kr^3} \Rightarrow F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Provando, assim, que para satisfazer as Leis de Kepler, a interação gravitacional deve ser central e inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Newton testou a validade de sua hipótese, comparando a aceleração centrípeta da Lua com a aceleração da gravidade: $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

A ideia é que a gravitação terrestre na Lua é compensada pela aceleração centrífuga do movimento circular da Lua, e esta continua em órbita por inércia e pela ausência de atmosfera no vácuo espacial, portanto, sem atrito.

$$\text{Aceleração centrípeta da Lua é } a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$$

$$\text{Raio da órbita lunar: } r = 3,84 \times 10^8 \text{ m} = 384000 \text{ km e } T = 2,36 \times 10^6 \text{ s} \cong 28 \text{ d}$$

$$\text{Portanto: } a_c = 2,72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

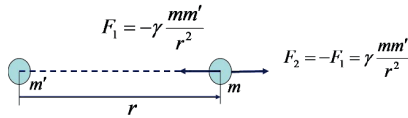
$$\text{Logo: } g/a_c = 9,8 / (2,72 \times 10^{-3}) = 3603 \cong (60)^2$$

Mas como o raio da Terra é: $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m} = 6370 \text{ km}$

$$\text{Teremos: } \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{384}{6,37}\right)^2 \cong (60)^2$$

Consequentemente, $g/a_c = (r/R)^2$ e, dentro da precisão dos cálculos simplificados, as duas acelerações estão na proporção inversa dos quadrados das distâncias dos pontos ao centro da Terra (ALONSO, FINN).

4.7 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL



$$W = \int_{r_1}^{r_2} F_2 dr = \gamma m m' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Trabalho como variação da energia potencial entre as posições r_1 e r_2 .

Trabalho realizado para afastar m de m' :

Trabalho realizado é igual ao aumento da energia potencial:

$$W = E_{p_2} - E_{p_1} = \gamma m m' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

Como referência, tomamos $r_1 = \infty$, pois $E_{p_1} = 0$

$$E_{p_2} - 0 = \gamma m m' \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ A energia potencial no } \infty \text{ é nula.}$$

$$\text{Logo, desprezando o índice: } E_p = -\gamma \frac{mm'}{r} \quad (2)$$

(SEARS)

Energia total de um sistema de duas partículas que interagem gravitacionalmente:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{\gamma m m'}{r}, \text{ isto é, } E = E_k + E_p \quad (2a)$$

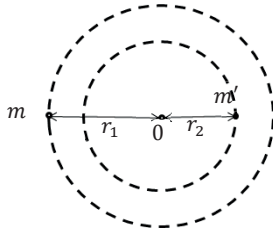
Referindo-se ao centro de massa do sistema, a energia cinética será em função da massa reduzida μ :

$$E_K = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad v_{12} : \text{velocidade relativa}$$

$$\text{Logo: } E = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 = \frac{\gamma m m'}{r_{12}}, \quad \text{em que } \mu = \frac{m m'}{m + m'} = m \frac{m'}{m + m'} \quad (3)$$

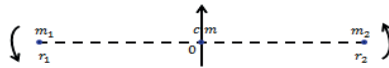
massa reduzida⁹ (ver a Subseção 4.7.1 “Observações sobre massa reduzida”).

Observe a Figura a seguir, e também outro exemplo no final do Anexo 9. Consulte também Landau em Mecânica (1966) relatando ser sugestão de Newton.



O centro de massa $r_{12} = r_1 + r_2$

4.7.1 Observações sobre massa reduzida



Energia cinética do conjunto $m_1 m_2$. Sendo cm: centro de massa.

$$E_K = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2}, \text{ sendo } \dot{r}_1 = \frac{dr_1}{dt} = v_1 \text{ e } \dot{r}_2 = \frac{dr_2}{dt} = v_2.$$

Seja $r = r_1 - r_2$, distância entre os dois pontos.

Coloquemos a origem das coordenadas no centro de massa.

$$\text{Teremos: } m_1 r_1 + m_2 r_2 = (m_1 + m_2) r_{cm} \quad (0)$$

⁹ Conforme a *Scientific American*, dividindo por m' : $\mu = m \frac{1}{1+m'/m}$, quando $m' \gg m$, $\frac{1}{1+m'/m} \rightarrow 1$, por isso na fórmula da Equação 1, da Seção 4.6 utilizamos M , pois $M \gg m$ e $\mu \rightarrow m$. Logo, da Equação (1): $T^2/a^3 = \frac{4\pi^2}{GM} \frac{1}{1+m'/M}$ fazendo $m' = M$. (4)

Pois: $r_{cm} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$, que é a média ponderada entre r_1 e r_2 , tomando as massas como pesos, nesse caso $r_{cm} = 0$, onde r_{cm} é a distância do centro de massa.

Obtemos: $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ (2a)

e $r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r$ (2b)

Colocando a origem das coordenadas respectivamente em r_2 e depois em r_1 .

Substituindo em E_k : $E_k = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{r}^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{r}^2$

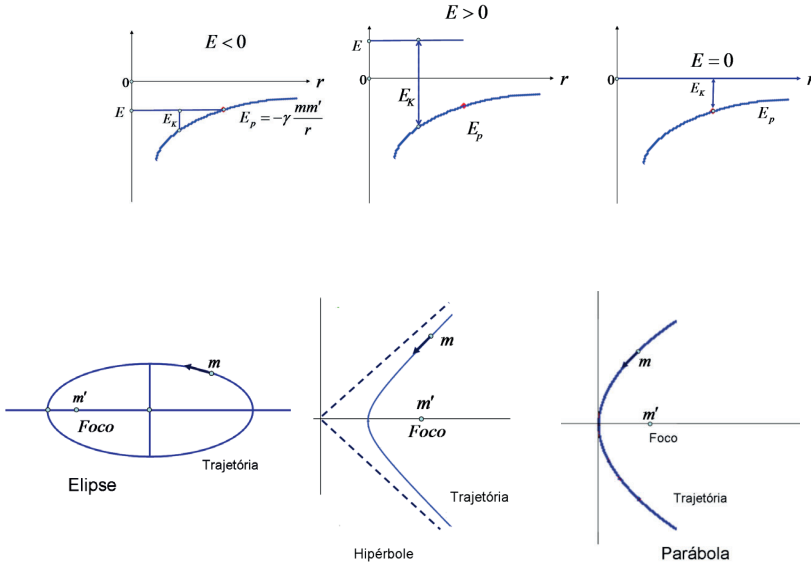
Fazendo: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, teremos: $E_k = \frac{1}{2} \left[\left(\mu \frac{m_2 + m_1}{m_1 + m_2} \right) \right] \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$ (*)

Chamamos μ de massa reduzida (LANDAU; ALONSO, FINN).

Quando m' for muito maior que m ($m' \gg m$) teremos $\mu \equiv m$ e m' praticamente coincide com o centro da massa [ver Seção 4.7, Equação (4)] e:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m'}{r}, \text{ isto é, } E = E_k + E_p$$

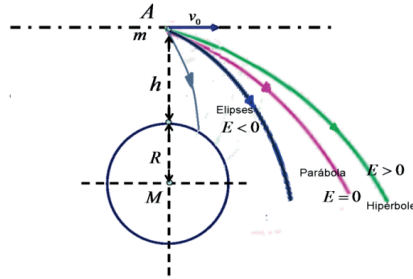
Teremos três casos:



(*) $E_k = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)}}_{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \dot{r}^2$

Como exemplos dessas trajetórias, podemos citar:

- Elíptica: órbitas planetárias, de cometas e satélites, excetuando as ressalvas indicadas no Anexo 9, e também as do elétron, excetuando as ressalvas indicadas pela Mecânica Quântica.
- Hiperbólica: a luz ao ser defletida quando passa próximo a uma estrela, como o Sol. Isso será mais bem visto no segundo volume desta obra.



Seja um satélite a uma altura h da superfície da Terra.

$$\text{Energia total: } E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{R+h}$$

Como elipse, pode cair sobre a Terra ou orbitar em torno dela (conforme a Energia cinética). O mesmo pode ser aplicado a um satélite natural como a Lua (ALONSO, FINN).

4.8 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL, FUNÇÃO DAS COORDENADAS DAS PARTÍCULAS

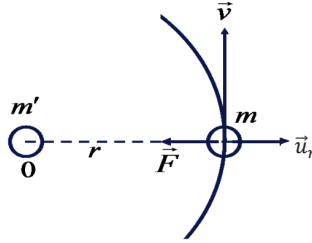
$$\text{Força } \vec{F} \text{ agindo sobre } m \text{ sob a ação de } m': \vec{F} = -\frac{\gamma \cdot m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

A origem do sistema está no centro de m' . Como \vec{F} está em direção oposta ao vetor unitário \vec{u}_r , seu sinal é negativo.

A força é igual ao gradiente da energia potencial com sinal trocado:

$$\vec{F}_r = -\text{grad } E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r \quad (0)$$

$$F_r = -\gamma \cdot m \cdot m' / r^2 \quad \therefore \frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\gamma \cdot m \cdot m'}{r^2}$$



Ao integrar e dar valor 0 para energia potencial a uma distância muito grande ($r = \infty$), obtemos:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \gamma \cdot m \cdot m' \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

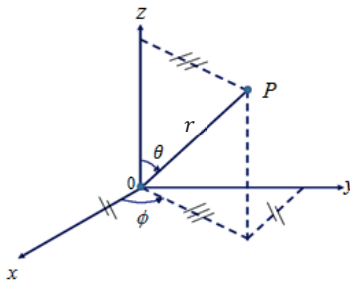
Resulta em energia potencial gravitacional do sistema composto pelas massas m e m' :

$$E_p = -\frac{\gamma \cdot m \cdot m'}{r} \quad (1)$$

Para um sistema de mais de duas partículas interagindo gravitacionalmente, teremos:

$$E_p = -\sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{os pares}}} \frac{\gamma \cdot m_i \cdot m_j}{r_{ij}}$$

Conclui-se que a energia potencial é função das coordenadas das partículas, supondo um sistema de coordenadas esféricas: raio vetor r , ângulo com eixo x , ϕ e ângulo com eixo z , θ (ver a Figura a seguir; ALONSO, FINN; BORISENKO; COURANT).



Como na Mecânica Clássica, a interação de partículas materiais é feita pela energia potencial de interação, que é função das coordenadas dessas partículas.

Pode-se ver que essa descrição implica a instantaneidade das interações, que, aliás, era a crença de Newton.¹⁰

As forças que as outras partículas exercem sobre uma partícula dada dependem, em cada instante, nessa descrição, somente da posição dessa partícula.

A variação da posição de qualquer partícula se reflete no mesmo instante sobre as outras partículas.

Será visto no Capítulo 7 que, de acordo com a relatividade einsteiniana, o tempo não é absoluto (ver Seção 7.1) e a propagação da interação não é instantânea, mas se propaga com a velocidade da luz no vácuo (ver Seção 7.12; ALONSO, FINN; LANDAU, na Introdução, parágrafo assinalado com 1).

¹⁰ Na verdade, Newton não associava a interação gravitacional com a propagação da luz, como fazemos na atualidade.

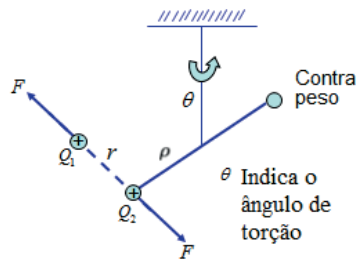
5

CAPÍTULO

INTERAÇÃO ELÉTRICA E MAGNÉTICA

5.1 LEI DE COULOMB

Em 1785, Coulomb (1736-1806) mediu o valor das forças elétricas de atração e repulsão, obtendo a lei que as descreve. Usou uma balança de torção parecida com a de Cavendish, posteriormente utilizada na medida da atração gravitacional.



Em seguida, obteve uma equação semelhante à de Newton para a interação gravitacional:

$$F = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$\epsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2 \quad ^1$$

C = Coulomb, unidade de carga elétrica

Q_1 e Q_2 cargas elétricas

A força entre duas cargas Q_1 e Q_2 é diretamente proporcional às cargas elétricas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre as duas. Quando Q_1 e Q_2 têm mesmo sinal, haverá repulsão; quando têm sinais contrários, atração.

Calibra-se o aparelho com uma força conhecida (p. ex., um peso) que causará uma deflexão θ . As outras forças ocasionarão deflexões proporcionais. Variando-se as cargas e a distância entre elas, obtemos forças diferentes. Adiante, veremos um exemplo de como avaliar a viabilidade.

Dessa forma:

Distâncias, ângulo de torção	36°	18°	9°
Forças, ângulo de torção	36°	144° = 36° × 4	576° = 36° × 16

Quando a distância se torna duas, depois quatro vezes menor, a força se torna quatro e, em seguida, 16 vezes maior, o que verifica a lei, pois as forças são inversamente proporcionais aos quadrados dos ângulos de torção e, portanto, aos quadrados das distâncias.²

Sendo θ o ângulo, $C\theta$ o momento proporcional ao ângulo de torção θ , $C\theta$ o par de torção, C constante de torção que depende do comprimento ℓ , diâmetro d e da natureza do fio.

Coulomb estabeleceu a lei da torção: $C = k \frac{d^4}{\ell}$

¹ Constante dielétrica ou de permissividade, ver Seção 5.10. Fazendo: $F = K_e Q_1 Q_2 / r^2$. Atribuindo a K_e um valor conveniente: $K_e = 10^{-7} c^2 = 8,9874 \times 10^9$, c = velocidade da luz no vácuo. $\therefore K_e \cong 9 \times 10^9$. Logo $K_e = 1 / 4\pi\epsilon_0$ e resulta $\epsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$. Definição de Coulomb: é a carga que, quando colocada no vácuo, a um metro de uma carga igual, repele-a com uma força de $8,9874 \times 10^9 \text{ N}$. A conveniência desse valor é que $c^2 = 1 / \epsilon_0 \mu_0$, sendo μ_0 a constante de permeabilidade, como será visto nas Seções 5.16, 5.23 e 5.24.

² O ângulo θ é proporcional ao arco $\theta\rho$, onde ρ = raio (distância ao centro de rotação), logo $\theta\rho$ é uma distância (ver figura da Seção 5.1, página inicial).

k é o coeficiente que depende da natureza do fio (ver Capítulo 3, “Elasticidade”; ALONSO, FINN, LEMOINE, GUYOT).

Leis como a da interação gravitacional e a de Coulomb, que variam com o inverso do quadrado da distância, são denominadas de leis do inverso do quadrado (RAINICH).

Se igualarmos as forças gravitacionais e elétricas: $G \frac{m_1 m_2}{r^2} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ (1)

E multiplicarmos essas forças por r , obtemos o trabalho $W = F \cdot r$, que é uma forma de energia.

Usando unidades gaussianas cgs, sabemos que $K_e = 10^{-7} c^2$ (ver Seção 5.1).³

Valor de $K_e = 1 \text{ d. cm}^2 / \text{statc}^2$ [ver observação na subseção 5.1.2 Equação (1)]

Valor de $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N. m}^2 / \text{kg}^2$, em unidades cgs:

Referência: LANDAU

$$G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ d. cm}^2 / \text{g}^2$$

Há, portanto, uma semelhança formal entre as duas formas de energia. Isso não é fortuito, pois como veremos na Seção 7.7, Equação (1), existe uma relação entre massa e energia, como deduzido na famosa fórmula de Einstein: $E_k = c^2 \Delta m$, em que a velocidade da luz no vácuo, c , tem um importante significado.

Isso explica porque o *deficit* de massa⁴ resultante das reações atômicas se converte em energia, que é aproveitada nos reatores nucleares e nas bombas atômicas. Também explica de onde as estrelas obtêm energia, convertendo H em He, e, como explicado pelo ciclo de Bethe, as estrelas geram os elementos leves: C, N e O (GAMOW).

De modo semelhante, as estrelas geram os elementos até o Fe. E os mais pesados que o Fe são gerados quando as estrelas morrem nas explosões estelares denominadas novas e supernovas, tão espetaculares que sua luminosidade supera a de uma galáxia inteira. Concluímos então, que “somos formados do pó das estrelas extintas”.

Observando-se a Equação (1), deduzimos haver uma relação entre carga e massa Q/m . De fato, é possível verificar pelas experiências realizadas por J. J. Thomson, em 1897, no Exemplo ilustrativo da Seção 7.4, sobre a descoberta do elétron, em que ele mediu a relação entre a carga do elétron e sua massa $m: e/m$. Podemos afirmar que a carga do elétron é realmente o *quantum* das cargas elétricas, isto é, a menor carga elétrica possível, e toda carga elétrica é um múltiplo dessa carga.

³ $K_e = 10^{-7} c^2 = 8,9874 \times 10^9$, em unidades MKS, em unidades cgs, o valor dado a seguir: $K_e = 1 \text{ d. cm}^2 / \text{statc}^2$.

⁴ Isto é, o que falta no resultado final com relação às massas iniciais. Observe que Δm é a variação da massa, ou seja, a massa faltante. Podemos, então, pensar que a massa seria uma forma de energia condensada e, conseqüentemente, a massa faltante Δm seria liberada como energia cinética E_k durante a reação nuclear.

Thomson mediu: $e/m = 1,7 \times 10^{11} \text{ C/kg}$, em excelente concordância com o valor atual: $1,75890 \times 10^{11} \text{ C/kg}$, ou, no sistema cgs, Thomson teria encontrado: $e/m = 5,1 \times 10^{17} \text{ statc/g}$, pois $1 \text{ C} = 2,99592 \times 10^9 \text{ statc} \cong 3 \times 10^9 \text{ statc}$.

A experiência de J.J. Thomson foi realizada com tubo de raios catódicos, conforme apresentado na Seção 7.4, Exemplo ilustrativo, sobre a descoberta do elétron.

O valor obtido é cerca de 1.800 vezes maior que o valor conseguido com íons de H na eletrólise (com maior exatidão 1836,15; HALLIDAY, RESNICK, WALKER). Ver final da Seção 7.5, sobre as experiências levadas a efeito por Faraday em 1833:

$$e/m_H = 95721 \text{ C/atg} = 2,8716 \times 10^{14} \text{ statc/g (deve-se levar em conta que } 1 \text{ atg H} = 1,008 \text{ g).}^*$$

Como o valor encontrado por Thomson era independente do material usado no cátodo e do gás usado no tubo de raios catódicos,⁵ ele assumiu que as partículas dos raios catódicos teriam massa cerca de 1.800 vezes menor que a do íon H, então supôs que a massa da partícula seria cerca de $1/1800$ a do íon H. Considerou que as partículas fossem uma nova espécie de “corpúsculo negativo”, o qual, por sugestão de Stoney em 1874 (ver Anexo 11, “Da importância de alguém que andou meio esquecido”), chamamos hoje de elétron. Stoney previra sua existência como a “unidade natural de eletricidade”, ou seja, a quantidade de eletricidade que deve passar através da solução a fim de liberar, em um dos eletrodos, um átomo de H ou um átomo de qualquer substância univalente.

Em 1873, Maxwell, investigando a determinação da velocidade da luz no vácuo, em função da constante eletrostática e eletrodinâmica: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ [Seção 5.23, Equação (5)], previu a existência das ondas eletromagnéticas com as equações: $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ [Seção 5.23, Equações (4) e (6)], a partir da qual se deduz que $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, confirmando a equação apresentada, por sua vez, deduzida por Kohlrausch e Weber em 1832.

Hertz, em 1888, verificou a existência das ondas eletromagnéticas com seu oscilador.

$$\text{O valor de } \epsilon_0 \text{ foi estabelecido como: } \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N.m}^2)$$

Podemos verificar que a força elétrica se torna $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}$, e, substituindo pelo valor acima, temos: $F = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi c^2}{10^7} \frac{QQ'}{r^2}$, como: $F = K_e \frac{QQ'}{r^2}$, obtemos: $K_e = 10^{-7} c^2 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$ em unidades MKS, como visto inicialmente, portanto, em função da velocidade da luz no vácuo c .

Posteriormente, Bucherer, em 1909, testou a relatividade da massa medindo e/m em função de v , conforme relatado no início da Seção 7.5.

Levando em consideração que $v = E/B$,⁶ obteve:

⁵ Materiais usados no cátodo: Al, Fe e Pt. Gases usados: Ar, H₂ e CO₂.

⁶ Em que v é a velocidade dos elétrons no feixe eletrônico da experiência de Thomson no tubo de raios catódicos.

$$\frac{e}{m} = \frac{e}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \text{ ver a relação } Q/m_0, \text{ a seguir.}$$

Da relatividade, sabemos que a massa de repouso m_0 , a carga e e a velocidade c são constantes, logo, a relação e/m e, portanto Q/m , pois Q é múltiplo de e , é função da velocidade da luz no vácuo c , justificando a utilização de $K_e = 10^{-7} c^2$, como visto no início (KAPLAN, SEARS, HALLIDAY, RESNICK).

Para generalizar, aplica-se a fórmula da força eletromagnética de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, como visto no final da Seção 7.4, obtendo: $\frac{Q}{m_0} = \frac{1}{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}} \left[\frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) \right]$, em que: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ e $\beta = \frac{v}{c}$.

Mais uma vez, observamos que c desempenha seu papel.

A seguir, será relatado como as ideias evoluíram.

Expressando a lei de Coulomb como $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$,⁷ no sistema de unidades MKSC (Seção 5.1), em que 4π aparece considerando a carga Q_1 no centro de um espaço em que sua influência é exercida sobre a carga Q_2 , situada a uma distancia r sobre uma superfície esférica com ângulo sólido total de 4π esferorradianos [Seção 5.10, Equação (1)], o índice 0 da constante dielétrica ϵ_0 indica seu valor no vácuo (Seção 5.1).

Até então, trabalhamos somente com cargas em repouso, ao que damos o nome de Eletrostática.

Ao pesquisar a corrente em condutores, denominada Eletrodinâmica, verificou-se que ela causa um campo magnético em torno do condutor. Esse campo foi definido experimentalmente como: $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i$. Veremos na Seção 5.16, Equação (1), que a circulação magnética resulta em:

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

Chamada de lei de Ampère, originando a constante de permeabilidade μ_0 (ver início da Seção 5.16 e final da Seção 5.23, sobre a velocidade da luz no vácuo).

Por outro lado, Faraday, em 1831, chegou à lei da indução: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_B}{dt}$, ou seja, um campo magnético variável, com o tempo, produz um campo elétrico (*i.e.*, uma corrente) em um condutor (final da Seção 5.14).

Em 1832, Kohlrausch e Weber determinaram a relação da constante eletrostática e eletrodinâmica, encontrando: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \times \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8,9 \times 10^{-12})}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, isto é, a velocidade da luz no vácuo.

⁷ Medida pela primeira vez em 1785 por Coulomb. Mostrou que seguia uma lei da forma: $F \propto \frac{1}{r^2}$, em que α significa proporcional. Na época, não havia um conceito preciso sobre carga. Trabalhos posteriores indicaram a influência das cargas: $F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2} e$, finalmente, chegou-se à equação mencionada.

Maxwell, tomando conhecimento dessa relação, investigou teoricamente, resultando em seu *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, publicado em 1873.

Considerando que a luz se propagando no vácuo, isto é, sem cargas livres nem corrente, ele deduziu as equações:

$$\text{Lei de Faraday-Henry } \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{e a lei de Ampère-Maxwell } -\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3)$$

Ver Seção 5.23, Equações (1) e (3).

Derivando (2) em relação a x e (3) em relação a t , obtemos: $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$ e $-\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Combinando as duas, teremos: $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, precisamente a equação diferencial de segunda ordem de uma onda: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.

[Seção 5.23, Equação (2); ver também Anexo 6, Equações (0) e (1), Resolução da Equação da Onda de Schrödinger, e em outras palavras].

Por onde se deduz que a velocidade: $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \times \mu_0}} = c$, confirmando a equação obtida por Kohlrausch e Weber, como já mencionado.

$$\text{De modo semelhante também se obtém: } \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Maxwell concluiu que a luz são ondas elétricas e magnéticas se propagando no vácuo na velocidade da luz c . Previu, então, a existência das ondas eletromagnéticas [Seção 5.23, Equações (4), (5), (6) e (7)], cuja existência seria confirmada por Hertz em 1888, com seu oscilador. Por isso, essas ondas ficaram conhecidas como ondas hertzianas. A partir de então, a ótica se tornou parte do estudo do eletromagnetismo. Posteriormente, descobriram-se novos campos para essas ondas, com frequências diferentes da luz: infravermelho, ultravioleta, raios X, ondas de rádio etc. O raio X comprovou ser eficiente no diagnóstico médico, e as ondas de rádio, na telecomunicação telegráfica, radiocomunicação, TV etc. Vale mencionar a descoberta posterior da radiação γ , resultante da desintegração atômica (ALONSO, FINN).⁸

O problema da radiação térmica foi resolvido por Planck em 1901, com uma hipótese revolucionária. Ele postulou que a energia da radiação, em vez de utilizar valores de zero ao infinito, tomam valores de 0 a $n\epsilon_0$, sendo n valores inteiros e ϵ_0 o denominado *quantum*, e no plural, *quanta*, daí o conceito de “quantização da energia”.⁹ Porém, ainda se considerava, conforme Maxwell, a radiação térmica, parte das oscilações eletromagnéticas, como um fenômeno ondulatório.

⁸ Também vale ressaltar o surgimento de um campo novo: a Radioastronomia.

⁹ Trata-se do início da Mecânica Quântica, embora Planck não tivesse consciência disso.

Somente em 1905, Einstein, ao publicar três artigos,¹⁰ um deles sobre o efeito fotoelétrico, aplicou o conceito de Planck para explicar como a radiação ultravioleta, ao incidir sobre uma placa metálica, libera elétrons que podem ser detectados na forma de corrente elétrica. Ele explicou que a radiação é formada de partículas, os *quanta* da energia, denominando-as de “fótons”.

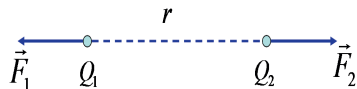
Isso seria confirmado por Compton, em sua experiência denominada efeito Compton, de 1928, na qual demonstrou que os fótons de raios X incidem sobre elétrons livres e, assim como bolas de bilhar, provocam a transferência da quantidade de movimento, deslocando os elétrons e sendo desviados por eles, como partículas.

Einstein chegou à conclusão que a radiação eletromagnética tem natureza dualística, comportando-se como onda sob certas circunstâncias, e como partículas ou fótons sob outras.

Todavia, em 1905, a existência do átomo ainda era posta em dúvida (MACH). Em 1916, Einstein publica artigo sobre a Relatividade geral e, em 1921, recebe o Prêmio Nobel pela explicação do efeito fotoelétrico. Contudo, as ideias sobre Relatividade demorariam a ser aceitas e somente o foram graças aos esforços de Sir Arthur Eddington, Schwarzschild (curvatura da luz sob efeito gravitacional e buracos negros), Otto Hahn e Lise Meitner (em 1938, fissão do Urânio), Oppenheimer e muitos outros.

5.1.1 Exemplo ilustrativo

Para avaliar melhor a viabilidade da utilização da balança de torção, vejamos um exemplo:



Sejam duas cargas: $Q_1 = -1,0 \times 10^{-6} \text{ C}$ e $Q_2 = -3,0 \times 10^{-6} \text{ C}$, distantes entre si de $r = 15 \text{ cm}$.

Qual é a força que atua nas cargas Q_1 e Q_2 ?

Como as cargas têm sinal igual, as forças F_1 e F_2 serão de repulsão:

$$F_1 = -F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{(8,9874 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) (1,0 \times 10^{-6} \text{ C}) (3,0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1,5 \times 10^{-1} \text{ m})^2} =$$

$$= 1,198 \text{ N} = \frac{1,198 \text{ N}}{9,81 \text{ N/kgf}} = 0,122 \text{ kgf} = 122 \text{ gf}$$

Resolvendo no sistema gaussiano:

¹⁰ Os outros dois eram: “Movimento browniano”, em que se comprovava a existência do átomo, e “Teoria da relatividade especial ou restrita”, nos *Annalen der Physik*.

$$Q_1 = -1,0 \times 10^{-6} C = -1,0 \times 10^{-6} \times 2,99592 \times 10^9 \text{ statcoulomb} = -2,99592 \times 10^3 \text{ statc}$$

$$Q_2 = -3,0 \times 10^{-6} C \times 2,99592 = -8,98776 \text{ statc}$$

$$F_1 = -F_2 = \frac{(2,99592 \times 10^3 \text{ statc})(8,98776 \times 10^3 \text{ statc})}{(1,5 \times 10 \text{ cm})^2} = 11,96738 \times 10^4 = 119673,8 \text{ dinas} =$$

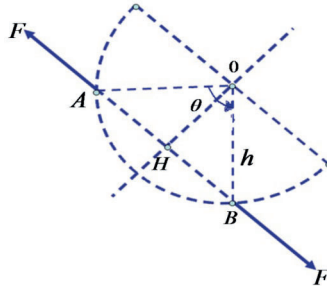
$$= \frac{119673,8}{981} = 122 \text{ gf}$$

É possível trabalhar com cargas da ordem de *statc*, ou unidades eletrostáticas, *ues*, distâncias em *cm*, e forças da ordem de centenas de *gf*. As cargas em Coulomb *C* seriam grandes demais.

5.1.2 Observação

Pode-se observar que ao usar o sistema gaussiano, na fórmula da lei de Coulomb:

$$F = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad K_e = 1 d \cdot \text{cm}^2 / \text{statc}^2 \quad (1)$$



$OH = h \cos \frac{\theta}{2}$, momento em relação ao eixo de rotação de força elétrica F :

$F \times OH = Fh \cos \frac{\theta}{2}$, equação de equilíbrio:

$$Fh \cos \frac{\theta}{2} = C\theta \quad \therefore F = \frac{C\theta}{h \cos \frac{\theta}{2}}, \text{ }^{11} \text{ por exemplo:}$$

¹¹ Ver Capítulo 3, "Elasticidade", sobre o momento de torção ou conjugada, $C = k \frac{d^4}{e}$, k nas mesmas unidades que o módulo de rigidez G , $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$.

Suponha $\theta = 1rad$ e $h = 15,64cm$

$\cos 0,5rad = 0,87758$, comprimento do fio de torção $\ell = 50cm$, diâmetro do fio

$$d = 2,17mm = 2,17 \times 10^{-1}cm .$$

Então: $F = k \frac{d^4}{\ell} \frac{\theta}{h \cos \frac{\theta}{2}}$. Para fio de prata, tem-se em unidades gaussianas $k = 2,7 \times 10^{10}$, kgf/cm²,

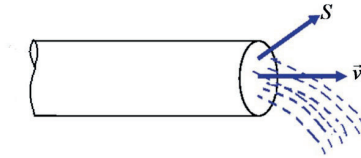
$$OH = h \cos \frac{\theta}{2} = 11,395 \times 0,87758 = 10cm$$

$$\therefore F = 2,7 \times 10^{10} \times \frac{2,17 \times 10^{-4}}{50} \times \frac{1}{10} = 119.674 \text{ dinas} \qquad AB = 2h \text{sen} \frac{\theta}{2} = 15cm$$

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = 0,47943$$

5.2 FLUXO DE UM LÍQUIDO

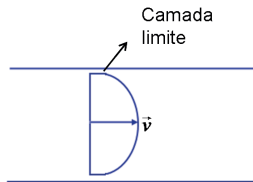
A noção de fluxo deriva do escoamento de um líquido pela secção de um tubo ou canal.



Supondo a velocidade \vec{v} constante na secção S , a vazão, ou fluxo, do líquido será:

$$\phi = v S \text{ cm/s} \times \text{cm}^2 \Rightarrow \text{cm}^3/\text{s} .$$

Na prática, todo líquido é viscoso, o que provoca atrito interno no escoamento. As partículas que fluem por S não têm a mesma velocidade, sendo nulas nas margens e aumentando até atingir um máximo no eixo da tubulação.



Como \vec{v} varia na secção, teremos um fluxo elementar: $d\phi = v dS$, em um elemento de área dS da área total S .

$$\text{Integrando por toda secção: } \phi = \iint_S \gamma dS$$

Referência: Maurer, J. M. Azevedo Netto

5.3 GRANDEZAS ESCALARES, VETORIAIS E TENSORIAIS: CAMPOS

Grandezas escalares são as que necessitam somente da especificação da magnitude e do sinal, e podem ser positivas, negativas ou nulas. Exemplos: temperatura, volume, massa, carga elétrica etc. Além da magnitude, as grandezas vetoriais necessitam da especificação direcional, por exemplo, velocidade, momento, força etc.

O tensor é uma generalização dos conceitos de escalar e vetor. Dessa forma, eles são casos especiais. O escalar é um tensor de ordem zero, e o vetor, de primeira ordem. O tensor é uma entidade que, com a mudança do sistema de coordenadas (por translação e/ou rotação), sofre mudança de suas componentes, porém, a grandeza em si é invariante.

Um tensor de segunda ordem também é chamado de diádica. Exemplos de tensor de segunda ordem são a tensão e a deformação. Um tensor de terceira ordem é chamado de triádica. Se for de ordem n , será uma poliádica. As leis físicas, para serem válidas, devem ser independentes do sistema de coordenadas para exprimi-las matematicamente.

Conforme a grandeza considerada, podemos expressá-la em um espaço tridimensional (x, y, z) , tetradimensional (x, y, z, t) ou, generalizando, m dimensional.

Um “campo” é uma distribuição contínua de quantidades escalares, vetoriais ou tensoriais, descritas por funções contínuas de coordenadas espaciais e do tempo. Por exemplo, a temperatura em todos os pontos de um corpo, em qualquer instante, pode ser descrita pelo campo escalar $T(x, y, z, t)$.

Um campo vetorial, como o da velocidade, pode ser designado por $\vec{v}(x, y, z, t)$. Isso significa que $\vec{v} = f(x, y, z, t)$, é uma função das variáveis x, y, z, t . Na verdade cada uma de suas componentes são funções de cada uma das coordenadas, respectivamente, x, y, z e t . Uma diádica tridimensional tem $3^2 = 9$ componentes, e uma diádica tetradimensional, $4^2 = 16$ componentes.

Observação

Embora o quociente entre dois vetores não possa ser definido satisfatoriamente, os tensores surgem fisicamente em circunstâncias que os fazem parecer com uma divisão. Por exemplo, tensão é força por unidade de área. Considerando o vetor \vec{A} de grandeza igual à área, e na direção normal à área, podemos afirmar:

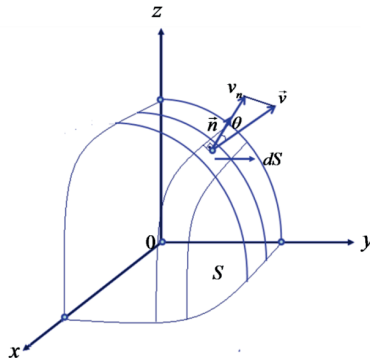
$$\vec{F} = \vec{A} \cdot \vec{T} = A_i \vec{e}_i \cdot T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k = \delta_{ij} A_i T_{jk} \vec{e}_k = A_i T_{ik} \vec{e}_k = F_k \vec{e}_k, \text{ em que } \vec{T} \text{ é a tensão.}$$

$\therefore T_{ik} = \frac{F_k}{A_i}$, vemos que obedece à regra do quociente.¹²

No segundo volume, quando tratarmos da Relatividade Geral, veremos que o tensor curvatura, de quarta ordem, também satisfaz essas circunstâncias, obedecendo à regra do quociente. Também é importante salientar que um tensor de segunda ordem está associado com duas direções, e não uma, como o vetor, ou nenhuma, como o escalar. Assim, quando dois índices forem iguais, a tensão será compressão e quando forem diferentes, cisalhamento, tratando-se da diádica de tensões (ARIS, ARFKEN, WEBER).

5.4 FLUXO DE UM VETOR

Generalizamos o conceito de fluxo de um líquido para o fluxo de um vetor considerando uma grandeza vetorial \vec{v} passando por uma secção S e calculando seu fluxo.



Fluxo elementar $d\phi$ em dS : sendo v_n componente de \vec{v} na direção do vetor unitário \vec{n} , normal à secção dS , teremos: $d\phi = v_n dS = v \cos\theta dS$.

$$d\phi = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

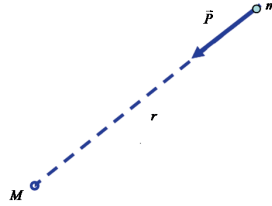
\vec{n} é o vetor unitário normal à superfície dS

Integrando em toda secção S :

$$\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

5.5 CAMPO GRAVITACIONAL E CAMPO ELÉTRICO

¹² Em uma equação tensorial, os índices do lado esquerdo devem aparecer no lado direito, exceto quando repetidos, quando desaparecem, indicando formação de escalar e também quando existir produto escalar, em que há contração de índices. Estamos nos referindo aos índices das componentes e não dos vetores unitários.



Seja um corpo de massa M (como a Terra) que suporemos concentrada em seu centro. A uma distância r colocamos várias massas: m, m_1, m_2, m_3, \dots . Essas massas ficarão sujeitas, respectivamente, às forças $\vec{P}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots$ que chamaremos de peso. As relações entre peso e massa são constantes e iguais a \vec{g} , isto é, à aceleração da gravidade: $\frac{\vec{P}}{m} = \frac{\vec{P}_1}{m_1} = \frac{\vec{P}_2}{m_2} = \frac{\vec{P}_3}{m_3} = \vec{g} \quad \therefore \vec{P} = m\vec{g}$. 5.51.

Comparemos com a segunda lei de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, nesse caso: $\vec{F} = \vec{P}$ e $\vec{a} = \vec{g}$

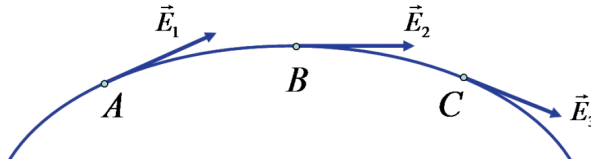
Pela lei da gravitação: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ e pela lei de Coulomb: $F = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, vemos semelhanças entre elas. São leis do inverso do quadrado da distância.

Logo, dada uma carga Q , ela produzirá um campo elétrico tal, que a uma distância r , se colocarmos várias cargas: q, q_1, q_2, q_3, \dots essas ficarão sujeitas, respectivamente, às forças $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$

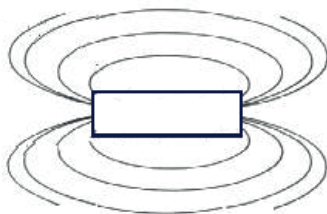
As relações entre força e carga são constantes e iguais a \vec{E} , “vetor campo elétrico”:
 $\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \vec{E}$ em N/C $\therefore \vec{F} = q\vec{E}$ (1)

5.6 LINHAS DE FORÇA

Uma linha de força é aquela em que cada ponto é tangente ao vetor campo nesse ponto.



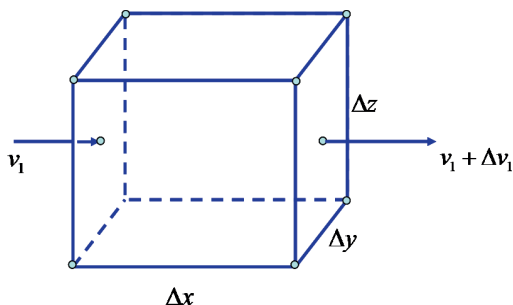
Portanto, indica a direção da força que surge em cada ponto quando se coloca uma massa ou uma carga nesse ponto (para campo gravitacional ou campo elétrico). Michael Faraday (1791-1867) iniciou sua utilização.



Podemos obter a visualização das linhas de força se colocarmos um cartão sobre uma barra imantada e, por cima do cartão, espalharmos limalha de ferro. Obteremos o que se chama de “espectro magnético”.

As partículas de limalha se transformam em pequenos ímãs, os quais se orientam conforme as linhas de força do campo magnético. As linhas de força nunca se cruzam.

5.7 VARIAÇÃO DO FLUXO DO VETOR: DIVERGÊNCIA



Seja um paralelepípedo elementar de lados $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Na face $\Delta y, \Delta z$ entra um fluxo ϕ_1 com velocidade v_1 , e na face oposta, sai: $\phi_1 + \Delta\phi_1$ com velocidade $v_1 + \Delta v_1$.

Variação do fluxo na direção x :

$$\Delta\phi_1 = \Delta v_1 \Delta y \Delta z, \Delta\phi_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\Delta v_1}{\Delta x} \Delta V$$

ΔV Volume elementar = $\Delta x \Delta y \Delta z$

Variação de fluxo total $\Delta\phi$ nas três direções x, y, z :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 = \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x} + \frac{\Delta v_2}{\Delta y} + \frac{\Delta v_3}{\Delta z} \right) \Delta V$$

Variação do fluxo por unidade de volume:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta V} = \frac{\Delta v_1}{\Delta x} + \frac{\Delta v_2}{\Delta y} + \frac{\Delta v_3}{\Delta z} \quad \text{Como:} \quad \Delta\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

(ver Seção 5.4).

Levando ao limite:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x} + \frac{\Delta v_2}{\Delta y} + \frac{\Delta v_3}{\Delta z} \right) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{d\phi}{dV} \quad (1)$$

Chamamos essa última expressão de divergência de \vec{v} :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \text{Em que: } \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad \text{ou}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{d\phi}{dV}^{13}$$

$$\text{Em que: } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

5.8 TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKY

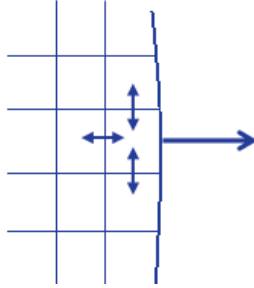
Transforma integral tripla em um volume V em uma integral dupla da superfície S que encerra V .

¹³ Recorde o produto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \vec{i} \cdot \vec{j}$, se $i = j$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos \alpha_{ij} = 1$, pois o ângulo α_{ij} entre \vec{i} e \vec{j} é nulo; se $\vec{i} \neq \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$,

pois $\alpha_{ij} = 90^\circ$.

Logo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$, pois $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ e $\vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$ como os termos da soma são escalares, o resultado da soma será um escalar.

$$\sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \vec{i} \cdot \vec{j}$$



O volume V é dividido em uma grande quantidade de paralelepípedos diferenciais. O fluxo em cada paralelepípedo será:

$$\sum_{6 \text{ superficies}} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

Assim como visto na secção anterior, pois $d\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$ é a variação elementar do fluxo.

O fluxo interno é compensado pelas faces contíguas dos paralelepípedos. Os termos $\vec{v} \cdot \vec{n} dS$ se cancelam aos pares. Contudo, o fluxo externo não é compensado.¹⁴

Logo, o fluxo total será composto pelas faces externas que não são compensadas por não serem contíguas a outros paralelepípedos.

$$\sum_{\text{sup } erf_externa} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \sum_{\text{volumes}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV \quad \text{Quando } n \rightarrow \infty \text{ ou } dS \text{ e } dV \rightarrow 0, \text{ teremos:}$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

, o círculo significa superfície fechada, conforme Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Do parágrafo anterior: $\frac{d\phi}{dV} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Rightarrow d\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$, integrando:

¹⁴ Supondo não haver fontes nem sumidouros. São consideradas singularidades. Nesse caso, teremos acréscimos ou decréscimos de fluxo interno que deverão ser considerados. No segundo volume, esclareceremos o significado de singularidade (ver curvatura do espaço segundo Einstein em Sagan e singularidade, conforme Hawking em *Uma breve história do tempo*). Para melhor compreensão das singularidades, ver a Seção 5.25, sobre a “distribuição da matéria”.

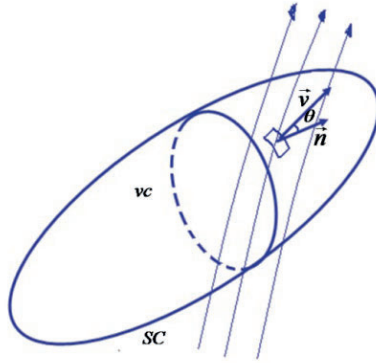
$$\Delta\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV,$$

concordando com a dedução mencionada anteriormente. Ou seja, o fluxo $\Delta\phi$ da função vetorial \vec{v} , através da superfície de controle SC , resulta na divergência dessa função no volume de controle VC , encerrado pela superfície de controle SC .

Observação

Há uma demonstração tensorial no assunto quando falarmos sobre o vetor de Poynting na Seção 5.26, Equação (5.10).

5.9 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE



Seja o volume de controle VC , envolvido pela superfície de controle SC . A variação em relação ao tempo da massa ou carga no VC será dada por: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$, em que $\rho = \frac{dm}{dV}$ ou $\frac{dq}{dV}$ (0)

Ou seja, massa ou carga por unidade de volume.

A variação é devida aos fluxos de entrada e saída da massa ou carga através da superfície de controle SC , que será calculada por: $\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$.¹⁵

¹⁵ Análise dimensional de fluxo: verifique Seção 5.4. $\vec{v} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \left(\frac{[L]}{[T]}\right) [L^2] = \frac{[L^3]}{[T]}$, que é vazão, isto é, volume na unidade de tempo. $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \left(\frac{[M]}{[L^3]}\right) \left(\frac{[L^3]}{[T]}\right) = \frac{[M]}{[T]}$, massa na unidade de tempo ou: $\left(\frac{[Q]}{[L^3]}\right) \left(\frac{[L^3]}{[T]}\right) = \frac{[Q]}{[T]}$ carga na unidade de tempo e $\frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) \Rightarrow \rho dV = dm$ ou $dq \therefore$ massa ou carga na unidade de tempo, ou seja, corrente i , como será visto na Seção 5.16.

O círculo significa que é calculado na superfície fechada.

Nota-se que o fluxo de saída é positivo, pois $\theta < 90^\circ$ e $\cos\theta > 0$. O fluxo de entrada é negativo, pois $\theta > 90^\circ$ e $\cos\theta < 0$. Recorde-se que $\vec{v} \cdot \vec{n} = \cos\theta$.

$$\text{Então teremos: } \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

O sinal negativo indica que, quando o fluxo entra e, portanto, é negativo, a quantidade de carga ou massa aumenta e, logo, o acréscimo é positivo. Quando o fluxo sai, teremos o oposto, isto é, o fluxo é positivo, mas haverá um decréscimo na massa ou carga. Trata-se de um balanço material ou de cargas no VC .

Essa é a equação integral da continuidade.

Levando em conta o teorema de Gauss-Ostrogradsky, ou seja:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

Teremos, substituindo \vec{v} por $\rho \vec{v}$, nessa equação.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV, \text{ pois: } \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

5.9.1 Demonstração da equivalência

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S \rho v_n dS \quad v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}, \text{ velocidade perpendicular a } dS, \text{ aplicando Gauss-Ostrogradski:}$$

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \right) \cdot \left(\rho \frac{\partial x_j}{\partial t} \vec{e}_j \right) dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right) dV =$$

$$= \int_V \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

$$\therefore \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

A menos do sinal que já demonstramos no 2º membro, ser negativo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Em um VC fechado, quando há aumento do fluxo (positivo) no VC, a massa ou carga na SC diminui (negativo) e o oposto quando houver diminuição do fluxo (ver a figura da Seção 5.9).

A fórmula é válida independentemente do volume de integração. Logo, tendo em mente que a derivação é a operação inversa da integração:¹⁶

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \therefore \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{ver observação ao pé da página na Seção 5.7})$$

É a equação da continuidade em forma diferencial.

5.10 LEI DE GAUSS PARA ELETRICIDADE

O fluxo vetorial não é necessariamente material.

$$\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

No caso de fluxo elétrico teremos:

¹⁶ Pois: a área A sob a curva $y = f(x)$, no intervalo $a \leq x \leq b$, é dada pela integral $A = \int_a^b y dx$, derivando: $\frac{d}{dx} \int_a^b y dx = \frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dx}$, significa, $a \rightarrow b$ ("a" tende a "b") e a integral se torna $dA = y dx$, obtemos:

$$\frac{d \int_a^b y dx}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \int_a^b y dx}{\Delta x} = \frac{y dx}{dx} = y$$

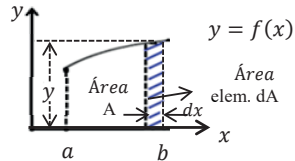
Δ é variação. No *lim*, o que era uma variação Δ , se torna um infinitésimo d . Observe que a operação diferencial d anula a operação integral \int .

Tomando-se a área elemental dA , obtida multiplicando a ordenada y pelo elemento da abcissa dx , ou seja, $dA = y dx$, e integrando entre os limites $a \leq x \leq b$, recuperamos a área inicial.

$$A = \int_a^b y dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i = a}^b y_i \Delta x_i$$

Sendo

$$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$$



Simplificando: seja a área A, calculada pela integral $A = \int_a^b y dx$. Achar a função $y = f(x)$. Para isso, calculamos a derivada da integral:

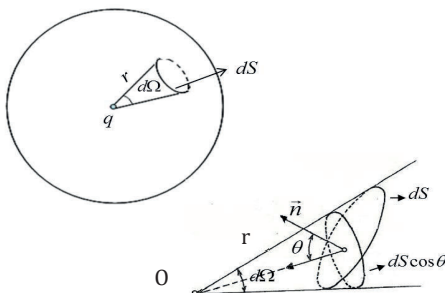
$$y = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x) \quad (2)$$

$$\phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (1a)$$

A partir disso, obtemos: $E = \frac{d\phi_e}{dS}$, em que E, campo elétrico, da Seção 5.6, conceito de “Linhas de força”, pode-se afirmar que a quantidade de linhas de força é deduzida pela relação do fluxo ϕ_e em N/C pela superfície S em m², no sistema MKS. Ver também Seção 5.17a, potencial elétrico.

Utilizamos anteriormente o teorema de Gauss-Ostrogradsky (ver final da Seção 5.8), porém, $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ ¹⁷ q_0 - carga de prova sujeita à força \vec{F} a uma distância r de q , \vec{u}_r - vetor unitário.

Cada linha de força se origina em uma carga positiva e termina em uma carga negativa de mesmo valor absoluto.



Carga q no interior de uma superfície fechada S .

$d\Omega$: ângulo sólido em esferorradianos.

$$\phi_e = \oint_S E \cos\theta dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos\theta$$

$$\phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Contudo, $dS \cos\theta / r^2$ é o ângulo sólido $d\Omega$.

¹⁷ Ver Lei de Coulomb, Seção 5.1: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$.

Pois o ângulo sólido total é 4π . Considerando que a superfície da esfera é $4\pi r^2$, logo:

$$\Omega = 4\pi r^2 / r^2 \quad (1)^{18}$$

A fórmula é válida também para n cargas.

Então teremos: $\phi_e = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$ (0) Lei de Gauss $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ e equação 1a por Gauss- Ostrogradsky.

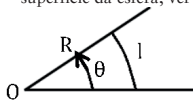
Se fizermos $q = \iiint_V \rho dV$, teremos: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ em forma diferencial, explicitando:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Também chamada de 1ª lei de Maxwell (ALONSO, FINN, SALMERON).}$$

O fluxo elétrico ϕ_e através de uma superfície fechada é proporcional à soma das cargas elétricas no interior dessa superfície. Se não houver carga: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (2). Indica que as fontes do fluxo elétrico são as cargas elétricas (YAVORSKI).

¹⁸ Definimos o radiano em um ângulo plano como a relação entre o arco ℓ e o raio R (ver Figura a seguir). Um “ângulo sólido” é o espaço compreendido no interior de uma superfície cônica ou piramidal. Em analogia ao ângulo em radianos, definimos o esferorradiano, sr, como a relação entre a superfície S intersecção do ângulo sólido da esfera com o centro no vértice da superfície e seu raio R (ver Figura anterior). Como a esfera tem uma superfície de $4\pi R^2$, essa relação se torna: $\Omega = S/R^2 = 4\pi =$ ângulo sólido da esfera. Se o ângulo sólido for pequeno, ou seja, elemental $d\Omega$, pode-se substituir a calota esférica S por uma superfície plana elemental dS : $d\Omega = dS/R^2$.

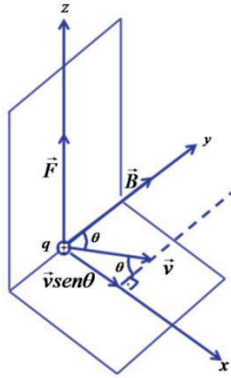
Se dS não for perpendicular ao eixo do ângulo sólido, projetamos essa superfície sobre uma superfície perpendicular ao eixo, $dS' = dS \cos\theta$ (ver Figura anterior), obtendo-se: $d\Omega = (dS \cos\theta)/R^2$, como visto anteriormente (ALONSO, FINN). Sobre a superfície da esfera, ver Anexo 10.



Assim como o ângulo em radianos é definido como: $\theta = \frac{l}{R}$, definimos o ângulo sólido como:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}, \text{ ambos são adimensionais, pois } \theta \text{ é } \frac{\text{comprim}}{\text{comprim}} \text{ e } \Omega \text{ é } \frac{\text{superf}}{\text{superf}}$$

5.11 INDUÇÃO MAGNÉTICA



Se uma carga q com velocidade \vec{v} passar por um campo magnético de vetor de indução \vec{B} , ficará sujeita a uma força perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} , obedecendo à equação vetorial:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

Logo, a indução magnética será:

$$B = \frac{F}{qv \sin \theta}$$

Se a carga estiver sujeita ao campo magnético e ao campo elétrico, então ficará sujeita à força total (soma das forças elétrica e magnética), ou seja,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

Denominada Força de Lorentz.

5.12 LEI DE GAUSS PARA O MAGNETISMO

O fluxo magnético será definido como:

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S B \cos \theta$$

Para uma superfície fechada, isto é, VC com SC fechada: $\phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$

É impossível obter um único polo magnético, pois eles sempre trabalham aos pares.

Forma diferencial:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$$

Por Gauss-Ostrogradsky, ver Seção 5.8.

Logo: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ou $\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$, a 2ª lei de Maxwell.

As linhas de força do campo magnético emergem externamente do polo norte do imã e penetram no polo sul do imã. Internamente, as linhas de forças se dirigem do polo sul ao polo norte, tornando a linha de força magnética fechada. Por esse motivo, o divergente da indução magnética \vec{B} é nulo: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Comparando com a lei de Gauss para eletricidade (Seção 5.10): $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = q$, verificamos que carga magnética não existe.

Tomando-se o fluxo magnético:

$$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

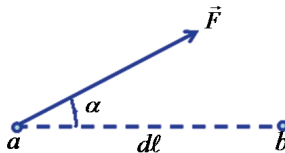
Vemos que o fluxo para fora é positivo e o fluxo para dentro tem o mesmo valor, porém negativo, sendo a soma dos dois, nula.¹⁹ Essa a verificação é experimental (HALLIDAY, RESNICK).

5.13 DIFERENÇA DE POTENCIAL

A energia potencial entre dois pontos a e b será:

$$E_p = \int_a^b F \cos \alpha \, dl = \int_a^b q(E + Bv) \cos \alpha \, dl$$

(Se \vec{B} e \vec{v} forem perpendiculares)



¹⁹ Indica que na natureza não há cargas magnéticas e que as linhas de indução do campo magnético são fechadas. O que temos são dipolos magnéticos, como por exemplo, no campo magnético produzido pelo spin dos elétrons, que funcionam como ímãs elementares (YAVORSKI). Como veremos adiante na subseção 5.14.1 equação 1.

Pois, pela força de Lorentz: $\frac{F}{q} = E + Bv$ [ver Seção 5.11, Equação (2)].

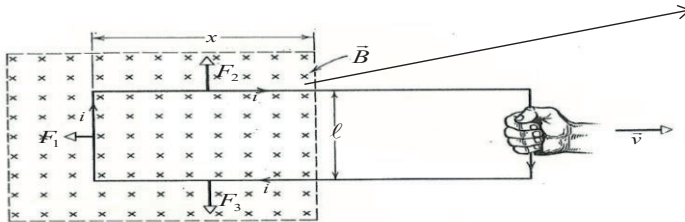
Chamamos diferença de potencial a: $\frac{E_p}{q} = \Delta V_{ab}$

$$\Delta V_{ab} = \int_a^b (E + Bv) \cos \alpha \, d\ell \quad (\text{para } \vec{B} \text{ e } \vec{v} \text{ perpendiculares})$$

5.14 LEI DE FARADAY-HENRY

Foi deduzida por Michael Faraday em 1831.

Indução magnética \perp ao plano: \vec{B} ,
apontando para para fora na direção do leitor.



O movimento do circuito fechado com velocidade \vec{v} induz uma corrente i no circuito. Na Seção 5.11, o sistema de referência estava em \vec{B} . Agora, o sistema de referência está na carga q , movendo-se no circuito. Logo, é \vec{B} que se move em relação a q .

O potencial será: $\Delta V = \int_c (E + Bv) \cos \alpha \, d\ell$ (0) (ver Seção 5.13).

Como o circuito é fechado, o potencial elétrico será nulo, pois $a = b$ e $\Delta V_{ab} = 0$ (potencial elétrico).

Em nosso caso, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ e se cancelam.

\vec{F}_1 será função de $\theta = 90^\circ$, logo, $\text{sen}\theta = 1$ ²⁰ e $\Delta V = B\ell v$ ²¹

θ é o ângulo entre \vec{B} e \vec{v} .

Como $\phi_B = B\ell x \quad \therefore \frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$

($B \times$ superfície)

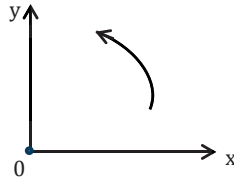
$\therefore \Delta V = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (1)$

(Lei de Faraday-Henry)

Sendo ϕ_B , fluxo magnético.

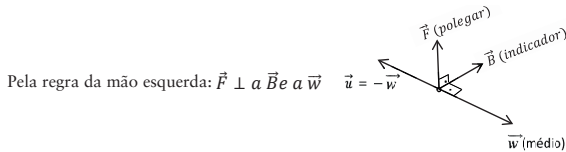
A uma variação positiva de dt (variação elementar de tempo) corresponde uma variação negativa da área ℓx , então, deve-se usar o sinal negativo.

5.14.1 Interpretação do sinal negativo na lei de Faraday-Henry



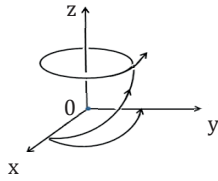
Sistema dextrogiro

²⁰ $F_1 = -quB$ ver Equação (1), Seção 5.11: $F_1 = -quB \text{sen}\theta \therefore -E = -\frac{F_1}{q} = uB$, $E + uB = 0$, $u = \frac{dl}{dt}$, $\hat{e} \perp a$: $v = \frac{dx}{dt}$

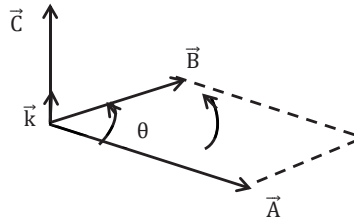


²¹ Devido à corrente circulante i , surge força no condutor móvel. $F_1 = B\ell i$ pois: $F_1 = quB \Rightarrow dF_1 = dq \frac{dl}{dt} B = iBdl$ e

$F_1 = \int dF_1 = \int Bidl = B\ell i$; distância $dx = vdt$ trabalho realizado: $dW = F_1 dx = B\ell v idt$, $idt = dq$
 $\therefore dW = B\ell v dq$ potencial $\Delta V = \frac{dW}{dq} = B\ell v$ (1a).



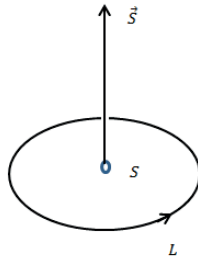
Sistema dextrógiro



Produto vetorial

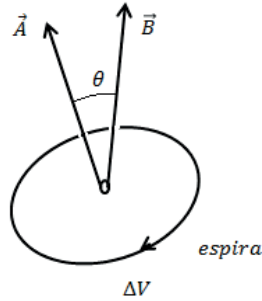
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB(\sin\theta)\vec{k}, \vec{k} = \text{vetor unitário}$$

A rotação A, B, C é dextrógiro (COURANT).



$$\text{Se } \vec{A} \times \vec{B} = \vec{S}, L \text{ contorno da área}$$

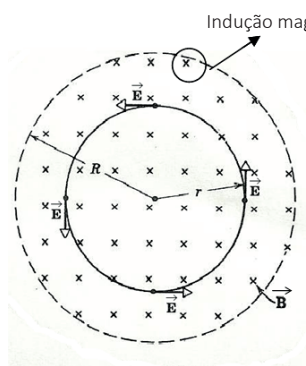
Pela regra da mão direita, polegar para cima; outros dedos: direção contrarrelógio, isto é, sistema dextrógiro (Alonso Finn).



Com relação ao fluxo:

$$\Delta V \text{ tem direção contrária à rotação dextrográ, então será negativo: } \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -\Delta V \quad (1)$$

A direção de ΔV foi determinada experimentalmente por Faraday, Henry e Lenz, de modo independente (HALLIDAY, RESNICK, WALKER).²²



Seja uma carga q percorrendo o circuito com um campo induzido \vec{E} provocado por uma indução magnética variável \vec{B} . Então o trabalho em cada rotação é:

$$q\Delta V, \Delta V = \frac{E_p}{q}, \text{ ver Seção 5.13.}$$

Também deve ser igual a $(qE)(2\pi r)$, pois $F = qE$.

²² Considerando a carga de q positiva. Quando Φ_B cresce, $\frac{d\Phi_B}{dt}$ é positivo e ΔV , negativo. Quando Φ_B decresce, teremos a variação do potencial ΔV positiva.

Energia potencial E_p = trabalho: $F \times$ distância (nesse caso, circunferência)

Logo: $\Delta V = E 2\pi r$

No caso geral, devemos ter: $\Delta V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ (1b)

Então a lei da indução de Faraday, ver em (1), se torna:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (2)$$

A 3ª lei de Maxwell

O campo magnético variável com o tempo produz um campo elétrico, fenômeno chamado de “indução”. Ele é utilizado, por exemplo, em um gerador elétrico, ou um dínamo, em que a variação do campo magnético é produzida por movimentação do magneto.

Retornando à questão do sinal, podemos resolvê-lo matematicamente:

Tomando-se a primeira equação (0): $\Delta V = \oint (E + Bv)\cos\alpha \, d\ell$, como $\alpha = 0^\circ$ e o ciclo fechado, temos:

$$\Delta V = \oint_C (E + Bv) \, d\ell = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\oint Bv \, d\ell$$

A 1ª parcela chamaríamos de ΔV_E , potencial elétrico, e a 2ª, ΔV_M , de potencial magnético.

$$\therefore \Delta V_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$\Delta V_M = \oint Bv \, d\ell$, como vimos ao pé da página na Seção 5.14, Equação (1a), integrando $\Delta V = B\ell v$.

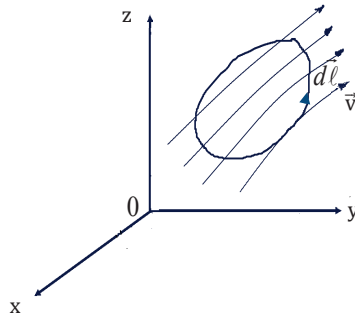
Logo: $\Delta V_E = -\Delta V_M$, justificando o sinal negativo.

Nada mais é do que obedecer ao princípio da “Conservação da energia” (HALLIDAY, RESNICK, WALKER).

5.15 TEOREMA DE STOKES

Transforma uma integral de linha de caminho fechado em uma integral da superfície circunscrita por essa linha.

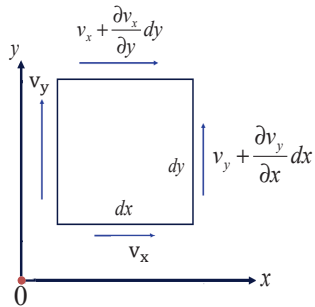
Circulação:



É uma integral de linha em um caminho fechado da componente tangencial ao longo da trajetória.

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

Cálculo da circulação em um elemento de área $dx dy$:



Circulação nos lados da área:

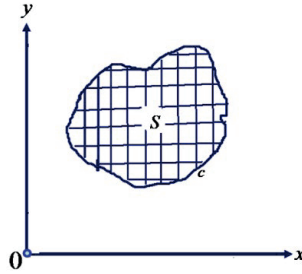
1º lado: $v_x dx$

2º lado: $\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy$

3º lado: $-\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx$

4º lado: $-v_y dy$

Somando os resultados parciais, teremos: $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$.



Porém, $(\text{rot } \vec{v})_z = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ (1)

Componente na direção z do rotacional de \vec{v} no plano xy

Logo: $d\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = (\text{rot } \vec{v})_z dS$ Em que $dS = dx dy$

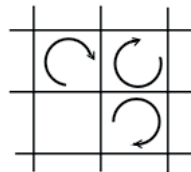
É uma circulação elementar.

Considerando uma área S , dividida em áreas elementares.

As circulações internas se cancelam mutuamente, restando a circulação no contorno c da área S .

O raciocínio é semelhante ao utilizado para o teorema Gauss-Ostrogradsky da Seção 5.8.

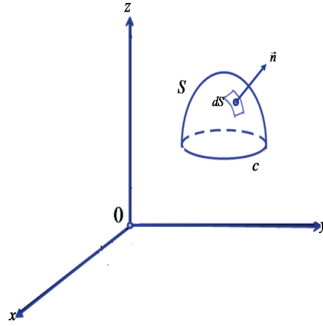
Logo: $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\text{rot } \vec{v})_z dS$



Trata-se do teorema bidimensional de Stokes, também chamado de Green.

Consideremos o caso tridimensional. Seja uma superfície S , limitada por uma curva não coplanar C .

A superfície é subdividida em elementos infinitesimais de área dA .



Para cada elemento de área, teremos:

$$d\Gamma = (\text{rot}\vec{v})_n dS = \text{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Em que a componente do rotacional é normal ao elemento de área.

Da mesma forma como na divergência, as circulações internas se cancelam em S , restando as externas em c . Na divergência, os fluxos se cancelavam aos pares, agora, as circulações se cancelam (ver Seção 5.8 teorema de Gauss-Ostrogradsky).

$$\text{Logo, teremos: } \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (1a)$$

Projetando nos planos xy , yz e zx :

$$\oint_c v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dz dx$$

Em que $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ ²³

Aplicando na lei de Faraday (Seção 5.14) e utilizando o fluxo magnético (Seção 5.12), teremos:

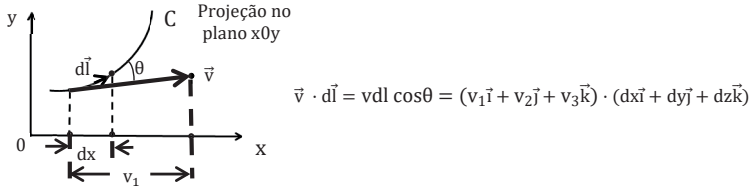
$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Logo: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2)^{24}$$

²³ $\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$, produto escalar, ver nota ao pé da página da Seção 5.7.

²⁴ Trata-se de um vetor. Recordando o produto vetorial: se $\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \text{sen } \alpha_{ij} = \text{sen } 0^\circ = 0$, se $\vec{i} \neq \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{j} = (\text{sen } \alpha_{ij})\vec{k} = (\text{sen } 90^\circ)\vec{k} = \vec{k}$, logo $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \vec{i} \times \vec{j} =$$

Pois:

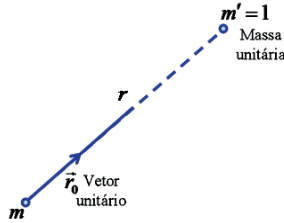


$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Phi_B \quad e, \quad \Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Terceira lei de Maxwell ou Faraday-Henry.

5.15.1 Exemplo ilustrativo

Calcular o trabalho da força de atração newtoniana de uma massa imóvel m agindo sobre uma massa unitária se deslocando entre dois pontos (PISKOUNOV).



Força na massa unitária: $\vec{F} = -\frac{km m'}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{km}{r^2} \vec{r}_0$

Logo, \vec{F} é o campo gravitacional: $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m'} \quad m' = 1$

Componentes:

$= (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{k} + (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{j}$, é um vetor perpendicular ao plano onde se situam os vetores \vec{A} e \vec{B} . Isto é, uma matriz: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} \quad Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r} \quad Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r} \quad (3)$$

$\frac{x}{r}$ $\frac{y}{r}$ $\frac{z}{r}$ cossenos diretores

Trabalho para deslocar de P_1 a P_2 :

$$A = -km \int_{P_1}^{P_2} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -km \int_{P_1}^{P_2} \frac{rdr}{r^3} = km \int_{P_1}^{P_2} d \frac{1}{r}$$

Pois trabalho elementar dW é a força F agindo por um deslocamento dx , integrando:

$W = \int Fdx$, ver 1ª página do Anexo 3.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad rdr = xdx + ydy + zdz,^{25} \text{ pois derivando } r^2, \text{ temos: } 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \frac{\partial x}{\partial x} \text{ e etc.}$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \therefore \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (4) \text{ derivadas parciais}$$

Por cálculo diferencial: $dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz = \frac{xdx + ydy + zdz}{r}$, assim, temos a equação anterior.

$$\text{Logo: } A = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

A é a diferença de potencial (trabalho por unidade de massa), ver Seção 4.7, Equação (1):

$$u = \left(\frac{km}{r} \right) \quad (4a)$$

é o potencial, então, derivando em relação às coordenadas:

$$X = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ compare com as Equações (3) e (4).}^{26}$$

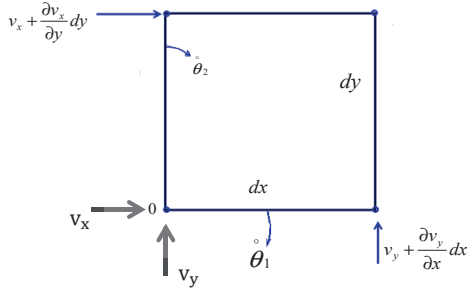
Este é o potencial gravitacional, assim denominado para distinguir-se do potencial eletromagnético, apresentado na Seção 5.13.

²⁵ Além disso, pelo cálculo vetorial: $dA = \left(-\frac{km}{r^3} \vec{r}_0 \right) \cdot (d\vec{r}_0) = -\frac{km}{r^3} (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k}) \cdot (d\vec{x}\vec{i} + d\vec{y}\vec{j} + d\vec{z}\vec{k}) = -km \frac{rdr}{r^3} = -km \left(\frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} \right)$, confirmando o resultado anterior.

²⁶ Conclui-se que o gradiente do potencial fornece o campo gravitacional com sinal trocado, $\vec{g} = -\vec{\nabla}u$.

$\therefore A = u(P_2) - u(P_1)$ A diferença de potencial gravitacional se manifesta como trabalho para deslocar a massa unitária m' entre os pontos P_1 e P_2 . Independe do caminho percorrido, e só depende das coordenadas dos pontos.

5.15.2 Velocidade angular em torno de O



Velocidade angular:

$$\theta_1 = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta x} = - \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\theta_1 = - \frac{\partial v_y}{\partial x} = - \frac{\left[v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right] - v_y}{dx} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \Rightarrow \theta_1 = \partial y / \partial x, \text{ ângulo}$$

Velocidade angular é ângulo na unidade de tempo.²⁷

$$\theta_2 = + \frac{\partial v_x}{\partial y} = + \frac{\left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right] - v_x}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \Rightarrow \theta_2 = \partial x / \partial y$$

Velocidade angular média em torno do eixo z : $\omega_z = \frac{1}{2} (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot} \vec{v})_z$$

Ver Seção 5.15, sobre o teorema de Stokes, Equação (1), em que deduzimos o $(\text{rot} \vec{v})_z$ através da circulação:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

isto é, $(\text{rot} \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{d\Gamma}{dS}$ ²⁸

A figura ao lado da Equação (1) é uma representação gráfica do rotacional no plano bidimensional xy. Para uma interpretação gráfica do rotacional no espaço tridimensional, ver figura ao lado da Equação

²⁷ Ver Seção 2.1.2, Pêndulo simples, equação 1.

²⁸ Apresentamos aqui a obtenção do rotacional bidimensional para um campo de velocidades. Contudo, essa forma é válida para qualquer variável, como poderá ser visto a seguir. O conceito de campo foi introduzido na Seção 5.3.

(3) na Seção 5.16, em que a variação da relação entre a circulação Γ representada pelo contorno do orifício L e a superfície S da bexiga estão indicadas. A definição matemática do rotacional tridimensional encontra-se na Equação (5a) da Seção 5.16.

O rotacional significa que, além da componente axial, existe uma componente tangencial provocando circulação no plano perpendicular ao eixo considerado, isto é, provocando turbilhão no fluxo vetorial, ou seja, uma rotação.

Escrevendo a lei de Faraday na forma diferencial:

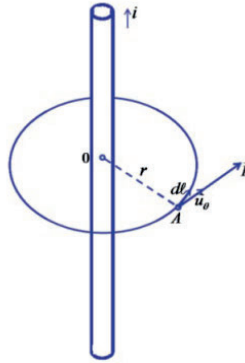
$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\vec{e}_3 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\vec{e}_2 = -\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\vec{e}_1 + \frac{\partial B_2}{\partial t}\vec{e}_2 + \frac{\partial B_3}{\partial t}\vec{e}_3\right) = \text{rot}\vec{E}$$

Ou:
$$\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial y_j}\right)\vec{e}_k = -\frac{\partial B_i}{\partial t}\vec{e}_i = (\text{rot}\vec{E})_i\vec{e}_i, \text{ e } \therefore \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$i, j, k = 1, 2, 3$

Como visto na Equação (2) da Seção 5.15.

5.16 LEI DE AMPÈRE-MAXWELL



Com a corrente i surge um campo de indução magnética \vec{B} em volta do condutor, de valor:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u}_\theta, \vec{u}_\theta \text{ vetor unitário. } \vec{B} \text{ é diretamente proporcional a } i \text{ e inversamente proporcional a } r.$$

Calculemos a circulação magnética:

$$\Gamma = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int d\ell = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right) 2\pi r = \mu_0 i \quad (1)$$

μ_0 = constante de permeabilidade, ver Seções 5.23 e 5.24.

Trata-se da lei de Ampère (1755-1836).

James Clerk Maxwell (1831-1879) percebeu que Faraday foi o primeiro a compreender corretamente os fenômenos elétricos e magnéticos. O trabalho de Faraday fora experimental, e Maxwell se propôs a expor matematicamente os conhecimentos de eletricidade e magnetismo da época, reunindo suas conclusões no *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, publicado em 1873. (0)

Seja o fluxo de corrente através de uma superfície de controle SC (ver Seção 5.9).

$$\text{A corrente } i \text{ será: } i = \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{29} \quad i = -\frac{dq}{dt}$$

Nesse caso, a superfície é fechada.

i é o fluxo da carga por unidade de tempo.

O fluxo $\epsilon_0 \phi_e$ saindo da superfície é positivo, pois $\vec{v} \cdot \vec{n} = v \cos \theta$, θ = ângulo entre \vec{v} e \vec{n} , $\theta < 90^\circ$, logo, $\cos \theta > 0$. Porém, o fluxo da corrente saindo da superfície fechada significa diminuição da carga no VC. Então, $\frac{dq}{dt} < 0$, pois $dq < 0$ e $dt > 0$. (ver figura da Seção 5.9).

$$\text{Logo, teremos: } -\frac{dq}{dt} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (1a)$$

ver Seção 5.10, Equação (0).

Porém,

$$q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS, \text{ portanto: } \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \quad (2) \quad \text{(pela lei de Gauss para eletricidade, Seção 5.10, e teorema de Gauss-Ostrogradsky)}$$

$$q = \int_V \rho dV = \epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \epsilon_0 \phi_e$$

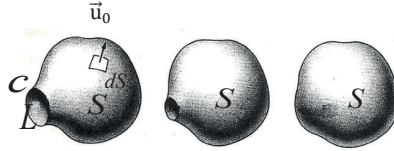
$$\text{Substituindo em 1a: } \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2a)$$

É o princípio da conservação da carga em uma SC.

²⁹ Ver Seção 5.9, Equação (1), $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{dq}{dV} dV = -\frac{dq}{dt} = i, \rho = \frac{dq}{dV}$.

Se os campos forem estáticos, a integral $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$ não depende do tempo, e sua derivada em relação ao tempo é nula. Portanto: $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$ para campos estáticos, a carga q é constante no tempo através da superfície de controle SC . Como o fluxo elétrico é: $\Phi_e = q/\epsilon_0$, ver Seção 5.10, o fluxo elétrico Φ_e na SC é constante.

Maxwell sugeriu uma modificação da lei de Ampère, que foi deduzida em condições estáticas.



É aplicada a uma superfície S limitada pela linha c .

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{u}_0 \, dS \quad (3) \quad \text{pelo teorema de Stokes.}$$

Pode ser expressa como:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 i \quad [\text{ver Equação (1)}].$$

\vec{u}_0 = vetor unitário \perp a dS

Se a linha se contrai a um ponto, a superfície se torna fechada e, nesse caso, $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$,³⁰ que concorda com o princípio de conservação da carga como vimos. Contudo, isso é para campo estático, não sendo válida quando dependente do tempo. A modificação sugerida se torna:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{ou}$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS; \text{ conforme equação 2a, nesse caso, não será nulo}$$

É a lei de Ampère-Maxwell ou 4ª Equação de Maxwell.

Ela se reduz à lei de Ampère para campos estáticos, pois o último termo é nulo, quando a linha se reduz a um ponto e a superfície S se torna fechada. A modificação de Maxwell foi mais pela necessidade

³⁰ Pois dl fica nulo.

de consistência matemática do que por experiências. As experiências que comprovaram sua modificação apareceram alguns anos mais tarde.

O termo correspondente à “corrente elétrica”, que seria “corrente magnética”, não aparece, pois não existem polos magnéticos livres na natureza, isto é, não há cargas magnéticas. Estamos nos referindo à lei

de Faraday-Henry:
$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt},^{31}$$

ver final da Seção 5.14.1, Equação (2).

Aplicando o teorema de Stokes na lei de Ampère-Maxwell: transforma integral de linha em integral de superfície, ver no final da Seção 5.15, Equação (1a):³²

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = f \tag{4}$$

Tendo em vista que:

$$\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} \tag{5a} \Rightarrow \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

e levando ao limite da mesma forma que: $\text{div} \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V}$ (Ver Seção 5.7)

Obtemos: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{v} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ (5)

Forma diferencial da lei de Ampère- Maxwell e 4ª lei de Maxwell.

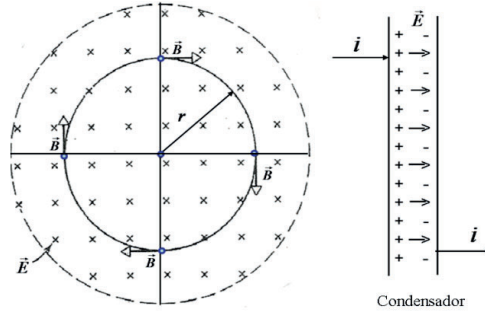
Obtida da Equação (4), por diferenciação, isto é, chamando (4) de f , achamos a quantidade elementar df da função f , ou melhor, derivamos em relação a $\vec{n}S$, procedemos à operação inversa da integração, como visto na Seção 5.9, Equação (2).

5.16.1 Exemplo ilustrativo

Seja um campo elétrico uniforme \vec{E} em uma região cilíndrica do espaço. Por exemplo, um condensador com armaduras circulares planas e paralelas, de raio R, sendo carregado como na Figura a seguir. Deduzir o campo magnético B em pontos internos do capacitor: $r \leq R$. Não existe corrente entre as placas, então $i = 0$ e $\mu_0 i = 0$.

³¹ Compare com: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ (ver início da Seção 5.10). O termo $\mu_0 i$ é o da corrente elétrica.

³² Recorde-se que: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B}$.



A intensidade do campo elétrico \vec{E} aumenta uniformemente: dE/dt constante e positivamente. A carga das armaduras também aumenta uniformemente. Uma corrente flui para a armadura positiva, e outra igual sai da armadura negativa.

O campo elétrico variável cria um campo magnético induzido, isto é, a indução magnética \vec{B} .

Isso pode ser expresso como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}, \text{ combinando as Equações (1), (2) e (3),}^{33} \phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS, \text{ ver Equação (1a)}$$

da Seção 5.10.

Compare com a última figura da Seção 5.14, é a contrapartida da lei da indução de Faraday. Repare que \vec{B} está em sentido contrário a \vec{E} , por isso a troca de sinais.

Circulação de $B = \mu_0 \epsilon_0$ (variação temporal do fluxo elétrico ϕ_e) \Rightarrow

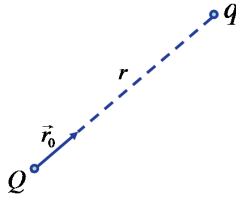
$$\Rightarrow (B)(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}, \vec{E} \cdot \vec{n} \text{ constante na superfície } S \text{ em determinado instante } t.$$

Explicitando B: $B = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE}{dt}$, para $r \leq R$.

³³ $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i = -\mu_0 \frac{dq}{dt}$ por 1a: $-\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$ $\therefore \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$

Recorde-se que: $i = -\frac{dq}{dt}$ e $\phi_e = q/\epsilon_0$.

5.17 ENERGIA POTENCIAL



Referindo-se à Seção 5.15, exemplo ilustrativo, se substituirmos as massas m e m' pelas cargas Q e q, a força será: $\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{r}_0$ ³⁴

\vec{r}_0 vetor unitário supondo cargas de sinais contrários.

Campo elétrico: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

Força para carga unitária: $q = 1$

Componentes:

$$X = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} \quad Y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{y}{r} \quad Z = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{z}{r} \quad (1)$$

$\frac{x}{r} \quad \frac{y}{r} \quad \frac{z}{r}$ cossenos diretores,

Trabalho para deslocar de P_1 a P_2 : $W = E_p = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$E_p = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{rdr}{r^3} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} d\frac{1}{r}$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad r dr = x dx + y dy + z dz \quad \therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ ³⁵ derivadas parciais

$\therefore E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$, Energia potencial elétrica.

Sobre o trabalho, ver exemplo ilustrativo da Seção 5.15.1

³⁴ Nesse caso, nos restringimos à força entre cargas elétricas.

³⁵ Ver detalhes no exemplo ilustrativo da Seção 5.15.1, Equação 4 $2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \frac{\partial x}{\partial x}$.

5.17.1 Potencial elétrico

Ainda se restringindo à força entre cargas elétricas, se tomarmos E_p e dividirmos por q teremos a diferença de potencial:³⁶

$$\Delta V = \frac{E_p}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)_{(0)}^{37}$$

Chamando V de potencial: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ (1)

Então: $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$, compare com as grandezas mencionadas na seção 5.17, pois $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}$ e $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ etc. Ver Seção 5.17, Equação (1), X, Y e Z são as componentes de \vec{E} .

$$\Delta V = V(P_2) - V(P_1)$$

A diferença de potencial se manifesta como trabalho para deslocar a carga unitária q entre os pontos P_1 e P_2 . Independe do caminho percorrido, e depende somente das coordenadas dos pontos (x, y, z) .

Pelo visto anteriormente, deduzimos que:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (1a)$$

Ou $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ (ver Seção anterior, idem ao já mencionado; X, Y, Z componentes de \vec{E}).

$$\text{Sendo } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

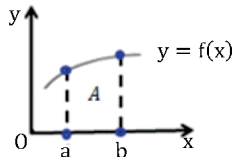
$$\vec{E} = \vec{F}/q = -\text{cte} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0, \text{ porém, } V = \text{cte} \frac{Q}{r}, \text{ logo: } \vec{\nabla}V = -\text{constante} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0 = \vec{E}, \text{ ver Equação (1a).}$$

O campo elétrico \vec{E} é igual ao gradiente do potencial V com sinal trocado, ou seja, o vetor campo elétrico é perpendicular às superfícies equipotenciais e, como ele é negativo, aponta no sentido dos potenciais decrescentes.

³⁶ A parcela devida à energia magnética será tratada na Seção 5.21.

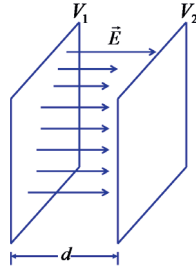
³⁷ Recordemos a integral definida: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = A$ (ver equação de E_p na Seção 5.17).

Em que: $\int f(x) dx = F(x) + \text{cte}$ e $A = \text{Área sob a curva } y = f(x), \text{ entre: } a \leq x \leq b.$



A unidade usada para o potencial é o volt (V) e, para o campo elétrico, volt/m ou $\text{newton}/\text{coulomb}$. Lembremos que: $\vec{E} = \vec{F}/q$.³⁸

Sejam duas superfícies planas e paralelas com potenciais V_1 e V_2 . Essas superfícies são equipotenciais, isto é, seus pontos estão a um mesmo potencial, respectivamente V_1 e V_2 .



$$E = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d} \tag{1b}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \tag{2}$$

Diferença de potencial $\therefore E = -\frac{\Delta V}{d}$

5.18 CAPACIDADE ELÉTRICA, CAPACITORES

O potencial elétrico na superfície esférica equipotencial de raio r , tendo uma carga Q concentrada em seu centro, é, como visto na Seção 5.17.1, Equação (1): $V = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|$, isto é, em módulo.

Se a carga estiver envolta por um dielétrico, um material isolante, substituiremos ϵ_0 por ϵ : $V = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \right|$, em que ϵ é a permissividade do isolante, e ϵ_0 , permissividade no vácuo.

A relação $\frac{Q}{V}$ para a esfera é constante e igual a $4\pi\epsilon r$, e é denominada “Capacidade”:
 $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon r$.

³⁸ O volt é $\text{joule}/\text{coulomb}$, pois potencial é $\text{energia}/\text{carga}$. Recordar Seção 5.6, “Linhas de força”. Como $\vec{E} = \vec{F}/q$, $dE_p = \vec{F}_i \cdot d\vec{x}_i$, $dV = dE_p/q$, $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \vec{e}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{E_p}{q} \right) \vec{e}_i = \vec{F}/q$.

A capacidade é expressa em *farad*, homenagem a Michael Faraday.

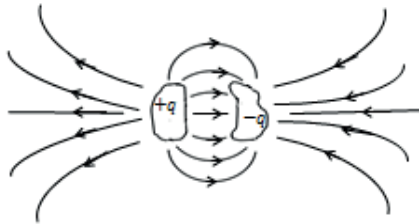
O *farad* é definido como a capacidade de um condutor que, recebendo uma carga de 1 Coulomb, fica com um potencial de 1 Volt.

O conceito de capacidade elétrica pode ser estendido para um sistema de condutores. Sejam os dois condutores na Figura com cargas, respectivamente, $+Q$ e $-Q$, a capacidade de um sistema é definida

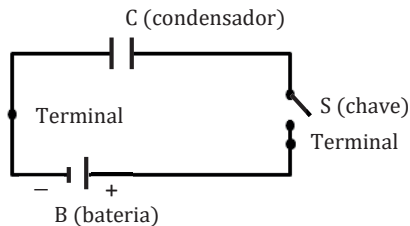
$$\text{como: } C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V} \quad V_1 - V_2 = Ed, \text{ ver equação 1b na secção 5.17.1}$$

Esse arranjo é chamado de capacitor.

Os capacitores ou condensadores servem para armazenar energia elétrica na forma de energia potencial, e acumulam carga. Exemplos de aplicação, dos condensadores temos: desfibrilador ventricular, *flash* de máquina fotográfica, circuitos de sintonização de transmissores e receptores de rádio e televisão, bancos de memória de computadores, entre outros.



Elementos básicos: dois condutores isolados de formato arbitrário. Os condutores são as “placas”. O mais convencional é o de placas paralelas já visto na Figura da Seção 5.17.1, mas também podem ser cilíndricos. Quando carregados, suas placas adquirem cargas iguais, mas de sinais opostos. Para carregá-lo, colocamos seus terminais em contato com uma bateria.

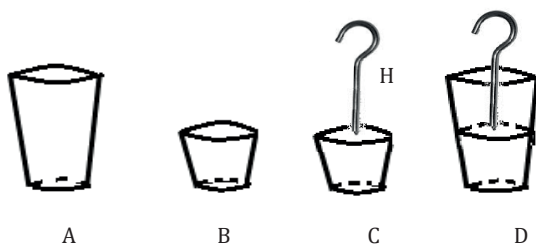


A garrafa de Leyden é o condensador mais antigo. Seu nome vem da cidade onde foi inventada.³⁹ Foi inventada em 1746. A experiência de Franklin foi posterior. Benjamin Franklin (1706-1790) demonstrou

³⁹ Cidade na Holanda, sede de uma Universidade importante.

que quando um condensador é carregado, não só as armaduras ficam eletrizadas, mas também o dielétrico (isolante).

Conforme a Figura a seguir, na garrafa de Leyden, o dielétrico é um vaso cônico de vidro A, a armadura externa é um vaso metálico B que se adapta externamente a A; a armadura interna é um tronco de cone maciço C que se adapta internamente a A e com uma haste H através da qual é eletrizado. Em D indica-se o condensador montado, o qual é carregado. Ao desmontar as armaduras, o contato com as mãos as descarregam. Montando-se novamente, as armaduras ficam outra vez carregadas, indicando que o dielétrico A estava eletrizado, carregando as armaduras depois da 2ª montagem.



Pode-se fazer analogia entre um capacitor carregado com uma carga q e um recipiente de paredes rígidas de volume V , contendo massa m de gás perfeito. A pressão p do gás (para uma temperatura dada) é diretamente proporcional a m , de acordo com as leis dos gases perfeitos: $m = \left(\frac{V}{RT}\right) p$. Para o capacitor teremos: $q = (C)V$. Comparando, vemos que a capacitância C é o análogo do volume V do recipiente (supondo T constante) e à carga q corresponde a massa m .

Observe que referimo-nos à carga de um capacitor como sendo q , o valor absoluto da carga de uma das armaduras. No entanto, sua carga líquida é nula.

Considera-se que o condensador acumula energia elétrica na forma de energia potencial no campo elétrico existente entre as placas do capacitor. São capazes de confinar os campos elétricos em volumes pequenos, sendo dispositivos acumuladores de energia. Nos síncrotrons (ciclotron acelerador de elétrons), a energia acumulada em capacitores durante um longo tempo é liberada de modo intermitente para aceleração dos elétrons, por meio da descarga dos capacitores, em um tempo muito mais curto.

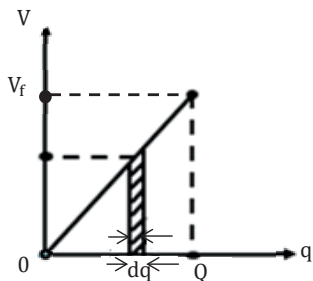
Na física dos plasmas também se faz uso dos capacitores.

5.19 ENERGIA DO CAMPO ELÉTRICO

Tendo em vista o parágrafo anterior, ao carregar um condutor ou capacitor, gastamos energia ao trazer mais carga, e realizamos trabalho para superar a repulsão da carga existente, se houver.

Seja um condutor ou capacitor de capacidade C com carga q . Seu potencial é $V = q/C$.⁴⁰ Adicionando dq , trazendo do infinito, o trabalho efetuado é $dW = Vdq$, igual ao acréscimo dE_e na energia do condutor.

Então:



$dE_e = \frac{q dq}{C}$ Integrando de 0 (zero) até a carga total Q .

$$E_e = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1)$$

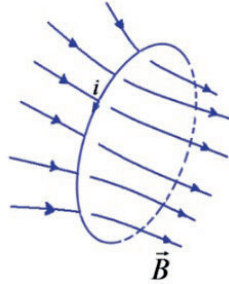
$$E_e = \int_0^Q V dq \quad , \text{ nota-se que: } E_e = \frac{1}{2} V_f Q$$

Recorde que: $V = E_p/Q$, ver Seção 5.17.1, Equação (0).

É a área de um triângulo, ver figura, V_f seria a ddp final entre os terminais do condensador, quando sua carga for a carga total Q e a ddp inicial fosse nula.

⁴⁰ No caso de um capacitor, V será a diferença de potencial, ddp, entre as placas.

5.20 AUTOINDUÇÃO



Seja um circuito percorrido pela corrente i . Conforme a lei de Ampère, Seção 5.16, Equação (1), a corrente produz um campo magnético que, em cada ponto, é proporcional a i . Esse fluxo ϕ_i é, portanto, proporcional à corrente i : $\phi_i = Li$.⁴¹

L depende da forma geométrica do condutor e é chamada “autoindutância” do circuito.

É expresso em uma unidade denominada *henry*, em homenagem a Joseph Henry (1797-1878), contemporâneo de Faraday.

Se houver variação da corrente i com o tempo, o fluxo magnético ϕ_i também varia e, conforme a Lei de Faraday-Henry [ver Seção 5.14, Equação (1)], uma força eletromotriz fem, isto é, uma diferença de potencial ΔV_L , é induzida no circuito. É chamada de “autoindução”: $\Delta V_L = -\frac{d\phi_i}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

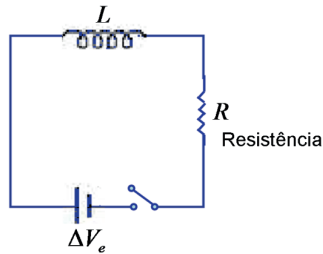
O sinal negativo indica que ΔV_L se opõe à variação da corrente, isto é, para dt positivo, di será negativo.

A equação é válida para o circuito rígido e, portanto, para L constante. Se o circuito for variável, L não será constante e:

$$\Delta V_L = -\frac{d}{dt}(Li)$$

⁴¹ A relação entre L e a indução \vec{B} e o fluxo magnético ϕ_B será apresentada na Seção 5.26, ao tratarmos do vetor de Poynting, no caso de um solenoide.

5.21 ENERGIA DO CAMPO MAGNÉTICO



Seja o circuito em que é aplicada uma fem ΔV_e ,⁴² com o circuito inicialmente desligado. Ao se ligar o circuito, devido à indutância L , que atua se opondo à corrente, como se fosse para vencer uma inércia, a corrente não atinge o valor instantaneamente, mas, aos poucos, o valor $\frac{\Delta V_e}{R}$. A resistência R ⁴³ representa as perdas de energia do circuito que se transformam em energia térmica, ou seja, calor, pelo efeito Joule.

Claro que, pela lei da conservação da energia, a diferença de potencial em um nó será:

$$\Delta V_e - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad (1)$$

Ri é a queda de tensão devido às perdas de energia. Daqui se deduz a lei de Ohm, válida para metais condutores. Essa queda de tensão é uma função linear com a corrente i , sendo R uma constante que depende do condutor, e sua geometria, é medida em ohms.

$$Ri = \Delta V_e - L \frac{di}{dt} \quad \text{Logo: } \Delta V_e i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (2)$$

O 1º termo representa $\Delta V_e \frac{dq}{dt}$, que é a taxa da energia por unidade de tempo da fem fornecida ao circuito (ver Seção 5.13), diferença de potencial multiplicado pela corrente.

O 2º termo representa a taxa de produção de calor no circuito. Para uma explicação física desse termo, ver Seção 5.26, Equação (5.8a 2).

O 3º termo representa a energia por unidade de tempo para formar a corrente ou estabelecer seu campo magnético associado.

⁴² Um dispositivo capaz de manter uma diferença de potencial ΔV_e [ver Seção 5.17.1, Equação (2)] entre seus terminais, é denominado fonte de força eletromotriz fem, por exemplo: bateria, pilha ou gerador.

⁴³ Em 1827, Georg Ohm estabeleceu uma analogia entre um circuito hidráulico e um circuito elétrico: a vazão corresponderia à corrente, ao desnível, a diferença de potencial e a oposição ao fluxo à resistência R . Em 1828, chegou experimentalmente à lei que hoje leva seu nome (Lei de Ohm): queda de tensão no circuito $\Delta V = Ri$. Um condutor com $R = 1\text{ohm } (\Omega)$, quando existe um $\Delta V = 1V$, estabelece uma corrente $i = 1A$.

A taxa de aumento da energia magnética será: $\frac{dE_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}$, ver equação (2) anterior.

A energia magnética necessária para aumentar a corrente de zero até o valor i será: $E_B = \int_0^{E_B} dE_B = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2$, Equação (3), que será mais bem esclarecida na Seção 5.22, Equação (1a), é deduzido de maneira semelhante ao que foi deduzida a energia do campo elétrico E_e , ver Seção 5.19, Equação (1). Também se pode verificar a analogia com MHS.

5.22 OSCILAÇÕES DO CIRCUITO INDUTÂNCIA-CAPACITÂNCIA LC

Recordemos o Movimento Harmônico Simples (MHS) no exemplo do sistema massa-mola da Seção 2.1.3. Vimos que a força restauradora que faz a massa retornar quando estendida ou comprimida provem da lei de Hooke, $F = -kx$. O sinal negativo significa que a força tem direção contrária ao sentido crescente, em módulo, do deslocamento da massa. Lembremos que a origem está na massa em posição de equilíbrio, havendo uma direção positiva e outra negativa.

A seguir, algumas considerações energéticas do MHS.

Conforme a 2ª lei de Newton:

$$F = -kx = ma = m \frac{dv}{dx} \quad \therefore mvdv = -kx dx, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Integrando entre a posição de equilíbrio, em que $x = 0$ e a velocidade é v_0 e uma posição genérica x quando a velocidade genérica é v , teremos: $\int_{v_0}^v mvdv = -\int_0^x kx dx$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

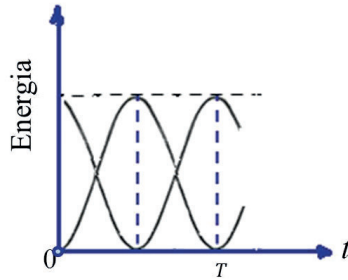
Conclui-se que, sendo $\frac{1}{2}mv_0^2$ a energia cinética inicial, em que a energia potencial é nula, pois a mola ainda não foi acionada, esta representa a energia total do sistema, que é conservada. Essa energia será igual, em uma posição genérica, à soma da energia cinética da massa mais a energia potencial elástica da mola distendida ou contraída [ver figura da Equação (3a) na Seção 2.1.3].

A equação que rege o MHS é: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

Cuja solução é: $x = R \cos \omega t$, em que R é a amplitude máxima (valor máximo em módulo de $\pm x$) e o período (tempo de um ciclo) é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{ver em MHS, Seção 2.1.3, Equações 4 e 5}). \quad (0)$$

Vamos verificar que existe uma analogia entre esse MHS e as oscilações LC.



Sendo $U =$ Energia potencial do MHS $= \frac{1}{2}kx^2$

$K =$ Energia cinética do MHS $= \frac{1}{2}mv^2$

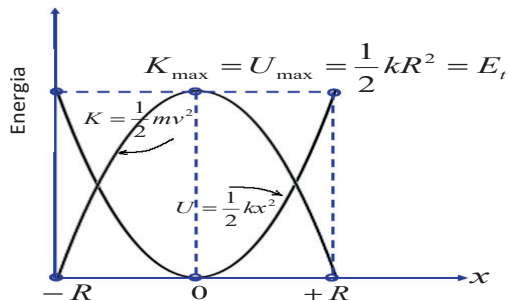
$R =$ Amplitude máxima

$$E_t = K + U$$

$$K + U = K_{\max} = U_{\max} = \frac{1}{2}kR^2 = E_t = \frac{1}{2}m v_0^2$$

$$U = U_{\max}\cos^2\omega t \text{ }^{44}$$

$$K = K_{\max}\sin^2\omega t \text{ }^{45}$$



Energia de um oscilador MHS massa-mola.

⁴⁴ $x = R\cos\omega t$, ver secção 2.1.3, MHS equação 4b 2, $\therefore U = \frac{1}{2}kR^2\cos^2\omega t = U_{\max}\cos^2\omega t$.

⁴⁵ Da mesma forma: $v = \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin \omega t \therefore K = \frac{1}{2}m \omega^2 R^2 \sin^2\omega t = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\omega t = K_{\max}\sin^2\omega t$, $m\omega^2 = k$, Equação (4a) do MHS.

Utilizando o princípio da conservação da energia para oscilações LC (ver Seções 5.19 e 5.21):

$$E_t = E_e + E_B = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \text{constante} \quad (1a)$$

Derivando:

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \right) \Rightarrow Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0 \quad (1b)$$

Porém, $i = \frac{dq}{dt}$ e $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Substituindo: $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (2)$

Equação diferencial de 2ª ordem.

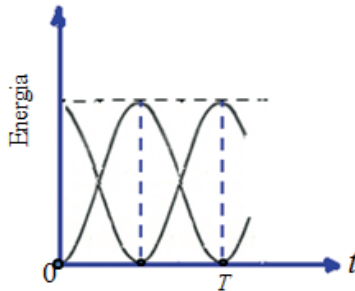
Matematicamente idêntica a $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ da massa-mola.

Solução: $x = R \cos \omega t$

Portanto, para as oscilações LC $q = q_{\max} \cos \omega t$

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_{\max} \sin \omega t \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_{\max} \cos \omega t$$

Substituindo: $-L\omega^2 q_{\max} \cos \omega t + \frac{1}{C} q_{\max} \cos \omega t = 0$

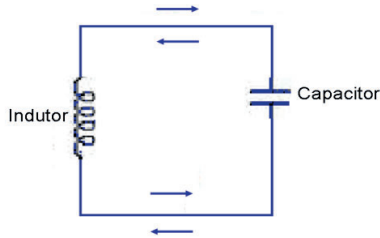


Simplificando: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (1c)$

Como: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ver Equação (3c), Capítulo 2, MHS.

Temos: $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (período)

$$E_B + E_e = E_{B_{\max}} = E_{e_{\max}} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = E_t$$



$$E_e = E_{e_{\max}} \cos^2 \omega t$$

$$E_B = E_{B_{\max}} \sin^2 \omega t$$

O indutor armazena energia magnética, e o capacitor armazena energia elétrica. A partir disso, temos a seguinte analogia com as fórmulas de energia:

Mecânicas		Eletromagnéticas	
Mola	$U = \frac{1}{2} kx^2$	Capacitor	$E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
Massa	$K = \frac{1}{2} mv^2$	Indutor	$E_B = \frac{1}{2} Li^2$

Grandezas eletromagnéticas que correspondem a grandezas mecânicas:

$v = \frac{dx}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
---------------------	---------------------

q corresponde a x

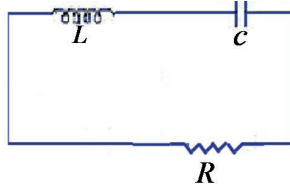
i corresponde a v

C corresponde a $\frac{1}{k}$

L corresponde a m

Naturalmente, o que acabamos de apresentar são casos ideais, nos quais não existe dissipação de energia por atrito ou resistência elétrica. No caso geral, devemos admitir que elas existam.

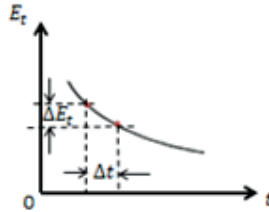
Seja o circuito LCI em que R simboliza as perdas pela resistência elétrica transformadas em energia térmica.



Então teremos, em lugar do que existe na Equação (1b), o seguinte:

$$\frac{dE_t}{dt} = -i^2 R \text{ [ver Seção 5.21, Equação (2)]} \quad (1d)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_t}{\Delta t}$$



O sinal negativo significa que E_t decresce com o tempo, e a perda é transformada em energia térmica por efeito Joule.⁴⁶

A equação diferencial se torna: $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$ pois: $\frac{dE_t}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}i = -Ri^2$ (1d1)

As oscilações tornam-se amortecidas, tendendo a se anular.

Para evitar isso, a energia dissipada deve ser reposta, intercalando no circuito uma fem ΔV_e , que varia senoidalmente. Nesse caso, teremos oscilações forçadas.

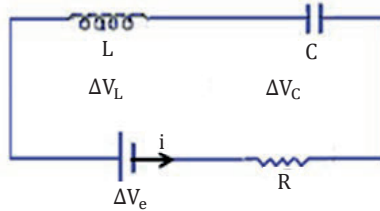
Pela lei de Ohm:

$$-Ri = \Delta V_L + \Delta V_C - \Delta V_e \Rightarrow \Delta V_L + \Delta V_C + Ri = \Delta V_e$$

⁴⁶ Enquanto Δt cresce, ΔE_t decresce, logo, como: dt e dE_t , têm sinais contrários \therefore o sinal negativo.

$$\Delta V_e = \Delta V_{e_0} \text{sen} \omega_f t \quad 47$$

ω_f é a velocidade angular da fem ΔV_e , oscilante.

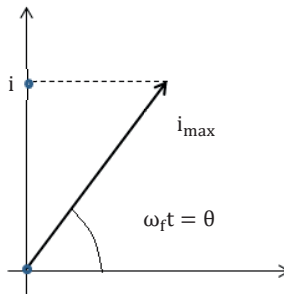


A potência média será máxima quando $\omega_f = \omega$ onde ω frequência característica do circuito LC e dizemos que o circuito está em “ressonância”. (1e)

ϕ = diferença de fase entre corrente i e ΔV_e , que é a diferença de potencial, fem aplicada.

$$i = i_{\max} \text{sen}(\omega_f t - \phi)$$

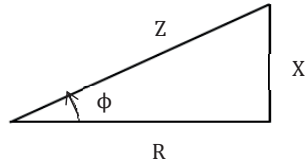
Reatância do circuito: $X = X_L - X_C$ (1f), em que $X_L = \omega_f L$, é reatância indutiva e $X_C = 1/\omega_f C$, reatância capacitiva.



Impedância: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Graficamente:

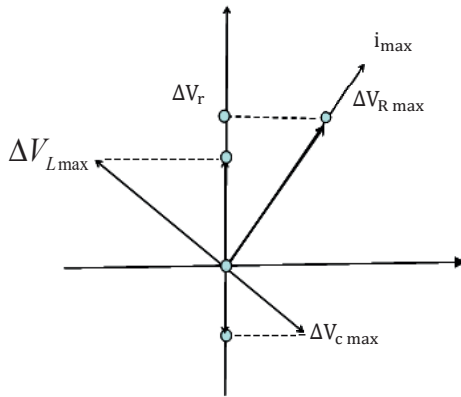
⁴⁷ ω_f frequência do gerador de fem, ou seja, gerador de corrente alternada (alternador).



Em que:

$$\phi = \text{arc tan} \frac{X}{R} \quad (3)$$

R = resistência



$$\Delta V_{R\text{max}} = i_{R\text{max}} R$$

Em fase $\phi = 0$ $\text{sen} \omega t$

C = capacidade

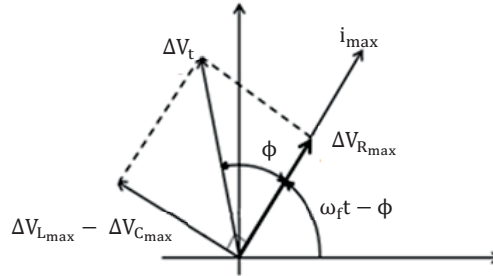
i_c avançado 90° sobre ΔV_c

X_c = reatância capacitiva

$$\phi = -90^\circ$$

$\text{sen} (\omega t + 90^\circ)$

$$X_c = \frac{1}{\omega t C} \quad \Delta V_{C\text{max}} = i_{C\text{max}} X_c$$



L = indutância i_L atrasado 90° sobre ΔV_L

X_L = reatância indutiva

$\phi = +90^\circ$

sen $(\omega t - 90^\circ)$

$X_L = \omega_j L$

$\Delta V_{L_{\max}} = i_{L_{\max}} X_L$

$\Delta V_e^2 = \Delta V_{R_{\max}}^2 + (\Delta V_{L_{\max}} - \Delta V_{C_{\max}})^2$

Z = impedância

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, ver equação 1f, $X = X_L - X_C$, reatância.

$$i_{\max} = \frac{\Delta V_L}{Z} \quad \tan \phi = \frac{\Delta V_{L_{\max}} - \Delta V_{C_{\max}}}{\Delta V_{R_{\max}}} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \tan \phi = \frac{\Delta V_L - \Delta V_C}{\Delta V_R}$$

A Potência média (também chamada Potência eficaz) é:

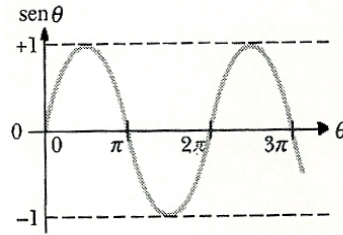
$$P_{med} = \frac{1}{2} I^2 R = \left(\frac{i_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 R \quad \therefore P_{med} = \Delta V_{rms} i_{rms} \cos \phi$$

Sendo: $i_{rms} = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$ ⁴⁸ $\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{R_{\max}}}{\sqrt{2}}$ $\cos \phi = \frac{\Delta V_{R_{\max}}}{\Delta V_e} = \frac{R}{Z}$, ver Equação (3)

$\cos \phi$ = fator de potência

⁴⁸ i não varia linearmente de 0 a i_{\max} , mas de 0 a i_{\max}^2 , por isso a utilização da média quadrática: $i_{med} = \sqrt{\frac{0 + i_{\max}^2}{2}}$. Ver média quadrática em Estatística.

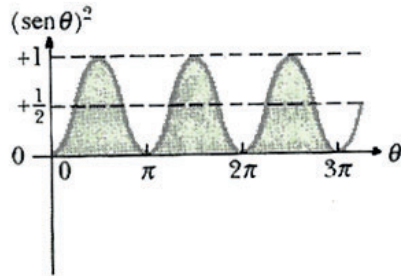
rms = *root mean square* = valor médio quadrático



$$P = i^2 R = i_{\max}^2 R \text{sen}^2(\omega_f t - \phi)$$

$$P_{\text{med}} = \left(i_{\max} / \sqrt{2} \right)^2 R = \frac{1}{2} i_{\max}^2 R$$

O valor médio em um ciclo é nulo.



Valor médio em um ciclo: $\frac{1}{2}$

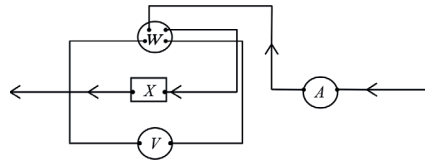
Na ressonância: $X_L - X_c = \omega L - 1/\omega C = 0$, pois $i_{\max} = \frac{\Delta V_e}{R}$ e também $Z = R$. Recordar que na ressonância $\omega_f = \omega$.

Logo: $\frac{1}{\omega C} = \omega L \therefore \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ o mesmo valor achado para o circuito LC , ver Equação (1c).

Para simplificar, denotamos a potência média P_m com P e i_{rms} e ΔV_{rms} com I e V . A potência média se torna: $P = P_m = \frac{i_{\max} \Delta V_{R\max}}{2} \cos \phi$.

$$\therefore P = VI \cos \phi$$

Para medir o fator de potência $\cos\phi$, utilizamos simultaneamente um voltímetro, um amperímetro e um wattímetro.



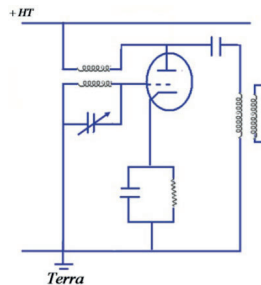
5.22.1 Exemplos ilustrativos

Nas redes domésticas e industriais, temos exemplos do que foi apresentado. A rede em si, considerando as fiações, é resistiva, assim como lâmpadas e chuveiros, fornos e aquecedores elétricos; os motores a indução usados em refrigeradores, liquidificadores, ar-condicionado, máquina de lavar roupa, pratos, têm carga indutiva. A entrada da rede doméstica é com diferença de potencial, geralmente chamada de tensão elétrica, de $110V$ para iluminação e $220V$ para força. A fem aplicada que vem da rua através de transformadores abaixadores de tensão,⁴⁹ distribui a energia elétrica que costuma vir das hidrelétricas.

Nas redes elétricas industriais, utilizam-se tensões geralmente de $220V$, $380V$ e até $3.800V$, conforme seu porte. Além disso, as redes industriais normalmente são trifásicas.

Essas redes são de corrente alternada, como, aliás, foi sugerido no desenvolvimento teórico. Em todo circuito oscilante, a corrente elétrica que o percorre é alternada. Os circuitos normalmente não são ressonantes.

Por outro lado, o circuito oscilante é amplamente utilizado em telecomunicações e, normalmente, em ressonância, conforme visto no texto indicado com (1e), entre aspas.⁵⁰

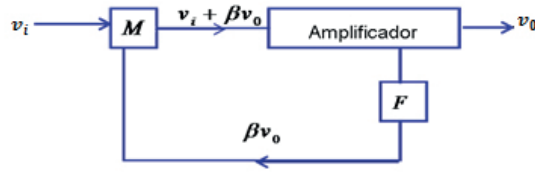


Como exemplo, temos um oscilador em telecomunicações usando válvula triodo.

⁴⁹ Inclui linhas de transmissão, incluindo as linhas de alta tensão. Em todos esses, naturalmente, ocorrem perdas.

⁵⁰ A ressonância é encontrada sempre em um sistema, por exemplo, quando sintonizamos o rádio em uma estação transmissora. As emissoras transmitem com oscilações forçadas, porém, cada ajuste do sintonizador corresponde a uma frequência natural do receptor. Quando essa frequência coincide com a da estação transmissora, a energia absorvida é máxima e essa é a única estação que ouvimos.

Esquemáticamente:



Há uma “realimentação positiva”. Uma fração βv_0 do sinal de saída ($\beta < 1$) é selecionada pelo circuito de realimentação (em F). Esse sinal retorna para a entrada, onde é misturado (em M) com o sinal original de entrada (em M) para reforçá-lo, compensando as perdas resistivas.

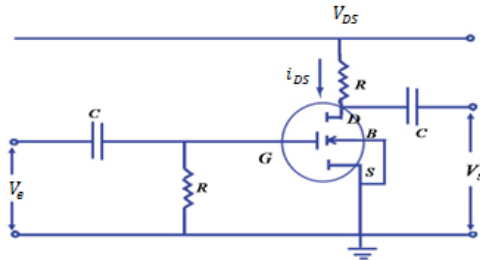
Ganho do amplificador é: $g = \frac{v_0}{v_i + \beta v_0}$

Há ganho de voltagem e amperagem, pois a impedância do circuito é constante.

Ganho efetivo: $g' = \frac{v_0}{v_i} = \frac{g}{v_i} (v_i + \beta v_0) = g \left(1 + \beta \frac{v_0}{v_i} \right) = g(1 + \beta g')$

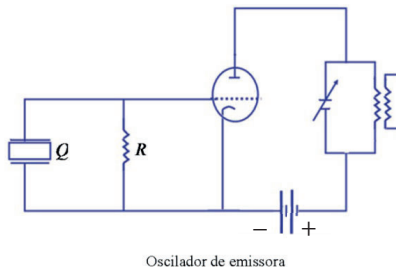
Combinando os dois: $g' = g + \beta g g' \Rightarrow g'(1 - \beta g) = g$

$$g' = \frac{g}{1 - \beta g}$$



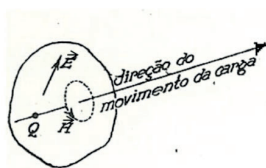
A válvula triodo é amplificadora. Atualmente, usamos um transistor de efeito de campo semiconductor metal-óxido (MOSFET) como amplificador.

Apresentamos as propriedades piezelétricas e a manutenção de uma frequência constante do quartzo, na Seção 2.1.6, “Quartzo”.



A placa de quartzo Q , cortada normalmente ao eixo principal do cristal, é colocada entre as placas de um condensador. A lâmina de quartzo tem uma frequência de oscilação própria, que é função da espessura δ do cristal. O comprimento de onda é $\lambda = 103,6\delta$ (λ em m e δ em mm). A capacidade do condensador oscilará com o mesmo ritmo, sintonizando-se o circuito anódico com a frequência. As oscilações do quartzo se sustentam devido ao retroacoplamento da capacidade grade-anodo (placa); HÜTTE.

5.23 OSCILAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS



Uma carga elétrica Q produz ao seu redor um campo elétrico \vec{E} . Se a carga elétrica estiver em movimento, ocorrerá uma corrente elétrica.

Como a corrente elétrica produz ao seu redor um campo magnético \vec{H} , concluímos que uma carga elétrica em movimento produz ao seu redor dois campos: o elétrico, que existe sempre, e o magnético, produzido por estar em movimento.

Segundo a teoria quântica, a corrente elétrica, que em um condutor é formada essencialmente de elétrons livres em movimento, faz elétrons livres colidirem com os elétrons que orbitam nos átomos. Com o choque, o elétron da órbita escapa e a órbita fica vaga de um elétron. O elétron de uma órbita mais afastada salta para a órbita vaga. Ao fazê-lo, perde energia, que escapa do átomo na forma de um *quantum* de energia, que Einstein chamou de fóton na sua teoria do efeito fotoelétrico, confirmando o que Planck afirmara a respeito de a energia ser composta de “pacotes de energia” denominados *quanta* (plural de *quantum* em latim). O *quantum* é uma quantidade de energia indivisível, isto é, a menor parcela possível de energia. Os fótons oscilam transversalmente à propagação das ondas que são formadas. A velocidade de propagação é a da luz, cerca de 300.000 km/s no vácuo. Seu valor mais aceito é de

$299.792,458 \text{ km/s}$. Mais detalhes da teoria dos quanta serão apresentados oportunamente (ver Anexo 6, equação 0 e páginas seguintes).

Conclui-se, então, que existe uma relação entre a corrente alternada e a frequência das ondas eletromagnéticas resultantes, entre outras características.

Em 1832, Kohlrausch e Weber determinaram a relação das unidades eletrostáticas e eletromagnéticas chegando a um valor próximo da velocidade da luz. Levando em consideração essas experiências, Maxwell em sua obra *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, de 1873⁵¹ [no final desta Seção 5.23, Equação (5)], deduziu essa relação de forma matemática, mostrando como ela surgia, ver também na Seção 5.23.1, Velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo.

Nas palavras de Maxwell, a velocidade da ondulação transversal em nosso meio hipotético, calculada das experiências eletromagnéticas de Kohlrausch e Weber, concorda tão exatamente com a velocidade da luz das experiências óticas de M. Fizeau, que mal podemos evitar a conclusão de que a “luz consiste em ondulações transversais do mesmo meio, que é a fonte dos fenômenos elétricos e magnéticos”. Essas palavras refletem o raciocínio e o vocabulário daquela época.

Considerando um ponto P , bastante afastado da fonte emissora, de modo que as frentes de onda passando sejam essencialmente planas. Os campos elétrico e magnético são perpendiculares entre si e ambos perpendiculares à direção de propagação. Façamos o eixo X , direção da propagação e Y e Z paralelos aos campos \vec{E} e \vec{B} .(a)

Esses campos se desenvolvem da seguinte forma: quando \vec{E} é máximo, \vec{B} é nulo e vice-versa. Isso está de acordo com a distribuição das energias em um circuito LC (ver Seção 5.22), pois as intensidades dos campos elétrico e magnético são proporcionais às respectivas energias.⁵²

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } E_x &= 0 & E_y &= E & E_z &= 0 \\ B_x &= 0 & B_y &= 0 & B_z &= B \end{aligned}$$

Suponhamos os campos no vácuo. Logo, não há cargas livres nem correntes: $\rho = 0$ e $\rho v = 0$, pois $\rho v = di/dS$, levando em conta que: $\rho = dq/dV$ e $i = -dq/dt$ (ver Seções 5.9 e 5.16) e diferenciando:

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = di \implies \frac{di}{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n}$$

\vec{n} vetor unitário normal à superfície dS (ver Seção 5.4).

⁵¹ Mencionada na Seção 5.16, na página inicial da Seção 5.16.

⁵² Quando a energia elétrica está preenchida, a energia magnética está vazia e vice-versa. Há troca de energia entre campo elétrico e campo magnético. A energia total é conservada. Veremos na Seção 5.26, Equações 5.7 e 5.8 que as energias eletromagnéticas são proporcionais, respectivamente, aos quadrados de \vec{E} e \vec{B} .

5.23.1 Lei de Gauss para o campo elétrico

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \therefore \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \text{ ver final da Secção 5.10 e anterior.}$$

5.23.2 Lei de Gauss para o campo magnético

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \therefore \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \text{ ver final da Secção 5.12 e anterior.}$$

5.23.3 Lei de Faraday-Henry

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad \therefore \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \text{ ver final da Secção 5.15.2 e anterior}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \therefore \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{ ver final da Secção 5.15.2 e anterior (0)}$$

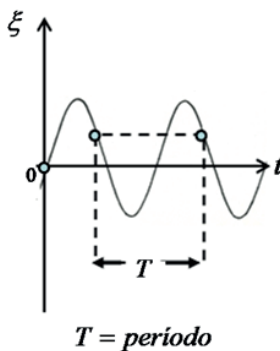
5.23.4 Lei de Ampère-Maxwell

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \therefore \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \text{ ver final da Secção 5.16 e anterior}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \therefore -\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \text{ ver final da Secção 5.16 e anterior (1)}$$

\bar{E} e \bar{B} não dependem de y ou z , pois variam com x e t , sendo constantes com y e z .

As intensidades dos campos \bar{E} e \bar{B} dependem de x e t .



Têm o mesmo valor em todos os pontos pertencentes a planos perpendiculares ao eixo x .

Seja a função senoidal: $\xi = \xi(x, t) = \xi_0 \text{ s e } k(x - vt)$

Vamos mostrar que satisfaz à equação diferencial:

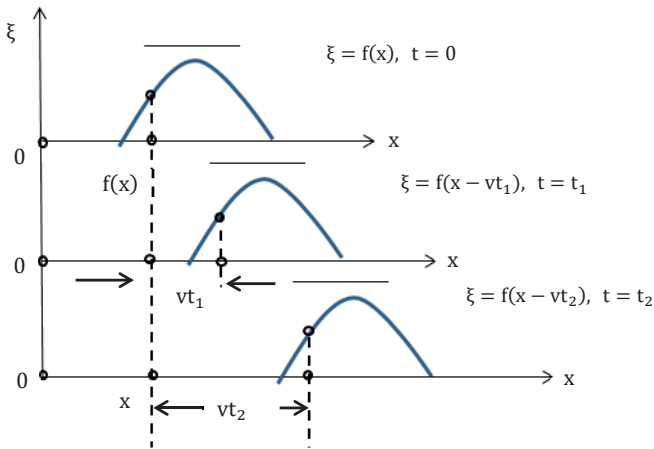
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Em que: v = velocidade de propagação.

Temos novamente uma equação diferencial de 2ª ordem como visto para o circuito LC e o MHS [ver Seção 5.22, Equações (1b) e (2)].

$\xi = \xi(x, t)$ é uma função periódica, como já visto no MHS [Seção 2.1.3, Equação (4b1)], isto é, o valor de ξ se repete após um intervalo de tempo T, chamado período.

Seja $\xi = f(x - vt)$. Chamando $u = x - vt$ (a)



Teremos: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial u}{\partial t} = -v$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}$$

Pela regra de cadeia:

$$\therefore \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{d\xi}{du}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

$$\text{Pois: } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{d^2 \xi}{du^2} (-v) = v^2 \frac{d^2 \xi}{du^2} \quad (1)$$

$$\text{Pois: } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{d \xi}{du}$$

$$\text{Logo: } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \text{ já que } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \quad (2)$$

$$\text{E: } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$$

Voltando às equações anteriores de \vec{E} e \vec{B} :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\text{Pois } \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{Logo: } \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\text{Comparando com a Equação (2) senoidal apresentada acima: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

Em que c , como será visto, é a velocidade da luz no vácuo.

$$\text{Portanto: } E = E(x - ct)$$

$$\text{Também teremos: } \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (6) \quad B = B(x - ct)$$

Consideraremos ondas harmônicas com frequência: $\gamma = \omega/2\pi$ e comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, onde k é o n° de comprimentos de onda em 2π rad [ver anexo A.6, páginas iniciais Equação da onda de Schrödinger, Equações (a) e (b)].

$$\text{Obtemos: } E = E_0 \text{sen } k(x - ct) = E_0 \text{sen } (kx - \omega t) \quad (7)$$

Veremos no Anexo 6 em Resolução da Equação da Onda, como resolver, Equações (8a) e (8b).

$$B = B_0 \text{sen } k(x - ct) = B_0 \text{sen } (kx - \omega t) \quad (8)$$

Usamos $\omega = kc$, ver Anexo 6.4.1 “Em outras palavras”, Equação (0):

$$\therefore \frac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \cos k(x - ct) \quad \text{e} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -kcB_0 \cos k(x - ct)$$

Como $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$, ver Equação (0), lei de Faraday-Henry, teremos:

$$E_0 = cB_0 \therefore E = cB \quad (9)$$

5.23.5 Velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo

Sendo: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ weber/amp} \cdot \text{m}$ e $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

(Ver Seção 5.1, desenvolvimento da fórmula de Coulomb para ϵ_0 , e Seção 5.16 para μ_0 .)

$$1 \text{ weber} = \text{Tesla} \cdot \text{m}^2 = \text{m}^2 \text{kg}/(\text{Cs})$$

$$1 \text{ Tesla}, \text{ unidade de } B \qquad 1T = \text{kg}/(\text{Cs})$$

μ_0 = constante de permeabilidade no vácuo (ver Seção 5.24), como: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

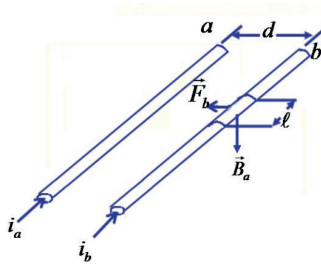
Teremos: $c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8,9 \times 10^{-12})}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo. (7)

Concordando, assim, com as medições de M. Fizeau para velocidade da luz no vácuo.

$$\begin{aligned} \text{Análise dimensional: } & \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{s} \times \text{C} \cdot \text{m}} \right] \times \left[\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right] = [\mu_0] \times [\epsilon_0] = \frac{1}{[\text{c}^2]} \\ & = (\text{kg} \cdot \text{s}/\text{m} \cdot \text{s})(1/\text{N}) = (\text{kg} \cdot \text{s}/\text{m} \cdot \text{s})(\text{s}^2/\text{kg} \cdot \text{m}) = \text{s}^2/\text{m}^2 \qquad N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \end{aligned} \quad ^{53}$$

⁵³ N é Newton, unidade de força no sistema MKSC, ver Seção 4.4.

5.24 FORÇAS ENTRE CORRENTES



$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Pela lei de Ampère- Maxwell (ver Seção 5.16).

$$\vec{F}_b = i_b \vec{\ell} \times \vec{B}_a$$

Outra forma da lei da indução magnética, pois $d\vec{F} = dq \frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \vec{B} = id\vec{\ell} \times \vec{B}$ aplicando:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{ver Seção 5.11, sobre indução magnética e integrando: } \vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Então, em módulo: $F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$, pois $\vec{\ell} \times \vec{B}_a = l B_a \sin 90^\circ$ e $\sin 90^\circ = 1$.

Logo, podemos definir o Ampère: corrente que, circulando em dois condutores paralelos separados por uma distância de um metro, produz uma força,⁵⁴ sobre cada condutor, de $2 \times 10^{-7} N$ por metro de comprimento de cada um deles:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ weber/A} \cdot \text{m}) (1A)^2}{2\pi(1m)} = 2 \times 10^{-7} N/m$$

Análise dimensional: $\frac{(m^2 \text{kg s/C}^2 \text{m} \cdot \text{s})(\text{C}^2/\text{s}^2)}{m} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \text{m} = N/m$, ver N no final da Seção 5.23.5.

μ_0 = constante de permeabilidade no vácuo com valor atribuído de: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ weber/A} \cdot \text{m}$ para fornecer a força F/ℓ desejada (ver Seção 5.23.5).

Na prática, utiliza-se uma balança de corrente. Um dos pratos é conectado a duas bobinas que se inter-relacionam, em vez de dois fios, por onde passa a mesma corrente. Surge então, uma força que age

⁵⁴ Se as correntes tiverem o mesmo sentido, teremos em cada um, força de atração.

no prato e que deve ser contrabalançada no outro prato com pesos. Estes fornecem a força, que deve ser calculada com outra fórmula, por se tratar de espiras.

Se tomarmos a fórmula $F = \mu_0 \ell i^2 / 2\pi d$ e fizermos $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$, obteremos: $F = K_m \frac{2i^2}{d} \ell$.

Como vimos na Secção 5.1: $K_e = 1/4\pi\epsilon_0$, recorde-se que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ weber/A.m (ver Secção 5.23.5, sobre a velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo).

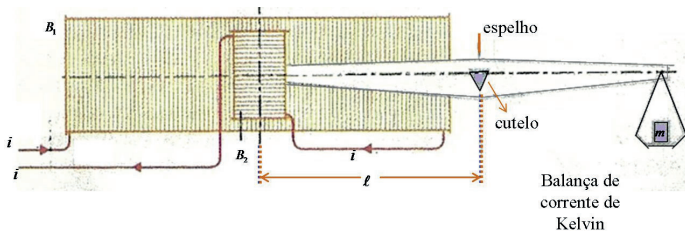
Relacionando os dois: $\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$ como visto na Secção 5.23.5.

$K_e = K_m c^2 = 10^{-7} c^2$. Isso explica a escolha para K_e na Secção 5.1.

Então, c é a velocidade da onda eletromagnética e igual à velocidade da luz. Para Maxwell, esse foi o primeiro indício de que a luz é uma onda eletromagnética. Heinrich Hertz provou que as ondas eletromagnéticas têm a velocidade da luz. A experiência foi feita com oscilador por meio de transformador com bobina de Ruhmkorff (SALMERON, ALONSO, FINN). A previsão de Maxwell conduziu ao conceito de espectro eletromagnético e à descoberta das ondas de radio por Hertz em 1890. Os experimentos tornaram possível o estudo da ótica como ramo do eletromagnetismo, com as leis fundamentais das equações de Maxwell.

5.24.1 Exemplo ilustrativo

Considere um eletrodinamômetro Ampère-padrão.



É constituído de uma bobina fixa B_1 e uma bobina móvel B_2 na outra extremidade do travessão. O campo produzido pela corrente i no seu interior não é uniforme, mas proporcional a i . O conjugado $m\ell$ que tira o travessão da balança da horizontal é proporcional a i^2 .

Coloca-se um contrapeso m no prato da balança para fazer o travessão voltar à posição horizontal.⁵⁵

A equação de equilíbrio será: $ai^2 = mg\ell$

⁵⁵ Para facilitar esse trabalho, usa-se um espelho sobre o travessão, na posição sobre o cutelo. Um raio de luz incide no espelho e seu reflexo indica a posição de equilíbrio.

Logo: $i = \sqrt{\frac{g\ell}{a}} \sqrt{m}$ em que a é uma constante característica do instrumento.

É determinado fazendo-se passar a mesma corrente no aparelho e em um eletrodinômetro absoluto.

Após graduado, o aparelho permite medir i com uma precisão de $1/10000$, e pode ser utilizado nos laboratórios para a verificação de amperímetros.

O eletrodinômetro absoluto tem a bobina B_1 longa e larga, e a menor, B_2 , é colocada no campo aproximadamente uniforme, produzida pela maior B_1 .

Se n o número de espiras por cm de B_1 , N é o total de espiras da menor B_2 . S é a superfície em cm^2 da menor e a é o termo corretivo pelo comprimento finito de B_1 . Igualando os conjugados, teremos: $4\pi NS(1-a)i^2 10^{-2} = mg\ell$

Daqui explicitamos i : como se despreza a influência do campo terrestre sobre B_2 , pode-se eliminar sua influência invertendo o sentido da corrente na bobina fixa, sem mudar na móvel.

A massa necessária para restabelecer o equilíbrio será $2m$, pois a ação da Terra é a mesma em ambos os casos e a ação da bobina fixa é trocar de sinal.

O eletrodinômetro Ampère-padrão tem a bobina B_1 muito curta

(LAROUSSE, LEMOINE – GUYOT).

Definido o Ampère, podemos determinar o Coulomb como a quantidade de carga que flui através de qualquer seção transversal de um condutor em 1 segundo, quando a corrente é de 1 Ampère.

5.25 TENSOR DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

5.25.1 Quadripotencial

Vimos na Seção 5.5 que $\vec{F}/q = \vec{E}$, campo elétrico, e na Seção 5.17.1, $\vec{E} = -\text{grad}V$, sendo V o potencial elétrico. Chamemos V de φ , então teremos: $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, em notação tensorial: $E_i \vec{e}_i = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \vec{e}_i$. Nota-se que o gradiente sempre terá as suas componentes iguais à derivada em relação às correspondentes coordenadas.

As propriedades do campo elétrico são caracterizadas por um quadrivetor A_i , chamado quadripotencial, cujas componentes são funções das coordenadas e do tempo. Expressamos sua “Ação” por meio do termo: $S = \frac{q}{c} \int_a^b A_i dx_i$. (a)

De acordo com a definição da função “Ação”, apresentada no Anexo 3, equação 2: $S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F dt dx$, sabemos que $F = qE$ e $c = d\tau/dt \therefore dt = d\tau/c$, substituindo, obtemos: $S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{qE_i}{c} d\tau dx_i$, $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, logo $E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \Rightarrow d\varphi = -E_i dx_i$

$$\therefore \varphi = -\int_a^b E_i dx_i \Rightarrow S = -\frac{q}{c} \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} E_i dx_i dt$$

Então: $A_i = -\int_a^b E_i dx_i$ e assumindo $\tau = x_4$, no sistema de coordenadas quadridimensional.

$S = \frac{q}{c} \int_a^b A_i dx_i$, isto é, A_i tem dimensões de um potencial, considerado um potencial mais genérico, utilizado no sistema de coordenadas quadridimensional, por isso, é chamado de Quadripotencial.

As três componentes espaciais do quadrivetor A_i formam um vetor tridimensional \vec{A} , chamado “vetor potencial” do campo. A componente temporal do quadrivetor A_i é imaginária e descrita como $A_4 = i\varphi$.

O real φ é chamado “potencial escalar” do campo:

$$A_{1,2,3} = A_{x,y,z} \quad A_4 = i\varphi \quad ^{56}$$

Como consequência, temos: $S = \int_a^b \left(\frac{q}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} - q\varphi dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi \right) dt$ (b), $d\vec{r} = \vec{v} dt$ e $d\tau = c dt$

Então, a energia será: $L = \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi$, pois $S = \int L dt$, ver Anexo 3, equação 2.

Derivando em \vec{r} : $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} L = \frac{q}{c} \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \text{grad}\varphi$ ⁵⁷

Como: $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b}$

Deriva-se em relação a \vec{r} , supondo \vec{v} cte:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} - q \text{grad}\varphi$$

A “Ação”, como visto no Anexo 3, é $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{x_1}^{x_2} p dx$ (1)

Em um sistema de referências inercial relacionado a coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow -ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Fazendo: $d\tau = ic dt$, obtemos: $-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$, ou seja, $-ds^2$ é a resultante dos quatro infinitésimos: dx, dy, dz e $d\tau$ no sistema de coordenadas tetradimensional, de uma forma semelhante ao obtido por meio do Teorema de Pitágoras para espaço tridimensional. Como ds tem características similares a dx, dy, dz e $d\tau$, é possível expressar S como: $S = -\alpha \int_a^b ds$, sendo α uma constante a determinar. Recorde-se que: $S = \int_a^b \left(\frac{q}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} - q\varphi dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi \right) dt$ (b), $d\vec{r} = \vec{v} dt$ e $d\tau = c dt$ ver equação 1.

⁵⁶ Curiosamente, trata-se de um tensor misto de três componentes de vetor e um componente de escalar.

⁵⁷ É um vetor cujas componentes são as derivadas de L em relação às componentes do vetor \vec{r} .

Na Seção 7.2, equação 2 determinamos que ds , será: $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (1a), que fornece a relação entre ds e dt .⁵⁸

Comparando com a Equação (1), a lagrangeana L será expressa como: $L = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}$. No caso mais simples, a lagrangeana será formada com a energia cinética: $L = 1/2 m_0 v^2$ (2).

Desenvolvendo $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ como uma série de Maclaurin: $(1 + x)^k = 1 + kx + \dots$, pelo Binômio de Newton quando k for fracionário, isto é, não inteiro. $|x| < 1$ (GRANVILLE). (3)

Obtemos: $(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx 1 - v^2/2c^2 \therefore L \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$. Como S, L deve ser integrado, e o termo constante αc desaparece na integração definida. Comparando com a Equação (2), $\alpha = m_0 c$, constantes que tem dimensão de quantidade de movimento. $\therefore L = -m_0 c^2 + \frac{mv^2}{2}$, sendo $m_0 c^2$ energia de repouso, para $v = 0$. Com isto, $S = -m_0 c \int_a^b ds$ (3)

Adicionando-se a "Ação" devida à partícula material: $S = -mc \int_a^b (ds + \frac{q}{c} A_i dx_i)$, fazendo: $m_0 = m$, ver também Equações (a) e (b).

$$\text{Obtemos: } L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi \quad (3a1)$$

Derivando em \vec{v} , temos a quantidade de movimento, conforme Anexo 3, equação 2a, $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$.

Na Física clássica, seria $m\vec{v}$, generalizada aqui como:

$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$, quando $v \ll c$, $\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \vec{p}$ da Física clássica. O 1º termo é espacial e o 2º, temporal.

$$\text{Como: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial (d\vec{r}/dt)} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\text{Teremos: } \frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \right) = \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} - q \text{grad} \varphi = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad (3a)$$

A derivada substancial: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$, ver Shames e Borisenko.

A derivada total $\frac{d\vec{A}}{dt}$ é composta da variação do vetor potencial em relação ao tempo: $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ no ponto dado do espaço, mais a variação quando se passa de um ponto do espaço a outro, que se encontra à distância $d\vec{r}$, cuja variação no tempo será: $\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{A}$.

Outra forma mais simples de resolver matematicamente por cálculo vetorial e diferencial é com a utilização da regra de cadeia. Considerando que: $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, e também:

⁵⁸ $\frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}$, como: $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, obtemos a expressão anterior.

$$v_x = f[x(t), y(t), z(t), t]$$

$$v_y = g[x(t), y(t), z(t), t]$$

$$v_z = h[x(t), y(t), z(t), t]$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ ou tensorialmente: } \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mathfrak{C} \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ sendo } \mathfrak{C}, \text{ produto diádico.}$$

Então: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \text{ grad} \varphi + \frac{q}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A}$, obtida substituindo $\frac{d\vec{p}}{dt}$ na Equação 3a e, em consequência, elimina-se o termo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$.

Temos aqui duas parcelas:

Vetor “Campo elétrico”: $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi$, diferentemente do caso acima, que se referia a \vec{E} constante no tempo. Em consequência, \vec{A} também.

A 2ª parcela é o vetor “Campo magnético”: $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, para $i, j, k = 1, 2, 3$.

$$\text{Então, temos: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \text{ pois } \vec{H} = \vec{B}c \quad (4)$$

Como será visto na Seção 5.26, Equação (5.9). Essa expressão é a força de Lorentz, como visto na Seção 5.11, Equação (2).

Chamando X, Y e Z as componentes do campo elétrico \vec{E} , e considerando o espaço vazio, isto é, sem matéria, obtemos pela lei de Gauss para eletricidade ou 1ª lei de Maxwell, ver Seção 5.10, Equação (2):

$$\text{div } \vec{E} = 0 \text{ Logo: } \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \text{ pois, se não houver material e ausência de carga: } \rho = 0 \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Chamando L, M e N as componentes da indução magnética \vec{B} , obteremos, conforme o final da Seção 5.15, Equação (2), sobre a lei de Faraday-Henry ou 3ª lei de Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{ou seja: } \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial t}$$

Conforme vimos na Seção 5.12 sobre a lei de Gauss para o magnetismo, ou 2ª lei de Maxwell, Equação (1), o $\text{div } \vec{B} = 0$ se anula e:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

Levando em conta o espaço vazio, isto é, $\rho = 0$

Sabemos que a velocidade da luz c é cerca de 300.000 km/s ; vamos atribuir o valor 1 para \mathcal{C} . Como $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$, no final da Seção 5.23, conseqüentemente $\epsilon_0\mu_0 = 1$ e, do final da Seção 5.16,⁵⁹ sobre a lei de Ampère-Maxwell, ou 4ª lei de Maxwell, Equação (5):

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ então: } \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$\text{Pois } \rho = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Usando o índice conotando derivada em relação à correspondente variável independente, por exemplo: $N_y = \frac{\partial N}{\partial y}$, podemos escrever:

$$\begin{array}{l} N_y - M_z - X_t = 0 \\ L_z - N_x - Y_t = 0 \\ M_x - L_y - Z_t = 0 \\ X_x + Y_y + Z_z = 0 \end{array} \quad (5.3)$$

$$\begin{array}{l} Z_y - Y_z + L_t = 0 \\ X_z - Z_x + M_t = 0 \\ Y_x - X_y + N_t = 0 \\ L_x + M_y + N_z = 0 \end{array} \quad (5.4)$$

5.25.2 Distribuição da matéria

Podemos considerar a matéria distribuída continuamente no espaço ou a teoria discreta na qual a matéria consiste em pontos materiais, cada um dos quais carrega uma massa finita. A teoria contínua considera a matéria distribuída continuamente através do espaço. Cada uma delas é o caso limite da outra.

Podemos iniciar com pontos materiais, depois aumentar sua quantidade e, ao mesmo tempo, diminuir a massa de cada um, assim, aproximar com algum grau de precisão de uma dada distribuição contínua; ou podemos iniciar com uma distribuição contínua e depois fazer a densidade diminuir em toda

⁵⁹ Fazendo a relação: velocidade/velocidade da luz $\beta = v/c$, quando afirmarmos que $\beta = 0,01$, significa que a velocidade é 1 centésimo ($1/100$) da velocidade da luz, isto é, a velocidade relativa em relação à velocidade da luz, e veremos a importância de se tomar a velocidade da luz no vácuo como referência.

parte, exceto nas vizinhanças constantemente decrescentes de um número discreto de pontos e, assim, aproximar, com qualquer precisão, uma certa distribuição discreta.

Na teoria discreta da matéria, as equações apresentadas anteriormente ainda valem em toda parte, exceto nos pontos ocupados pela matéria, que aparece como singularidade do campo, e algumas características da matéria, como a carga elétrica, aparecem como resíduos correspondentes a essas singularidades. Estes últimos são análogos às singularidades e resíduos da teoria das funções analíticas de uma variável complexa.

Levando em conta a lei de Gauss para eletricidade e a lei de Ampère-Maxwell [Seção 5.10 e final da Seção 5.16, Equações (2) e (5)], e colocando na forma gaussiana (sistema cgs, Seção 2.3), na presença de carga elétrica:

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \text{ ou seja: } \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (5.5)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} 4\pi\rho\vec{v} \quad (5.5b), \text{ isto é: } N_y - M_z - X_t = 4\pi\rho u \quad (5.5c)$$

$$\text{Sendo: } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \quad L_z - N_x - Y_t = 4\pi\rho v$$

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{c^2} \quad (5.5a) \quad M_x - L_y - Z_t = 4\pi\rho w$$

Sendo u, v, w componentes de \vec{v} lembrando que $c^2 = 1$.

No sistema cgs, no caso da indução magnética \vec{B} , o sistema de equações não muda:

$$Z_y - Y_z + L_t = 0$$

$$X_z - Z_x + M_t = 0$$

$$Y_x - X_y + N_t = 0$$

$$L_x + M_y + N_z = 0$$

Temos quatro variáveis independentes x, y, z, t , e seis quantidades componentes dos vetores \vec{E} e \vec{B} : X, Y, Z, L, M, N . Um vetor tem poucas componentes para solucionar a questão. Em vez de usar dois vetores, Minkowski propôs, em 1907, utilizar um tensor de ordem 2. Naturalmente, um tensor tem muitas componentes, em nosso caso, 16: 4 na diagonal principal, 6 acima da diagonal e 6 abaixo.⁶⁰ Fazemos, então os da diagonal principal nulos e os abaixo da diagonal principal com sinal oposto aos de cima. Assim, fica-se com 6 componentes X, Y, Z, L, M, N . Essa restrição é expressa por:

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \quad F_{ij} = -F_{ji} \quad \text{Tensor antissimétrico}^{61}$$

⁶⁰ Ver o conceito de tensor na Seção 5.3.

⁶¹ $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) A_i = potencial vetorial para $i = 1, 2, 3$ e $A_4 = i\phi$

$\vec{H} = \vec{B}c = \text{rot } \vec{A}$, ver Quadripotencial seção 5.25.1, Equação (4).

F_{ij} é chamado “tensor do campo eletromagnético”.

De fato, se $i = j$: $F_{ii} + F_{ii} = 0$, ou seja: $F_{ii} = 0$

F_{ii} são os elementos da diagonal principal.

$$\begin{array}{lll} \text{Teremos: } X = F_{41} & Y = F_{42} & Z = F_{43} \\ & L = F_{23} & M = F_{31} & N = F_{12} \end{array}$$

Para simplificar, usamos para a derivada a notação de Cauchy: $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$

Observando que $F_{14} = -X$, podemos escrever (5.3) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} + \partial_4 F_{14} &= 0 \\ \partial_3 F_{23} + \partial_1 F_{21} + \partial_4 F_{24} &= 0 \\ \partial_1 F_{31} + \partial_2 F_{32} + \partial_4 F_{34} &= 0 \\ \partial_1 F_{41} + \partial_2 F_{42} + \partial_3 F_{43} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Simbolicamente: $\partial_i F_{ji} = 0$

O sinal negativo no 2º membro das Equações em (5.1) ocasiona dificuldades para formar um sistema simétrico ao que vimos no sistema de Equações (5.2). Para superá-lo, usamos o indicado por Poincaré e Marcolongo, e prenunciado por Hamilton desde 1845, ou seja, quantidades imaginárias ao lado de reais. Se soubermos as regras formais de operação, não haverá dificuldades, pois a nova notação é de natureza inteiramente formal. Teremos, então:

$$\begin{array}{llll} x = x_1 & y = x_2 & z = x_3 & cti = x_4 \text{ (5.6b) lembremos } c = 1 \\ iX = F_{41} & iY = F_{42} & iZ = F_{43} & \therefore ti = x_4 \text{ (5.6a)} \\ L = F_{23} & M = F_{31} & N = F_{12} & \end{array}$$

O sistema de Equações (5.3) se transforma no sistema (5.6) como antes, e o sistema (5.4) se transforma em:

$$\partial_2 F_{43} + \partial_3 F_{24} + \partial_4 F_{32} = 0$$

$$\partial_1 F_{34} + \partial_3 F_{41} + \partial_4 F_{13} = 0$$

$$\partial_1 F_{42} + \partial_2 F_{14} + \partial_4 F_{21} = 0$$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

Simbolicamente: $\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$

Podemos arranjar os componentes do tensor em uma disposição quadrada:

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ou seja:} \quad \begin{pmatrix} 0 & N & -M & -iX \\ -N & 0 & L & -iY \\ M & -L & 0 & -iZ \\ iX & iY & iZ & 0 \end{pmatrix}$$

Como $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ $u_4 = i$ pois $x_4 = it$ [ver Equação (5.6a)]

Considerando as equações de Maxwell com matéria (carga elétrica), (5.5) obtemos: $\partial_i F_{ji} = 4\pi\rho u_j$ ⁶²

u_j são componentes do vetor velocidade \vec{v} .

5.26 VETOR DE POYNTING

Para entender o vetor de Poynting, devemos recapitular as energias do campo elétrico e magnético nas Seções 5.19 e 5.21, Equações (1) e (3), $E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ e $E_b = \frac{1}{2} Li^2$

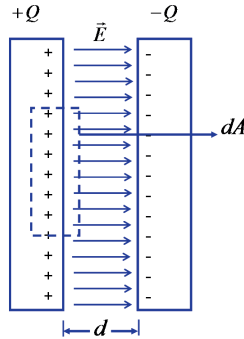
A energia de um condensador carregado está associada ao campo elétrico do condensador e não às cargas nas placas.

A distribuição de energia por unidade de volume é chamada de “densidade de energia” u_e .

Seja um condensador de placas paralelas. Aplicando a lei de Gauss [Seção 5.10, Equações (1a) e (0)], no volume de controle tracejado:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad E \cos \theta \, dA = \frac{dQ}{\epsilon} \quad \theta = 0 \quad \cos \theta = 1$$

⁶² Compara-se com o sistema de Equações 5.3, da qual resultou o sistema 5.5.



Fazendo σ cargas por unidade de área, temos:

Cargas no volume de controle: $dQ = \sigma dA$

$$\text{Logo: } E dA = \frac{1}{\epsilon} \sigma dA \quad \text{e} \quad E = \frac{1}{\epsilon} \sigma \quad (5.6b)$$

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \text{ Seção 5.19, equação 1} \quad \text{Como: } \Delta V = \frac{Q}{C}, \text{ Seção 5.18.}$$

$$E_e = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Densidade de energia elétrica: $u_e = \frac{\frac{1}{2} Q \Delta V}{Ad}$ $A = \text{área da placa, } d = \text{distância entre as placas}$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon E \quad \text{campo elétrico [ver Seção 5.17.1, Equação (1b)]: } E = \frac{\Delta V}{d}, \text{ substituímos em } u_e.$$

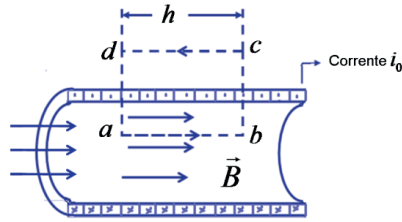
$$\text{Portanto: } u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (5.7)$$

Foi deduzida para um campo uniforme, porém pode ser empregada para campo não uniforme, desde que se conheça \vec{E} no ponto considerado.

Fazendo uma análise dimensional: $E = F/Q$ e $F = K_e Q_1 Q_2 / r^2$, Seções 5.1 e 5.5, ϵ e K_e são constantes de proporcionalidade.

$$|u_e| = \frac{|F|}{|Q|} \frac{|Q|^2}{|Q| \cdot |L|^2} = \frac{|F| \cdot |L|}{|L|^3}, \text{ energia por unidade de volume ou energia volumétrica.}$$

$$\text{Pois: } \frac{|F|}{|Q|} = \frac{|Q|^2}{|Q| \cdot |L|^2} \quad \text{Pela lei de Coulomb: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$



Tomamos um capacitor de placas paralelas como um protótipo para produzir um campo elétrico em certa região do espaço. De maneira similar podemos tomar uma pequena região do centro de um solenoide (bobina) longo como protótipo para produzir um campo magnético em certa região. Ver Figura no exemplo ilustrativo da Seção 5.24.1, sobre o Eletrodinômetro Ampère padrão.

Aplicando a lei de Ampère, ver Seção 5.16, Equação (1): $\int_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$ no circuito *abcd*, obtemos no trecho *ab*, como $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cos \theta d\ell$ e $\theta = 0$, $\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = Bh$

Nos trechos *bc* e *da*, como $\theta = 90^\circ$, as integrais são nulas.

No trecho *cd*, a integral será nula, pois o campo \vec{B} é praticamente nulo, fora da bobina.

Em consequência: $\int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = Bh = \mu_0 i$

Em cada espira, a corrente é i_0 . Fazendo n n° de espiras por unidade de comprimento do solenoide, em h teremos nh espiras. Logo: $Bh = \mu_0 i_0 nh$ e $B = \mu_0 i_0 n$

Para simplificar, denotamos a corrente que passa em cada espira por i , escrevendo: $B = \mu_0 in$.

Da Seção 5.12, o fluxo magnético pela superfície A delimitada pela parte interna de uma espira será: $\phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int B \cos \theta dS$ como $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$ e $\phi_B = BA$

Sendo $A = \int dS$ B uniforme na secção A

A corrente em cada espira, sendo i , induz um fluxo magnético ϕ_B . Havendo N espiras, haverá um fluxo $N\phi_B$. A indutância L será definida como: $L = \frac{N\phi_B}{i}$. Lembre-se da definição de autoindução na Seção 5.20.

Logo, da expressão $B = \mu_0 in$, considerando ℓ um comprimento próximo do centro do solenoide, teremos:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{(n\ell)(BA)}{i} = \frac{(n\ell)(\mu_0 in)(A)}{i} \quad \therefore L/\ell = \mu_0 n^2 A$$

Densidade de energia magnética: $u_B = \frac{1/2 Li^2}{A\ell}$. Tem as mesmas unidades que u_e .

Sendo $\frac{1}{2} Li^2$ a energia armazenada no volume $A\ell$, ver Seção 5.21, Equação (3).

Então: $u_B = \frac{L i^2}{\ell 2A}$, substituindo pela expressão anterior para L/ℓ :

$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2 \quad \text{Como } B = \mu_0 in, \text{ teremos: } u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (5.8)$$

$$\text{Pode-se mostrar que } u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e \quad (5.8a1)^{63}$$

Tomando a equação da força de Lorentz, Seção 5.11.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m'\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Em que \vec{p} , quantidade de movimento m' , massa relativística: $m' = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (5.8b)⁶⁴

$\beta = \frac{v}{c}$ $c =$ velocidade da luz [Ver Seção 5.25, sobre Quadripotencial, Equação (3)].

Desenvolvendo pela série de Maclaurin, teremos:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = m + \frac{1}{2} m\beta^2 + \dots \quad \text{pois: } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \dots$$

Para baixas velocidades $m' \cong m$ ($v \ll c$) e podemos usar as fórmulas da mecânica clássica. Para velocidades próximas à da luz, é necessário fazer a correção relativística usando m'

(RAINICH, LANDAU, GRANVILLE).

⁶³ Pois $\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$, ver Seção 5.23, Equação 9, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, ver equação 5.

⁶⁴ Ver Seção 7.1, Equação (0), e Seção 7.4, Equação (1), em que será deduzido o fator de Lorentz que relaciona a massa relativística m' com a massa de repouso m : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, fator de Lorentz (5.8b).

Retornando às densidades de energia, a densidade de energia total será: $u_t = u_e + u_B$.

Foram deduzidas considerando o espaço onde atua vazio, sem material, ou seja, sem cargas elétricas. Se estas existirem, as cargas elétricas ficam sujeitas à força de Lorentz [Seção 5.11, Equação (2)].

Podem parecer contraditório somar $u_e + u_B$ e mantê-la constante, tendo em vista Equação (1a) da Seção 5.22, mas devemos lembrar que, i e q não são constantes, pois variam de zero a um valor máximo i_{\max} e q_{\max} . Assim, quando i for zero, q será máximo e igual a q_{\max} e vice-versa; quando q for zero, i será máximo e igual a i_{\max} . Nos outros casos, terão valores intermediários, mantendo u_t constante.

Da mesma forma para E e B , que são variáveis oscilando entre 0 e E_{\max} e B_{\max} , conforme as fórmulas (5.7) e (5.8), da Seção 5.26.

Isso também vale, naturalmente, para manter E_t constante, conforme Equação (1a), Seção 5.22.

Como afirmado, vamos utilizar a equação da força de Lorentz, mas em lugar de q usaremos ρ , que é $\rho = \frac{dq}{dV}$, isto é, carga por unidade de volume, obtendo em lugar de \vec{F} , força por unidade de volume \vec{f} :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}, \text{ a força volumétrica.}$$

Se as cargas contidas no volume dV se deslocarem de uma distância $d\vec{r}$ no tempo dt , o trabalho feito pelo campo eletromagnético será: $\vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = [\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{v} dt$

Esse trabalho provoca a variação da energia cinética du_{cin} das cargas contidas no elemento dV : $du_{cin} = \vec{f} \cdot d\vec{r}$

O triplo produto escalar:

$$\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.8a \ 1a)$$

A matriz é nula, pois tem duas linhas iguais.

Também podemos observar que o volume do paralelepípedo formado pelos três vetores \vec{v} , \vec{B} e \vec{v} , que representa o triplo produto escalar, é nulo, tem dois vetores iguais \vec{v} . Assim, como verificamos que $\rho \vec{v} \times \vec{B}$ é o vetor força magnética por unidade de volume \vec{f}_m , perpendicular a \vec{v} , logo $\vec{f}_m \cdot \vec{v} = 0$ (5.8a1b).

Pois $f_m \cdot v \cos\theta = 0$, já que $\theta = 90^\circ$ e $\cos 90^\circ = 0$. Dessa forma, o vetor $\vec{f}_e = \rho \vec{E}$ será denominado vetor força elétrica por unidade de volume, cujo produto escalar $f_e \cdot \vec{v} dt$, em geral, não se anula.

Em consequência: $du_{cin} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dt$

Portanto, a potência cinética será: $\frac{du_{cin}}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$

Chamando de P_c a perda de potência no circuito indutância, capacitância, resistência, LCR, ver equação 1d1, secção 5.22

Recordemos a potência $P_c = \frac{dE_i}{dt} = -Ri^2$ na Equação (2), Seção 5.21, e Equação (1d), Seção 5.22.

$$\therefore \frac{d}{dV} P_c = \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Sabemos, pela lei de Ohm que a diferença de potencial: $\Delta V = Ri$

R é a resistência do circuito, onde passa uma corrente i [ver Seção 5.21, Equação (1)].⁶⁵

$\Delta V = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, ver lei de Faraday [Seção 5.14.1, Equação (1b)].

$$P_c = \int \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \left[\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right] i = Ri^2 \quad (5.8a2) \quad P_c = \Delta V i$$

É potência dissipada em forma de calor por efeito Joule [ver Seção 5.21, 2º termo da Equação (2), e Equação (1d) da Seção 5.22], pois:

$$-dP_c = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \frac{dq}{dV} \frac{d\vec{\ell}}{dt} \cdot \vec{E} dV = (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) i$$

$$\text{Assim: } -\frac{dP_c}{dV} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E}, \text{ idem por unidade de volume.} \quad (5.8a3)$$

Por exemplo, em um resistor, os elétrons livres que formam a corrente elétrica colidem com a rede cristalina. Essa transferência de energia acarreta um aumento de temperatura da rede. Em nosso caso, os elétrons e/ou íons se movimentam em algum meio material, ocasionando colisões em que há transferência da energia cinética das cargas móveis para o meio material e consequente dissipação na forma de energia térmica, ou seja, calor, devido ao aumento da amplitude das vibrações do meio.⁶⁶

Note-se que considerar a diferença de potencial ΔV como Ri^2 , na condição de energia perdida, já foi considerada quando estudamos a energia do campo magnético na Seção 5.21, 2º termo da Equação (2).

A energia cinética deve ser acrescentada à energia total u_t : $u_t + u_{cin} = \sum u$

⁶⁵ Um trecho de um circuito com características de resistência R provoca um $\Delta V = Ri$ quando passa uma corrente i pelo mesmo.

⁶⁶ Porém, de acordo com a Mecânica Quântica após Niels Bohr (ver Anexo 6, Equação 1a), quando um elétron livre se choca e retira um elétron de uma órbita periférica, outro elétron de uma órbita mais externa salta para ocupar seu lugar, gerando um *quantum* de energia cuja frequência pode ser conforme o grau de intensidade na faixa do infravermelho, que é energia térmica, frequência luminosa do vermelho ao azul, ou mesmo ultravioleta, que é ionizante.

Agora, podemos fazer um balanço de energia no volume de controle considerado, levando em conta as diversas formas de energia existentes no VC. Analisando a variação no tempo, teremos, somando as Equações (5.7), (5.8) e (5.8a3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) + \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Se chamarmos $\vec{H} = c\vec{B}$ de vetor campo magnético (LANDAU, BORISENKO): $\vec{B} = \frac{\vec{H}}{c}$ (5.9)

Ver Quadripotencial, Seção 5.25, Equação (4).

$$\therefore B^2 = \frac{H^2}{c^2} \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \therefore c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \text{conforme Seção 5.23,}$$

Equação (5).

Em consequência: $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{H^2}{c^2} \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{H^2 \epsilon_0 \mu_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 H^2$

No sistema MKS, teremos: $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + H^2) + \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$

Da Seção 5.25.2, após a Equação (5.5a), para se obter no sistema cgs, gaussiano: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, logo: $\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$ é potência por unidade de volume ou potência volumétrica.

A parcela: $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ é denominada “densidade de energia do campo eletromagnético”: energia por unidade de volume do campo, ou seja, energia volumétrica do campo.

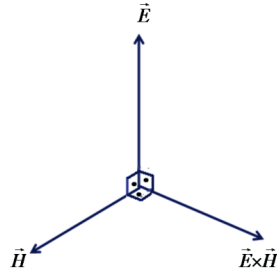
O balanço de energia que consideramos se restringe à energia no interior do volume de controle. Isto é, a quantidade considerada se conserva.

Observemos que: $\frac{d}{dt} u_{cin} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$, conforme visto na Equação (5.8a1b), após a dedução de $\vec{f} \cdot \vec{v} dt$ (como vimos, $\vec{f}_m \cdot \vec{v} = 0 \therefore \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{f}_e \cdot \vec{v}$).

Então: $\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + u_{cin} = cte$ (5.9a1)

Em consequência: $\frac{d}{dt} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + u_{cin} \right) = 0$

Válido para sistema isolado.

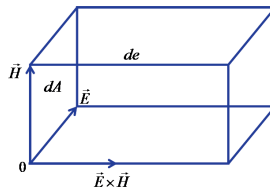


No entanto, em geral, o sistema não é isolado e pode receber⁶⁷ energia do lado externo ao VC. Essa energia geralmente é por radiação, por intermédio de ondas eletromagnéticas. De acordo com o início da Secção 5.23, assinalado por (a), os vetores campo elétrico e magnético são perpendiculares entre si, por isso, seu produto vetorial: $\vec{E} \times \vec{H}$ é perpendicular a \vec{E} e \vec{H} , sendo $\vec{H} = c\vec{B}$, como visto na Equação (5.9). Esse vetor se propaga com a velocidade da luz \mathcal{C} .

$$\text{Da equação (5.8a1): } u_B = u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \therefore u_t = 2u_e = \epsilon_0 E^2 \quad (5.9a)$$

u_t é energia por unidade de volume, sendo c a velocidade da luz que é uma onda eletromagnética:
 $c = \frac{de}{dt} \quad \therefore de = cdt$

de é o espaço percorrido pela onda no tempo dt .



Sendo dA um elemento de área da frente de onda, o volume desenvolvido pela onda no intervalo de tempo dt será: $dA \cdot de$. A quantidade de energia no volume é: $u_t dA \cdot cdt$.

Se dividirmos por dA e dt , teremos: cu_t , que é energia por unidade de área e por unidade de tempo.

$$\text{Como vimos na Equação (5.9a), } u_t = \epsilon_0 E^2, \text{ logo } cu_t = c\epsilon_0 E^2 \quad (5.9b)$$

Vimos na Equação (5.9) que $\vec{H} = c\vec{B}$, então $\vec{E} \times \vec{H} = c\vec{E} \times \vec{B}$

⁶⁷ Ou ceder para o exterior.

Sabemos que da determinação da velocidade da luz, na Seção 5.23, Equação (9): $\frac{E}{B} = c$

Então, $c\vec{E} \times \vec{B} = cE \cdot \frac{E}{c} = E^2$, pois \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares entre si, logo $\theta = 90^\circ$ e $\text{sen } 90^\circ = 1$, também $\vec{E} \times \vec{H} = E^2$

Retomando $c\epsilon_0 E^2$ da Equação (5.9b), teremos: $\vec{P} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ (5.9c)

Pois $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, ver equação 5.5a, seção 5.25. Não confundir com P_c , potência dissipada na forma de calor: $P_c = Ri^2$, ver Equação (5.8a2).

O vetor \vec{P} é denominado “vetor de Poynting”, em homenagem a John Henry Poynting (1852-1914), o primeiro a discutir as suas propriedades. A fórmula mencionada anteriormente está definida no sistema gaussiano. No sistema MKS, teremos: $\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ em watt/m^2 (5.9d)

Pois:

$$\frac{c^2}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}, \text{ sendo } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \vec{H} = c\vec{B} \text{ e } \mu_0 = 4\pi/c^2, \epsilon_0 = 1/4\pi \text{ como já vimos em:}$$

Equação (5.9), Equação (5) da Seção 5.23 e Equação (5.5a) da Seção 5.25.

Da Seção 5.7, Equação (1), recordemos o divergente de uma função:

Sendo ϕ_{elm} o fluxo de energia eletromagnética:

$$\frac{d\phi_{\text{elm}}}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial z} = \text{div} \vec{P}$$

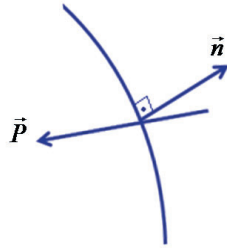
Em que $\vec{P} = P_1\vec{i} + P_2\vec{j} + P_3\vec{k}$

Ao calcularmos o divergente de uma função \vec{P} , transformamos a função \vec{P} que é para área unitária, em outra função para volume unitário. Note que \vec{P} era potência⁶⁸ por área (por exemplo, $dA = dx dy$) se transformou em potência por área ($dx dy$) e por uma 3ª dimensão, dz , ou seja: por $dx dy dz$ que é dV , volume elementar.

Calculando o $\text{div} \vec{P}$, transformamos em uma função compatível com a densidade de potência que é para volume unitário, ver Equação (5.9a1).

Podemos fazer um balanço de energia para um sistema de controle:

⁶⁸ Ou seja, potência, que é energia por unidade de tempo.



$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = -\text{div} \vec{P} \quad (5.9e)$$

O sinal negativo significa que o vetor \vec{P} ⁶⁹ penetra no sistema e forma um ângulo com a normal à superfície \vec{n} , maior que 90° e, portanto, $\cos \alpha$ é negativo.

Essa equação é diferencial. Integrando-a, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \iiint_V \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = - \iiint_V \text{div} \vec{P} dV$$

De fato, retornando a: $\frac{d\phi_{elm}}{dV} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} P_i$, em notação tensorial, pela convenção de soma ou de Einstein:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P_i = \frac{\partial}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} P_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} P_3$$

$$d\phi_{elm} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV, \text{ integrando: } \phi_{elm} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV \quad d\phi_{elm} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_i} dx_i \right) \cdot dx_j \cdot dx_k$$

Recordemos, da Seção 5.9, Equação (2) ao pé da página: $\frac{\partial}{\partial x_i} \int P_i dx_i = P_i$

Logo, ao usar na integral tripla, obteremos:

⁶⁹ Que vem de fora do sistema de controle. A origem do sistema de coordenadas está dentro do VC, por isso o vetor unitário \vec{n} é dirigido para fora.

$$\Phi_{e\ell m} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \iiint_V \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dx_i dx_j dx_k = \iint_S \left[\int \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dx_i \right] dx_j dx_k$$

e: $\frac{\partial P_i}{\partial x_i} dx_i = dP_i$ $\int dP_i = P_i$ se torna integral dupla.

$\therefore \Phi_{e\ell m} = \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$, pois $dS_i = dx_j dx_k$ e $P_i dx_j dx_k = \vec{P} \cdot d\vec{S}$ para $i, j, k = 1, 2, 3$

Pois i é perpendicular a j e a k .

$dV = dx_i \cdot dx_j \cdot dx_k$ da Seção 5.4, $\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ e $d\vec{S} = \vec{n} dS$

$d\Phi_{e\ell m} = \vec{P} \cdot d\vec{S}$ integrando:

$$\Phi_{e\ell m} = \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{SC} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV \quad (5.10)$$

Obtemos o teorema de Gauss-Ostrogradski, como vimos no final da Seção 5.8.⁷⁰

Usando esse teorema no balanço de energia, na forma integral, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \iiint_{VC} \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = - \iint_{SC} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

Observemos que o fluxo de potência volta à sua forma original, isto é, como energia na unidade de tempo e na unidade de área, ver Equação (5.9d), \vec{P} no sistema MKS é em watt/m^2 .

Qual é o significado dessa equação?

Ela estabelece que a taxa de variação da energia⁷¹ do campo eletromagnético dentro do VC , acrescida da variação da energia cinética devido ao trabalho executado pelo campo elétrico ao mover as cargas no VC , iguala o fluxo da energia eletromagnética que atravessa a SC , envolvendo o VC na unidade de tempo. Deve-se notar que não há cargas na superfície do VC nem cargas atravessando a superfície de controle SC . O vetor \vec{P} representa a densidade do fluxo da energia no campo eletromagnético, atribuível ao fenômeno da radiação.

⁷⁰ A diferença entre a demonstração anterior e esta, é que a primeira foi feita para fluxo material e a segunda, para fluxo de energia. Porém, a equação de Einstein: $E = c^2 \Delta m$ [ver Seção 7.8, Equação (1)] mostra a equivalência entre massa e energia.

⁷¹ De modo mais adequado, potência, que é energia por unidade de tempo.

Essa equação pode ser deduzida de uma forma muito sucinta por intermédio do cálculo vetorial, no entanto, dessa forma perderíamos o entendimento mais profundo de cada termo da equação.

Tomando a equação diferencial, na Seção 5.15, Equação (2):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \text{ que é a lei de Faraday-Henry na forma diferencial, e lembrando que } \vec{B} = \frac{\vec{H}}{c} \text{ obtemos:}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \text{ rot} \vec{E}$$

$$\text{Multipliquemos escalarmente por } \vec{H}: \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}$$

A seguir, tomamos a lei de Ampère-Maxwell na forma diferencial, da Seção 5.16, Equação (5): $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{v} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$, na forma gaussiana, conforme Seção 5.25, Equações (5.5a) e (5.5b): $\mu_0 = \frac{4\pi}{c^2}$ e $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ e $\vec{B} = \vec{H}/c$ assim como da dedução da velocidade da luz c , Seção 5.23, Equação (5), $\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{rot} \frac{\vec{H}}{c} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \rho \vec{v} = \frac{c^2}{c} \text{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c^2} c^2 \rho \vec{v}$ obtemos: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \text{ rot} \vec{H} - 4\pi \rho \vec{v}$.

$$\text{Multiplicando escalarmente por } \vec{E}: \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - 4\pi \rho \vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$\text{Adicionando os produtos escalares: } \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = c \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - 4\pi \rho \vec{v} \cdot \vec{E} - c \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} =$$

$$= c(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}) - 4\pi \rho \vec{v}$$

$$\text{Levando-se em conta que: } \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_c \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c)^{72} \quad (5.9f)$$

Como visto na Seção 5.26, Equação (5.8a1a), o triplo produto escalar pode ser expresso por um determinante:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_c \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A_{c_1} & A_{c_2} & A_{c_3} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{E, da mesma forma, } \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c)$$

Esse produto é invariante nas permutações cíclicas dos vetores, isto é, quando as linhas do determinante mudam de posição ciclicamente, mas mudam de sinal se a permutação não for cíclica.

$$\text{Em consequência: } \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A}_c \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B}_c \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

⁷² ∇ Age separadamente em cada fator, deixando o outro constante (daí o índice \mathcal{C}), como uma derivada, aliás é uma derivada espacial.

Comparando com a equação 5.9f e aplicando à soma dos produtos escalares:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= c(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}) - 4\pi\rho\vec{v} = \\ &= -c(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \times \vec{H} - \vec{\nabla} \cdot \vec{H} \times \vec{E}) - 4\pi\rho\vec{v} \end{aligned}$$

E aplicando à soma dos produtos escalares:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{4\pi} = -\text{div} \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \right] - \rho\vec{v} \cdot \vec{E}, \text{ pois } \frac{\partial}{\partial t} E^2 = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$$

Em que: $\vec{P} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$ é o vetor de Poynting como já visto na Equação (5.9c).

$$\text{Então: } \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = -\text{div} \vec{P}$$

É o balanço de energia em forma diferencial obtido na Equação (5.9e).

Como a primeira dedução do balanço de energia ficou extensa, vamos resumi-la: consideremos um *VC* vazio, isto é, sem cargas elétricas, onde transitam os campos elétrico e magnético associados. Em consequência desses campos, teremos as energias volumétricas, ou seja, energias por unidade de volume.

$$\text{Elétrica: } u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$u_e = u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \text{ ver Equação (5.8a1).}$$

$$\text{Magnética: } u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 H^2, \text{ ver equação 5.8a1, 5.9 e seguintes}$$

A soma será: $u_i = \epsilon_0 E^2$. Vamos denominá-la “densidade de energia do campo eletromagnético”, ou seja, energia volumétrica do campo, no sistema MKS: $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + H^2)$ e no sistema cgs ou gaussiano:

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

Se houver cargas elétricas e um meio material, essas cargas ficarão sujeitas, por unidade de volume, à força volumétrica de Lorentz: $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$. As cargas se deslocarão de uma distância $d\vec{r}$ no tempo dt , ganhando a energia cinética: $\vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$.

Verifica-se então que, das duas parcelas de \vec{f} , a elétrica $\rho\vec{E}$ e a magnética $\rho\vec{v} \times \vec{B}$, a única que contribuirá para a variação da energia cinética será a elétrica, pois a magnética, sendo: $\rho\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} dt$, com dois vetores iguais, \vec{v} , se anula [ver Equação (5.8a1a)].

Em consequência, a variação volumétrica da energia cinética, será: $du_{cin} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E}dt$, e a variação na unidade de tempo: $\frac{d}{dt}u_{cin} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E}$.

Essa energia causa colisões das cargas móveis com o meio material, com o conseqüente aumento da amplitude de vibração do meio, resultando na dissipação da energia cinética na forma de energia térmica. Esse efeito é denominado efeito Joule, tendo como expressão, conforme a lei de Ohm [ver Equação (5.8a2)]: $P_c = Ri^2$, potência dissipada. Na unidade de volume: $\frac{dP_c}{dV} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E}$, ver Equação (5.8a3).

No interior do VC teremos uma variação de energia volumétrica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho\vec{v} \cdot \vec{E}$$

Se esse sistema for conservativo, a expressão anterior se anulará e: $\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + u_{cin} = cte$, válido para sistema isolado.

Contudo, em geral, o sistema não é isolado e pode receber ou ceder energia para o exterior. Essa energia é o que denominamos de vetor de Poynting, e se manifesta como radiação que atravessa a SC do VC , potência por unidade de superfície: $\vec{P} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ no sistema cgs [ver Equação (5.9c)]. Não confundir com $P_c = Ri^2$, potência dissipada na forma de calor.

O balanço de energia será:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = -div\vec{P}, \text{ em forma integral:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \iiint_{VC} \rho\vec{v} \cdot \vec{E} dV = - \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = - \iint_{SC} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE QUADRIDIMENSIONAL

Da equação diferencial da continuidade Seção 5.9.1 temos: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, sendo $\vec{j} = \rho \vec{v}$, a densidade de corrente.

Multiplicando e dividindo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ por v_0 , obtemos: $\frac{v_0}{v_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho v_0}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_0} = \frac{\partial j_0}{\partial x_0}$

$$\text{Pois, } j_i = \rho v_i = \rho \frac{dx_i}{dt} \quad \text{e} \quad j_{1,2,3} = j_{x,y,z} \quad j_0 = ic\rho^1 \quad \therefore v_0 = ic$$

Portanto, essa última equação tridimensional torna-se quadridimensional: $\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0$ com x_0 sendo a 4ª dimensão.

Assim, conclui-se que o regime é permanente, quadridimensionalmente falando, e a carga é conservada no hipervolume $d\Omega = dVdt$, independentemente de seu tamanho; elementar ou não, infinitesimal ou não, porém no espaço quadridimensional. Também significa que a carga se conserva no espaço-tempo.

(LANDAU, RAINICH, SOKOLNIKOFF)

¹ Ver Seção 5.25, Equação (5.6b), $x_0 = cti$, $v_0 = \frac{\partial x_0}{\partial t} = ic$. Como i e c são constantes, v_0 é constante.

$$\text{De fato: } \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \frac{dx_i}{dt} dV dt = 0 \Rightarrow \int d\rho dV = 0 \quad \therefore \rho dV = 0$$

$$\text{Assim: como } \rho = \frac{dQ}{dV} \quad \therefore \frac{dQ}{dV} dV = 0, \text{ logo: } dQ = 0 \quad \therefore Q = cte$$

Ver Seção 5.9, Equação (0).

Veja-se uma demonstração diferente de Landau e Lifchitz em teoria do campo. Só que nossa demonstração é bem mais simples.

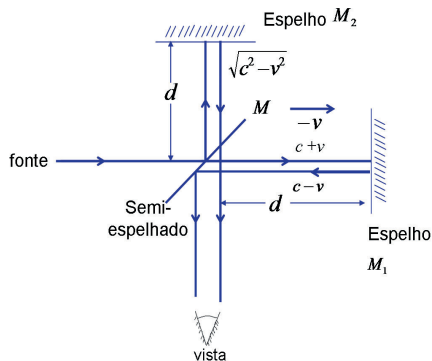
Pode-se fazer o mesmo raciocínio para a massa. Entretanto, deve-se levar em conta a equivalência entre massa e energia, como foi demonstrado por Einstein, como veremos no capítulo 7: $E = c^2 \Delta m$, seções 7.8 e 7.15.

RELATIVIDADE ESPECIAL OU RESTRITA

7.1 INTRODUÇÃO

No século XIX, fazia-se uma analogia entre ondas luminosas e ondas sonoras ou outro tipo de perturbação puramente mecânica. Postulava-se a existência de um “éter”, “éter luminífero” ou “portador de luz”, substância tênue que ocuparia todo o espaço e serviria como meio de propagação da luz.

Em 1881, Albert Abraham Michelson incumbiu-se da tarefa de submeter o éter, caso existisse, a uma verificação física direta. Michelson, mais tarde auxiliado por Edward Williams Morley tentavam determinar a velocidade com que a Terra se movia através do éter. O interferômetro de Michelson foi escolhido para essa experiência, conhecida agora como a famosa experiência de Michelson-Morley (ver Seção 2.1, sobre medição do comprimento de onda da luz).



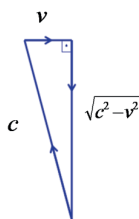
A Terra se desloca junto com o interferômetro com uma velocidade v através do éter, ou seja, o éter passa pelo interferômetro com velocidade $-v$.

De M a M_1 a velocidade será $c+v$.

De M_1 a M a velocidade será $c-v$.

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a velocidade em M_2M : $\sqrt{c^2-v^2}$. A seguir gira-se o interferômetro em 90° e efetuam-se novas medições.

Para grande surpresa de Michelson e Morley, a velocidade verificada era a mesma em todas as direções.



O enigma foi resolvido em 1905, quando Einstein admitiu a velocidade da luz no vácuo como um invariante físico, tendo o mesmo valor para todos os observadores.

A definição de evento é uma ocorrência para a qual um observador pode associar três coordenadas espaciais e uma temporal.

Postulado da relatividade especial ou restrita: a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, isto é, as velocidades entre si são uniformes, não estão aceleradas.

A velocidade da luz é uma velocidade limite. Isso foi demonstrado em uma experiência por W. Bertozzi em 1964. Ele acelerou elétrons a diversas velocidades. À medida que a força atua sobre um elétron muito rápido, sua energia cinética também aumenta, tendendo para valores muito grandes, porém, sua velocidade não aumenta consideravelmente. Os elétrons foram acelerados até pelo menos $0,999.999.999.95c$. Embora muito próxima de c , esta velocidade ainda é menor que c .

Sobre o postulado da invariância da velocidade da luz foi feita uma experiência no CERN¹ em 1964, usando “píons neutros”, π^0 , em um acelerador de partículas. Elas decaem em dois raios γ , que fazem parte do espectro eletromagnético: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

¹ Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, em Meyrim, fronteira franco-suíça, com um síncrotron de prótons de 28GeV e outro de 450eV , desde 1976.

O feixe foi acelerado até $0,99975c$ e mediu-se a velocidade dos raios γ .

Os resultados obtidos foram:

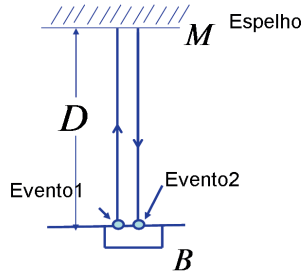
- Luz dos píons em movimento: $2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Luz de uma fonte em repouso (valor aceito de c): $2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Píons são mésons π , partículas originárias de raios cósmicos.

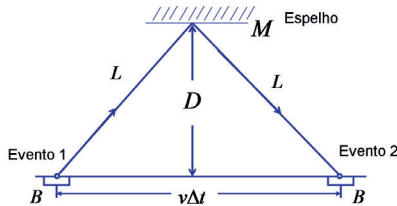
A velocidade da luz emitida pelos píons, que se deslocavam com velocidade quase igual à da luz, era a mesma que seria medida se os píons estivessem em repouso no laboratório.

7.2 RELATIVIDADE DO TEMPO

Seja um observador posicionado dentro de um trem com velocidade uniforme v em relação a uma estação. No vagão, ocorre um evento 1, em que se emite do chão um sinal luminoso, refletido por um espelho no teto para o chão do vagão, onde é recebido no evento 2. A distância do chão ao teto é D . O intervalo de tempo entre os dois eventos é Δt_0 . Para o observador, os eventos e o intervalo de tempo estão em repouso, pois ocorrem dentro do vagão.



Esse intervalo de tempo é denominado “tempo próprio”. Teremos: $\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$



Outro observador, posicionado na plataforma, observa o trem passar. Como a velocidade da luz é a mesma para os dois observadores, o intervalo de tempo entre os dois eventos, para o observador na

plataforma, que observa o trem em movimento uniforme com velocidade v , será: $\Delta t = \frac{2L}{c}$ em que,

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2} = c\frac{\Delta t}{2} \Rightarrow v^2\Delta t^2 + c^2\Delta t_0^2 = c^2\Delta t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t^2(c^2 - v^2) = c^2\Delta t_0^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{\Delta t_0^2}{(c^2 - v^2)/c^2}$$

Resulta: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, ver demonstração mais atualizada no final do Anexo 3, secção A3.2 em:

“Relatividade do tempo”.

À relação $\beta = \frac{v}{c}$ chamamos “parâmetro de velocidade” e à expressão $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (0)² chamamos de “fator de Lorentz”, pois Hendrik Lorentz, físico holandês, em 1890, foi o primeiro a obter a expressão, em conexão com o problema do campo eletromagnético de uma carga em movimento. No entanto, tanto ele como o físico irlandês George Fitzgerald apresentaram a hipótese de que os objetos sólidos se contraíam ligeiramente quando se moviam no éter. Essa contração reduziria tudo, inclusive os braços medidores do interferômetro de Michelson-Morley, na medida exata necessária para tornar o efeito do éter na luz impossível de identificar. Porém, a hipótese de Einstein, que vimos na introdução, comprovou ser a verdadeira.

Suponhamos um primeiro evento consistindo na emissão de um sinal que se propaga com a velocidade da luz, partindo de um ponto de coordenadas x_1, y_1, z_1 , no instante t_1 . Um segundo evento consistirá na chegada do sinal ao ponto x_2, y_2, z_2 , no instante t_2 . O sinal se propaga com a velocidade c e o caminho percorrido é $c(t_2 - t_1)$.

$$\text{Então teremos: } c(t_2 - t_1) = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

Quando x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 forem as coordenadas de dois eventos quaisquer, a quantidade:

$$s_{12} = \left[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

Será chamada de “intervalo” entre os dois eventos.

Se dois eventos forem infinitamente vizinhos, seu intervalo ds se escreverá:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

² Chamada contração de Lorentz-Fitzgerald.

Seja um intervalo de tempo dt durante o qual se percorre a distância $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. O intervalo dt é indicado por um relógio em repouso. Qual será o tempo dt' indicado por um relógio que se move? No sistema de coordenadas ligado ao relógio móvel, este estará em repouso, ou seja, $dx' = dy' = dz' = 0$. Como o intervalo entre dois eventos é invariante, temos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 \quad (\text{ver Análise dos intervalos de eventos } ds \text{ Seção 7.3, Equação 1}).$$

$$\text{Portanto: } dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

$$\text{Ou seja: } dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{\frac{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2 dt^2}}$$

$$\text{Como: } \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 \quad v \text{ é a velocidade do relógio móvel}$$

$$\text{Logo: } dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1a)$$

Integrando, obtemos:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)^3$$

Esse intervalo de tempo é chamado de tempo próprio.

$$\text{Voltando, teremos: } \Delta t = \gamma \Delta t_0.$$

$$\text{Como } \gamma \geq 1, \text{ teremos: } T_{\text{movimento}} \geq T_{\text{repouso}}$$

Isto é, quando em movimento, o tempo transcorre mais lentamente, ou seja, há uma dilatação do tempo.

Prova: por testes em laboratório sabemos que a vida média dos múons é de $2,2\mu\text{s}$, portanto $\Delta t_0 = 2,2\mu\text{s}$ (em repouso).

Realizou-se uma experiência em 1977 no CERN com um feixe de múons acelerados em um anel de $7,0\text{m}$ de raio até atingir a velocidade de $v = 0,9994c$. Obteve-se $\gamma = 28,87$, portanto $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 63,5\mu\text{s}$. Os múons são mésons μ , partículas originárias de raios cósmicos.

O valor medido coincidiu, dentro dos erros experimentais com Δt calculado.

³ Se v for constante, como é o caso, obtemos: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$ e $\therefore \Delta t = \gamma \Delta t_0$ como a Equação (0).

Para uma demonstração mais elegante e atualizada da relatividade do tempo, ver Anexo 3 secção A3.2, em: Relatividade do tempo.

7.2.1 O decaimento do múon

Para esclarecer o assunto apresentado anteriormente, convém desenvolver o seguinte: o múon se forma no topo da atmosfera, a cerca de 9 km de altitude, quando essa camada é atingida por vários raios cósmicos (partículas altamente energéticas do espaço exterior). Em repouso, os múons se desintegram em $2,2 \mu\text{s}$ ($0,000022\text{s}$). Ao serem formados, apresentam velocidades muito próximas da luz, cerca de $0,998 c$.

Distância percorrida na atmosfera até desintegrar:

$$d_m = v \cdot t \Rightarrow d_m = 2,994 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \Rightarrow d_m = 650 \text{ m}$$

Se são gerados a 9 km e percorreriam cerca de 650m, como podem ser observados na superfície da Terra? Devido à alta velocidade, sofrem efeito relativístico, causando uma dilatação do tempo, a qual é fornecida pela equação que leva em conta o fator de Lorentz:

$$\Delta t_a = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t_a = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{1-\frac{(0,998)^2 c^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t_a = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{0,063}$$

$$\therefore \Delta t_a = 3,5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

No referencial do solo, a distância percorrida pelo múon antes de se desintegrar é:

$$d_a = v \cdot \Delta t_a \Rightarrow d_a = 2,994 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

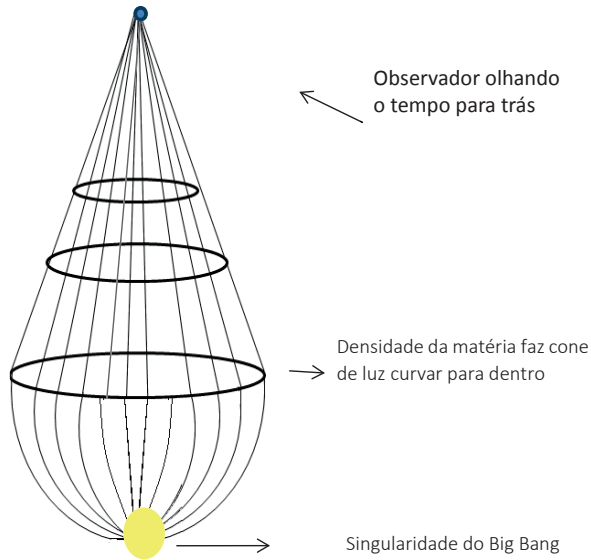
$$\therefore d_a \cong 10.000 \text{ m}$$

Por causa da dilatação do tempo, o múon consegue atingir a superfície da Terra e ser detectado.

7.2.2 O tempo e os buracos negros

Quando uma estrela de massa grande⁴ esgota seu combustível nuclear, perde calor e se contrai. A deformação do espaço-tempo nessa estrela é tão grande que causa a criação de um buraco negro do qual nem a luz consegue escapar e cujo tempo chegará ao fim.

⁴ Chandrasekhar, astrofísico norte-americano de origem hindu, prêmio Nobel de física em 1983, demonstrou que as estrelas com massa de até 1,44 do Sol, transformam-se em anãs brancas quando colapsam ao final do processo de conversão do H em He . Acima desse limite (chamado de “limite de Chandrasekhar”) o colapso resulta em estrelas de nêutrons ou, quando forem supermassivas, em buracos negros. Conforme HAWKING em “O Universo em uma casca de noz”, sabemos agora que não há configurações de estado final para estrelas com mais de duas vezes a massa do sol. Essas estrelas continuarão encolhendo até se tornarem buracos negros, regiões do espaço-tempo tão distorcidas que a luz não consegue escapar delas.



O tempo tem forma de pera.

Inicialmente, no Big Bang, a densidade da matéria seria infinita.

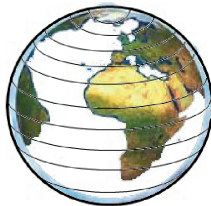
7.2.2.1 Analogia com os meridianos

Os meridianos se iniciam em um polo e terminam no outro. Cada meridiano tem uma determinada hora. Nos polos o tempo fica parado. É o que ocorre nos Buracos negros (HAWKING em “O Universo em uma casca de noz”).



Isso será mais bem explicado no segundo volume desta obra, sobre a Relatividade Geral.

Se compararmos com os paralelos de latitude (conforme a Figura), considerando cada latitude como Δt , isto é, variação de tempo, e supondo que a medida que as latitudes se aproximem dos polos, tendam para zero, ou seja, $\Delta t \rightarrow 0$. Quando atingir o polo, haverá $\Delta t = 0$, isto é, o tempo para.



7.3 RELATIVIDADE DO COMPRIMENTO

Um observador em repouso observa um trem em movimento e mede o comprimento L do trem, durante um intervalo de tempo Δt_0 , medido em repouso, logo: $L = v\Delta t_0$.

Outro observador dentro do trem mede o comprimento do trem L_0 , que, para esse observador está em repouso em relação a ele. Esse observador constata que o tempo para o trem passar pela plataforma foi de Δt , sendo que esse intervalo foi medido em relação à plataforma que para esse observador estava em movimento, logo: $L_0 = v\Delta t$.

Dividindo as duas expressões entre si: $\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$, ver equação 2 A na secção 7.2

Portanto: $L = \frac{L_0}{\gamma}$ Como: $\gamma \geq 1$ teremos: $L_{\text{movimento}} \leq L_{\text{repouso}}$

Logo, quando um corpo está em movimento, ele sofre uma contração na direção do movimento.

Nota-se que para baixas velocidades v/c e v^2/c^2 se tornam desprezíveis, tendo em vista que a velocidade c é muito elevada. Em baixas velocidades $\gamma \cong 1$ e as fórmulas da Mecânica clássica são válidas. Porém, para o estudo de partículas em altas velocidades, como elétrons em átomos, ou nos raios cósmicos, devemos usar o fator de Lorentz, também chamado de relativístico.

7.3.1 Exemplo ilustrativo

Em outubro de 1977, J. Hafele e R. Keating realizaram uma série de experiências a fim de comprovar dois efeitos relativísticos: a dilatação do tempo e o desvio para o vermelho gravitacional.⁵ A ideia se parece com o chamado “paradoxo dos gêmeos” da relatividade especial, no qual dois gêmeos idênticos são separados, o primeiro viajando no espaço sideral e retornando após longo intervalo, para se descobrir

⁵ Da relatividade geral.

mais jovem que seu gêmeo em casa. Foram utilizados relógios atômicos de césio Cs^{133} (ver Seção 2.1.6 em Quartz, assinalado como o 7), nos quais ocorre dilatação de tempo ou diminuição rítmica do relógio viajante em relação a seu gêmeo em repouso. Foram colocados quatro relógios atômicos portáteis em aviões comerciais que deram duas vezes a volta em torno da Terra, uma vez em cada sentido. Dentro dos erros experimentais de $\pm 20nanoseg$, ou seja, bilionésimos de segundos, $10^{-9}s$, atribuídos a imprecisões nos dados de voo e a variações intrínsecas dos ritmos dos relógios de césio, as observações concordaram com as previsões.

Por exemplo, para fixar essa ideia, a pessoa que se move junto com o relógio registra o tempo próprio Δt_0 , pois o relógio está em repouso em relação a ela. O observador parado, que acompanha o movimento do relógio, registra um tempo dilatado Δt para o relógio. Supondo que a leitura do observador parado seja o dobro do tempo próprio, $\Delta t = 2\Delta t_0$, e sabendo que $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, teremos: $\gamma = 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ \therefore

$$4(1-\beta^2) = 1 \therefore \beta = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866$$

Como $\beta = \frac{v}{c}$ $v = \beta c = 0,866c$

Logo, o relógio deve estar se deslocando com aproximadamente 87% da velocidade da luz. Essa velocidade equivale a circular pelo equador da Terra 6,5 vezes por segundo.

7.4 ANÁLISE DOS INTERVALOS DE EVENTOS ds

Como $dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$, então $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$ (1)

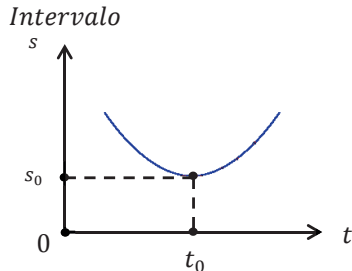
(Ver Equação 1 seção 7.2, na Relatividade do tempo)

Como vimos na Seção 5.25.1, Equações 1a e 3, em “Quadripotencial”, obtemos: Ação S :

$$S = -m_0c \int_a^b ds = -m_0c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta^2} dt$$

$\therefore ds = c dt \sqrt{1-\beta^2}$, logo: $s = f(t)$ (1), ver seção 7.2 equação 1 A

Em s_0 , $ds = 0$

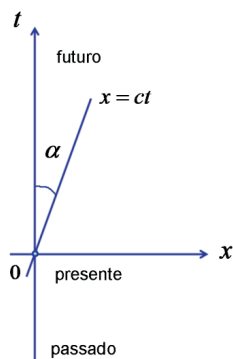


Isto é, s_0 é um mínimo, que é um extremo. Pelo princípio da ação mínima, se $S = f(t)$ para que s seja um mínimo em $t = t_0$, é necessário que $ds = 0$, mas que dt não se anule [ver monografia do autor sobre princípio da ação mínima; Anexo 3, Equação (3) e texto assinalado como 5].

A velocidade da luz c é igual à $\tan \alpha$ que fornece a inclinação da reta $x = ct$ em relação ao eixo dos t :

$$c = \tan \alpha = \frac{x}{t} \quad \therefore x = ct \quad (1a) \quad x^2 = c^2 t^2$$

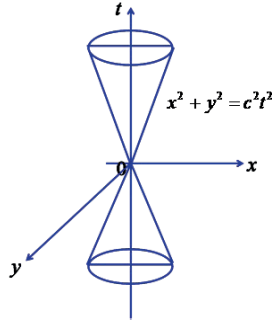
A origem 0 determina a condição presente. A região acima do eixo dos x , no sentido positivo do eixo dos t , será o futuro, e a região abaixo, no sentido negativo de t , foi o passado.



Como a velocidade c é o limite possível de v , a região entre o eixo dos t e a reta $x = ct$ é a que pode ser ocupada para movimento dos corpos. A região entre a reta $x = ct$ e o eixo dos x não pode ser ocupada.⁶ O sinal luminoso percorre a reta $x = ct$. Qualquer outro corpo percorrerá uma linha situada entre essa reta e o eixo dos t .

Se considerarmos um espaço bidimensional xy , teremos uma superfície de revolução cuja geratriz é a reta $x = ct$, isto é, uma superfície cônica passando pela origem, de equação: $x^2 + y^2 = c^2 t^2$. Essa superfície é chamada de “cone de luz”.

⁶ Pois nesse caso teríamos $v > c$, que não é possível pelo postulado de Einstein.



Temos a seguinte situação:

Se $x^2 + y^2 - c^2 t^2 = 0$, o movimento é sobre o cone de luz, e para $x^2 + y^2 - c^2 t^2 \neq 0$ não está no cone, mas estará dentro dele.

Fora dele, não há a possibilidade de movimento, pois nesse caso v seria maior que c , $v > c$.

Considerando agora o espaço tridimensional x, y, z , obteríamos uma hipersuperfície, isto é, não mais uma superfície bidimensional como no caso anterior e sim uma *soit disant*, uma “superfície” tridimensional em um espaço tetradimensional, conforme Minkowski.

Devemos observar que t é uma coordenada diferente das coordenadas x, y, z , pois enquanto nestas podemos nos movimentar para frente e para trás, no eixo dos t só podemos avançar no sentido positivo, pois não se pode recuar no tempo, “avançar” no sentido negativo, a não ser de forma fictícia. Sobre o cone de luz: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$

7.5 RELATIVIDADE DA MASSA

Tomando-se o intervalo ds , da Seção 7.1, Equação (1):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -ds^2$$

Na Seção 5.26, Equação (5.8b), havíamos antecipado o efeito da velocidade sobre a massa:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Definindo o vetor “velocidade quadridimensional”: $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ (0)

E fazendo $x_4 = cti$, obtemos: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = -1$

Para obter a massa relativística m' , devemos obter o fator de correção que, multiplicado pela massa de repouso m_0 , conduza a m' . Para isso, tomamos: $\frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \frac{dx_i}{dt} \right)$

$$\text{Da Seção 7.2, Equação 1a, temos: } \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\gamma}{c} \quad (1)$$

Em que c é uma constante, definindo unidades convenientes, podemos fazer que c seja igual a 1,⁷ então teremos: $\frac{dt}{ds} = \gamma$ e

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx_i}{dt} \right) \text{ Para baixas velocidades: } \beta = \frac{v}{c} \ll 1 \text{ e } \beta^2 \cong 0 \text{ e } \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \text{ que concorda} \\ \text{com as equações da Mecânica clássica. Logo, a equação da força de Lorentz fica:} \\ \vec{F} &= m_0 \frac{du_i}{dt} \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \left(m_0 \gamma \frac{dx_i}{dt} \vec{e}_i \right) = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \text{ como } \vec{v} = \frac{dx_i}{dt} \vec{e}_i \text{ e comparando com a equação:} \\ \vec{F} &= \frac{d}{dt} (m' \vec{v}) = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \text{ teremos: } m' = m_0 \gamma, \text{ explicitamente: } m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Como já vimos, γ é o fator de Lorentz, ver Seção 7.1, Equação (0), e Seção 7.4, Equação (1).

Podemos chegar ao mesmo resultado por mudança de variável. Trocamos a variável tempo t em s pela variável $\tau = ct$, a distância que a luz viaja em 1 s, chamada de segundo-luz.

$$\text{Recordemos que } c \text{ é uma constante. Então podemos escrever: } \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx_i}{ds} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{ds} \frac{dx_i}{d\tau} \right)$$

$$\text{Como vimos, } \frac{cdt}{ds} = \gamma, \text{ ou seja, } \frac{d\tau}{ds} = \gamma$$

$$\text{Portanto: } \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\gamma \frac{dx_i}{d\tau} \right)$$

Multiplicando por c^2 : $c^2 \frac{du_i}{d\tau} = c^2 \frac{du_i}{cdt} = c^2 \frac{d}{cdt} \left(\gamma \frac{dx_i}{cdt} \right)$ Multiplicando por m_0 :
 $c^2 m_0 \frac{d}{cdt} \left(\gamma \frac{dx_i}{cdt} \vec{e}_i \right) = \vec{F}$, comparando com a equação da força em função da massa relativística m' ,
 como vimos:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m' \vec{v}) \text{ e tendo em vista: } \vec{v} = \frac{dx_i}{dt} \vec{e}_i, \text{ conclui-se que: } m' = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ como } \beta \text{ é } = v \text{ sobre}$$

c .

⁷ Alternativamente, em vez de usar t em seg, poderíamos usar $\tau = ct$ em segundo-luz e obteríamos:
 $d\tau/ds = \gamma$

∴ A massa varia com a velocidade, ver anexo A 3, secção A 3.1.1, equação 4b.

Pelo princípio da ação mínima, verificamos na Secção 5.25, Quadripotencial, Equação (3a1):

$$\text{Lagrangeana: } L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Tendo em vista do Anexo 3, Equação (2a):

$$\text{Quantidade de movimento: } p = \frac{dL}{dv}$$

$$\text{Derivando } L \text{ em } v: \frac{dL}{dv} = -m_0 c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} \left(-2v/c^2\right) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$m_0 v$ é a quantidade de movimento clássica que se obtém quando $v \ll c$

Para obter a força, derivamos em t:

$F = \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dv}{dt}$ a expressão $F = \frac{dp}{dt}$, será válida quando a força F e a velocidade v , forem perpendiculares entre si.

Quando F e v forem colineares, o denominador: $\sqrt{1 - \beta^2}$ deverá ser elevado a 3/2 em lugar de 1/2 da raiz quadrada (LANDAU).

Resultado obtido anteriormente, porém sem recorrer a nenhum artifício.

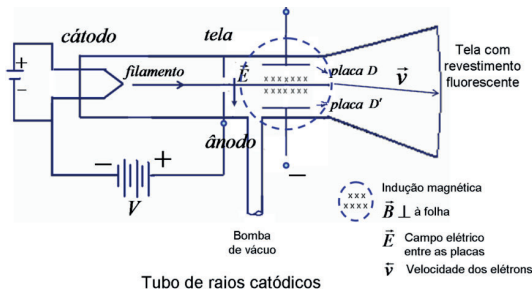
$$\text{Reformulando a equação da força de Lorentz: } \vec{F} = m_0 \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Daqui tiramos: $\frac{q}{m_0} = \frac{1}{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}} \left[\frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \right]$, relação entre carga e sua respectiva massa. A carga é constante e m_0 é a massa de repouso, constante.

7.5.1 Exemplo ilustrativo: a descoberta do elétron

Em 1897, Joseph John Thomson (1856-1940), aluno de Maxwell, determinou o quociente e/m do elétron. Para isso utilizou um tubo de raios catódicos, “avô” dos atuais tubos de televisão.

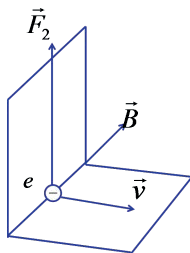
O tubo de raios catódicos é uma ampola de vidro onde se faz vácuo da ordem de 10^{-4} ou 10^{-5} mmHg .



O filamento forma o cátodo e a tela, o ânodo. Entre os dois existe uma diferença de potencial da ordem de alguns milhares de *volts*.

Um estreito feixe se forma e incide na tela fluorescente, indicando um ponto de incidência. Esse feixe era denominado “raio catódico”. Thomson, que realizou as experiências no Cavendish Laboratory em Cambridge, mostrou que os raios são feixes de partículas com cargas negativas, que chamou de “corpúsculos”. George Johnstone Stoney (1826-1911), afirmou, em 1874, que a eletricidade era devida a esses corpúsculos, aos quais, em 1891, deu o nome de elétrons. Thomson considerou que faziam parte da matéria.

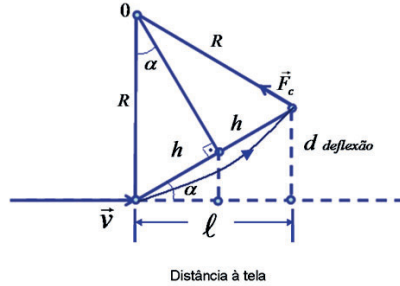
Na Seção 5.5, Equação 1, vimos que a existência de um campo elétrico \vec{E} entre as placas D e D' faz a carga do elétron e ser sujeita a uma força $\vec{F}_1 = e\vec{E}$. Isso faz o feixe defletir para cima. Se aplicarmos uma indução magnética \vec{B} , perpendicular a \vec{E} , isto é, fazendo com que os polos N e S fiquem alinhados em uma direção perpendicular ao eixo do tubo, por exemplo, com um ímã em ferradura ou um solenoide equivalente.



De acordo com a Seção 5.11, Equação (1), utilizando-se uma indução \vec{B} que provoque no elétron uma força \vec{F}_2 ⁸ com módulo igual ao de \vec{F}_1 , mas de sentido oposto, compensando a deflexão ocasionada

⁸ Da introdução para o estudo da teoria da relatividade 1 do autor: $\vec{F}_2 = ev\vec{B}$, em que v é a velocidade dos elétrons no feixe eletrônico.

por \vec{F}_1 , o feixe eletrônico volta à posição inicial. Os vetores \vec{E}, \vec{B} e \vec{v} são mutuamente perpendiculares entre si. Teremos $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ e $eE = evB$, ou seja, $v = E/B$. Assim, podemos determinar \vec{v} .



Anula-se o campo elétrico. O feixe de elétrons descreverá um arco de círculo no campo magnético. Os elétrons ficarão sujeitos à força centrípeta, isto é, dirigida para o centro: \vec{F}_c . Pela 2ª lei de Newton temos, em módulo: $F_c = ma_r$, em que a_r é a aceleração radial, cujo valor, como já sabemos é: $a_r = \frac{v^2}{R}$.

Portanto:
$$\vec{F}_c = \frac{mv^2}{R}$$

Essa força é devido à ação da indução magnética sobre o elétron, como já vimos: $F_c = evB$

Logo:
$$evB = \frac{mv^2}{R} \quad \therefore \frac{e}{m} = \frac{v}{RB}$$

Combinando com: $v = \frac{E}{B}$, temos
$$\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}$$

Da trigonometria, podemos dizer:
$$\text{sen} \alpha = \frac{d/2}{h} = \frac{h}{R} \quad \therefore R = \frac{h^2}{d/2}$$

Pelo teorema de Pitágoras:
$$h^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Combinando as duas expressões:
$$R = \frac{\ell^2 + d^2}{4} \left(\frac{2}{d}\right) = \frac{\ell^2 + d^2}{2d}$$

Assim, obteremos:
$$\frac{e}{m} = \frac{2d}{\ell^2 + d^2} \left(\frac{E}{B^2}\right)$$

A velocidade v do elétron⁹ é da ordem de $\frac{1}{10}c$. Então, o valor de γ será: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c} = 0,1$

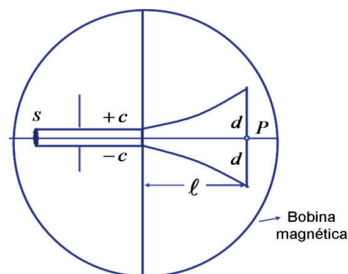
$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,01}} = 1,005$, isto é, a massa m será 0,5 % maior que a massa de repouso m_0 . Esse

efeito relativístico deve ser levado em conta na fórmula anterior.

7.6 COMPROVAÇÃO DA RELATIVIDADE DA MASSA

Bucherer, em 1909, testou a relatividade de massa, medindo $\frac{e}{m}$ em função de v .

Uma fonte S contendo radio Ra^{228} , emite raios β , que são elétrons rápidos, com velocidade v com uma pequena porcentagem menor do que a da luz. Atravessam um condensador longo comparado com a distância entre as placas e atingem a placa fotográfica P . O aparelho é evacuado e está contido em um forte campo magnético cujo vetor indução é perpendicular à direção do movimento dos elétrons e ao vetor campo elétrico entre as placas. O princípio de funcionamento é o mesmo do equipamento precedente, contudo, os raios catódicos são substituídos por raios β , e a tela fosforescente, por uma placa fotográfica.



A intensidade da indução magnética é ajustada de modo que, para uma determinada velocidade v a deflexão magnética seja compensada pela deflexão elétrica. Nessas condições, temos: $v = \frac{E}{B}$ como no caso anterior.

Quando os elétrons estiverem livres do condensador, ficam sujeitos somente ao campo magnético e sua trajetória será um arco de círculo no qual a indução magnética provoca uma força centrípeta. Como vimos, obtemos: $\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}$, inserindo $v = \frac{E}{B}$ teremos: $\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}$.

⁹ Nos raios catódicos.

Se invertermos os campos elétrico e magnético, o feixe de elétrons defletirá na direção oposta e com o mesmo valor d . Como anteriormente, podemos calcular R por considerações geométricas:

$$R = \frac{\ell^2 + d^2}{2d}, \text{ resultando: } \frac{e}{m} = \frac{2d}{\ell^2 + d^2} \left(\frac{E}{B^2} \right).$$

Bucherer encontrou que, conforme a velocidade o valor de $\frac{e}{m}$ variava conforme: $\frac{e}{m} = \frac{e}{\gamma m_0}$, e como a carga é invariável: $m = \gamma m_0 \therefore \frac{e}{m}$ só varia com a massa.

$$\gamma \text{ é o fator de Lorentz: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = v/c, \text{ ver Seção 7.2, Equação (0).}$$

Das experiências de eletrolise de Faraday em 1833, verifica-se a quantidade de eletricidade para liberar um átomo-grama, ou seja, 1,008g de H , é denominada Faraday, abreviadamente F .

Essa quantidade é igual a: $F = 96.487C$

Como resultado das experiências de Thomson (BORN), temos: $\frac{e}{m_0} = 1840F$ (1)

Um átomo-grama contém N átomos. E N é o número de Avogadro.

A massa de um átomo de H será: $m_H = \frac{1,008}{N}$

A carga elemental do elétron “ e ” multiplicada por N fornecerá a carga necessária para liberar 1 átomo-grama de H , pois cada elétron provém da separação do elétron do átomo, logo $F = eN$

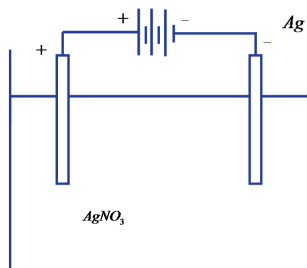
$$F = eN = 1,008 \frac{e}{m_H}, \text{ comparando com: } \frac{e}{m_0} = 1840F, \text{ obtemos: } m_0 = \frac{m_H}{1,008 \times 1840}$$

$$\frac{e}{m_0} = 1840 \times 1,008 \frac{e}{m_H} \Rightarrow m_0 = \frac{m_H}{1,008 \times 1840}$$

Então, tiramos a relação entre m_0 e m_H .

Da eletrólise de uma solução de $AgNO_3$ resulta a primeira definição do Ampère, o Ampère internacional. Seja uma solução de $AgNO_3$ com eletrodos de Ag , teremos: $AgNO_3 \rightarrow Ag^+ + NO_3^-$ ¹⁰

¹⁰ Para mais detalhes, ver Anexo 11, sob título Eletrólise, secção A 11.2.2.



Conectando os eletrodos a uma bateria, os íons Ag^+ se dirigirão ao eletrodo negativo onde se neutralizarão com a carga de elétrons e se depositarão.

Para depositar 1 átomo-grama de Ag , ou seja; 107,88g de Ag , será necessário passar uma carga de $1F = 96.487C$, logo a quantidade de Ag depositada para uma carga de 1C será: $\frac{107,88}{96.487} = 0,001118 \frac{g}{C}$ ou $1,118 \frac{mg}{C}$ C = Coulomb, unidade de carga elétrica, ver Seção 5.1 página inicial.

Ampère internacional é a corrente constante que faz depositar 1,118mg de Ag por segundo de uma solução de $AgNO_3$. 1A internacional = 0,99986A absoluto, definido como se viu em função da força magnética que surge entre dois condutores de corrente elétrica.¹¹ É medida com a balança de corrente eletrodinâmica.

7.7 MEDIÇÃO DA CARGA ELEMENTAR e

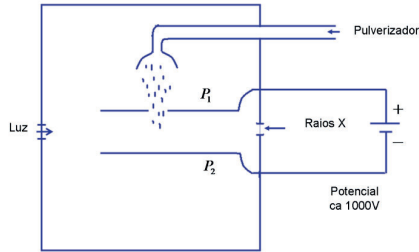
O método usado por Townsend (1897) e Thomson (1896) foi aperfeiçoado por Charles Thomson Rees Wilson em 1903. Uma câmara cilíndrica, dotada de um pistão, sofre uma expansão de forma que o vapor d'água presente fique supersaturado. Os íons presentes agem como núcleos de condensação onde o vapor d'água condensa, formando gotículas. É a chamada "Câmara de detecção ou de bolhas de Wilson" (LAROUSSE). Dentro da câmara, colocam-se duas placas paralelas conectadas a uma bateria. Os íons situados entre as placas ficam sujeitos a um campo elétrico. As névoas que se formam sofrem influência da gravidade e do campo elétrico, e o topo da névoa é acompanhado, isto é, a velocidade é medida. Considerando as gotículas só sob efeito da gravidade e aplicando a lei de Stokes da queda de corpos em um meio viscoso, obtêm-se o tamanho e a massa das gotículas. Supondo-se que as gotículas mais carregadas caem mais rapidamente, medem-se somente as do topo. Wilson obteve $e = 1,033 \times 10^{-19} C$, incerteza no resultado.

Robert Andrews Millikan (1869-1953), entre 1909 e 1917, aperfeiçoou o método de Wilson, pulverizando gotículas de óleo em vez gotículas de água, evitando os erros ocasionados pela evaporação desta última.

¹¹ Ver Seção 5.24.

Quando um corpo esférico cai livremente em um meio viscoso, ele acelera até uma velocidade terminal v_g , quando a força agindo no corpo se iguala à força viscosa. Sendo m a massa aparente: $mg = kv_g$ sendo k uma constante de proporcionalidade.

Sendo E o campo elétrico agindo contra a gravidade, resultando uma velocidade terminal v_E : $qE - mg = kv_E$.



Relação entre as velocidades: $\frac{v_g}{v_E} = \frac{mg}{qE - mg}$

A carga q será: $q = \frac{mg}{E} \frac{(v_g + v_E)}{v_g}$

Se a gota captar outro íon, por radiação cósmica ou raios X , resultará em outra carga q' .

A variação Δq será: $\Delta q = q' - q = \frac{mg}{E} \frac{(v'_E - v_E)}{v_g}$.

Millikan observou que existia um mínimo divisor comum entre as cargas para uma mesma gota e esse menor valor da carga ele identificou com o valor do elétron de Stoney. Isso significa uma quantização da carga elétrica.¹²

Para achar m , aplicamos a lei de Stokes: $\frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho - \rho') = 6\pi\eta a v_g$ em que a é o raio da esfera, ρ a densidade da gota, ρ' a densidade do meio e η é a viscosidade do meio.

A partir daqui, se tem que: $a = \left(\frac{9}{2} \frac{\eta v_g}{g(\rho - \rho')} \right)^{1/2}$

¹² Portanto: $q = ne$, em que n é um número inteiro, nunca fracionário.

Quando as gotas são muito pequenas, v_g deve ser multiplicado por um fator de correção:

$$v'_g = v_g \left(1 + \frac{b}{pa} \right), \text{ em que } p \text{ é a pressão do ar, e } a \text{ e } b \text{ são constantes determinadas experimentalmente.}$$

Millikan obteve: $e = 1,5913 \times 10^{-19} C$, o que resultou em desacordo com outras medições indiretas. A discrepância era causada pela viscosidade usada por Millikan. Após a correção, o resultado foi: $e = 1,6012 \times 10^{-19} C$, concordando com valores obtidos por outros métodos.

Daqui resulta: $N = 6,02472 \times 10^{23} \text{ átomos/átg}$ (número de Avogadro), como vimos na Seção 7.5, Equação (1), Thomson obteve $e/m_0 = 1840F$, da eletrólise da solução de $AgNO_3$, $1F = 96487C$, $m_H = 1,008/N$ e $m_H/m_0 = 1,008 \times 1840$, relação entre as massas do H e do elétron.¹³

7.8 RELAÇÃO ENTRE MASSA E ENERGIA

A variação da massa com a velocidade conduz à modificação de nossas ideias sobre energia. Definindo a força como variação da quantidade de movimento:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}, \text{ e a energia cinética como o resultado da ação da força provocando um deslocamento: } dE = F dx$$

$$\text{Inserindo a força: } dE = m \frac{dv}{dt} dx + v \frac{dm}{dt} dx = mvdv + v^2 dm$$

$$\text{Como: } m = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \text{ diferenciando: } dm = \frac{m_0}{c^2} \frac{v dv}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{mvdv}{c^2 - v^2}, \text{ pois:}$$

$$\frac{dm}{dv} = m_0 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - v^2/c^2\right)^{(-1/2 - 1)} \left(-2v/c^2\right) = \frac{m_0}{c^2 \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \frac{v}{\left(1 - v^2/c^2\right)}, \text{ porém:}$$

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \text{ e } 1 - v^2/c^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

Substituindo $mvdv$ em dE , resulta: $dE = c^2 dm$ (a), integrando: $\int_0^{E_k} dE = c^2 \int_{m_0}^m dm$, obtemos: $E_k - E_0 = c^2(m - m_0)$, E_0 é energia quando $v = 0$, é nula: $E_0 = 0$, m_0 é massa de repouso para $v = 0$,¹⁴ logo $E_k = c^2(m - m_0)(0)$

$$\text{Chamemos a variação de massa de } \Delta m = m - m_0, \text{ então: } E_k = c^2 \Delta m. \quad (1)$$

¹³ Por meio das experiências de Faraday, deduziu: $F = a Q/M$, em que $a = A/z$, sendo A , massa atômica e z , valência, relaciona-se as massas de Ag e H , com a carga Q passando pela solução. Para mais detalhes, ver Anexo 11, "Eletrólise", seção A11.4.

¹⁴ Quando a velocidade for nula, ou seja, corpo em repouso.

Isto é, quando o corpo está em movimento com velocidade v , sua massa é acrescida de um valor $\Delta m = \frac{E_k}{c^2}$, sendo E_k energia cinética do corpo. A equação $E_k = c^2 \Delta m$ foi estabelecida por Einstein em 1905.

Na secção 7.15 daremos uma demonstração baseada na pressão da radiação.

As leis da conservação da massa e a da conservação da energia tornam-se uma só.

7.8.1 Exemplos ilustrativos

7.8.1.1 Fissão nuclear

Em 1939, Lise Meitner e Otto Frisch mostraram que um núcleo U^{235} , quando bombardeado com nêutron térmico, pode se dividir, com emissão de energia, em duas partes aproximadamente iguais. Frisch denominou o processo de fissão.

Uma reação típica seria: $U^{235} + n^1 \rightarrow Ce^{140} + Zr^{94} + 2n^1$

Os fragmentos da fissão podem ter seus números de massa variando de 72 a 158 (KAPLAN). Como na reação há geração de dois nêutrons, existe a possibilidade destes bombardearem outros núcleos de U^{235} , e a reação se tornar em cadeia.

Fazendo um balanço das massas envolvidas na reação, verificamos que a massa final é menor que a massa de U^{235} :

$$\Delta m = (235,0439u) - (139,9054u + 93,9063 + 1,00867u) = 0,224u$$

Sendo u a unidade de massa atômica.

Essa diferença de massa é convertida em energia cinética de acordo com a fórmula: $E = c^2 \Delta m$. Assim, temos: $E(\text{ergs}) = m(\text{g}) \times (2,998 \times 10^{10})^2 \text{ cm}^2/\text{s}^2 = m(\text{g}) \times 8,99 \times 10^{20} \text{ cm}^2/\text{s}^2$

$$1\text{Mev} = 1,602 \times 10^{-6} \text{ erg} \quad E(\text{Mev}) = m(\text{g}) \times \frac{8,99 \times 10^{20}}{1,602 \times 10^{-6}} = m(\text{g}) 5,61 \times 10^{26}$$

$$1u = 1,66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\text{Portanto: } E(\text{Mev}) = m(u) \times 1,66 \times 10^{-24} \times 5,61 \times 10^{26} = m(u) \times 932$$

$$\text{Logo, a energia resultante será: } E = c^2 \Delta m = (0,224u) \times (932 \text{ Mev}/u) = 209 \text{ Mev}$$

A reação em cadeia do U^{235} para se autossustentar necessita de um valor mínimo de massa, isto é, a massa crítica.

Nos reatores térmicos, o núcleo do reator contém o moderador, onde se intercalam os elementos combustíveis. O moderador freia os nêutrons para obter uma reação controlada que, de outra forma, seria explosiva como uma bomba atômica. O moderador pode ser água pesada, carbono em forma de grafite ou água leve. O combustível deve ser protegido com um envoltório conveniente, pois o urânio e o plutônio são muito ativos quimicamente (MURRAY, BABCOCK, WILCOX) e são atacados pelo ar, água e metais líquidos, os refrigerantes comumente usados. Também previne o escape dos produtos de fissão e outros materiais tóxicos do elemento combustível para o fluido refrigerante. O fluido refrigerante retira o calor do reator, para evitar o superaquecimento e para aproveitar o calor gerando energia, por intermédio de um trocador de calor que gera vapor para movimentar uma turbina, gerando energia mecânica. O fluido refrigerante pode ser CO_2 , sob pressão, água pesada sob pressão, água leve ou sódio líquido.

Há dois itens de primordial importância para a segurança do reator: o sistema de controle e a blindagem. O primeiro consiste de barras ou tiras de material absorvente de nêutrons, montados no núcleo de forma que possam ser movidos para dentro e para fora de modo rápido e preciso. Os materiais geralmente empregados são os que têm uma elevada seção de choque de absorção de nêutrons, como boro, háfnio e cádmio. As blindagens devem cercar inteiramente o reator para absorver nêutrons penetrantes e raios γ , protegendo, assim, o pessoal de operação. Os nêutrons são mais bem atenuados por água ou outro material hidrogenado como parafina ou polietileno. Os raios γ são atenuados por materiais muito densos. O concreto comum é barato e preenche os requisitos, sendo largamente usado juntamente com água ou com chapas de aço, chumbo ou outro metal. São essas blindagens que tornam um reator tão grande.

Em 1979, um acidente afetou seriamente o 2º reator da usina de Three Mile Island, nos Estados Unidos, porém, sem causar vítimas ou grandes danos ao meio ambiente.

Contudo, em 1986, em Chernobil, na Ucrânia ocorreu a explosão do reator nº 4. Uma nuvem radioativa cobriu todo o centro-sul da Europa nas semanas seguintes causando danos enormes à economia, principalmente à agricultura. Segundo as autoridades soviéticas, 31 pessoas morreram, mais de 200 ficaram feridas ou foram contaminadas pela radiação e 135 mil habitantes tiveram que ser evacuados. As investigações revelaram: os operadores, embora tivessem experiência em usina convencional, não tinham em uma usina nuclear. Houve falhas no projeto do sistema de controle, cujas hastes eram ocas na extremidade, provocando bolhas de vapor no fluido refrigerante (água), ocasionando que, quando se baixavam as hastes, esperando baixar a potência, ao contrário, esta aumentava; houve então um superaquecimento, as hastes travaram e não foi possível fazer o desligamento do reator, provocando a explosão do vapor. Outro ponto fraco do reator era que a blindagem de sua cobertura estava incompleta. Em consequência, o vapor que tornaria a atmosfera saturada dentro do reator, escapou. Esse vapor teria dissolvido o iodo e o céσιο radioativos liberados e que foram espalhados na atmosfera. Também o grafite do moderador, devido à entrada de oxigênio no reator, entrou em combustão, queimando por 10 dias. O único jeito foi construir um “sarcófago” de concreto para absorver a radiação e conter o combustível remanescente. O governo soviético embargou a construção dos reatores 5 e 6.¹⁵

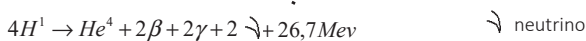
¹⁵ Chernobyl em 04/10/2016. Trinta anos após o incidente, a área em torno, próximo da fronteira entre Ucrânia e Bielorrússia, continua abandonada, com índices elevados de radiação γ , produzindo graves mutações na vida selvagem, flora e fauna.

Trata-se de uma “alquimia”, no sentido de transformar um elemento em outro. Enquanto os alquimistas estavam mais interessados em transformar chumbo em ouro, estamos nos referindo à transformação do U^{235} em outros elementos diferentes.

A respeito do acidente nuclear em Fukushima, sabe-se que o Japão não tem reservas de combustíveis fósseis nem recursos hídricos para a geração de energia. Por esses motivos optou, desde 1954, para a geração de energia nuclear, limitando apenas para propósitos pacíficos, e seu primeiro reator foi construído pela General Electric do Reino Unido. Na década de 1970, os primeiros reatores a água leve foram construídos em cooperação com as empresas americanas General Electric e Westinghouse Electric Co., com trabalho contratual por companhias japonesas, que mais tarde obteriam licenças para construir usinas similares, e pesquisas foram desenvolvidas desde então. No entanto, sempre houve grande controvérsia quanto à segurança das usinas nucleares, pois o Japão é muito sujeito a atividades sísmicas. Alguns acidentes ocorreram, mas sem grande gravidade, porém, em 11 de março de 2011 ocorreu um terremoto seguido de tsunami, com ondas que chegaram a 23 m. As emissões radioativas obrigaram o desalojamento de 80 mil moradores e afetaram gravemente a agricultura, pecuária e pesca local.

Nos meses seguintes até julho de 2011, dos 54 reatores existentes, 19 estavam em operação, desde quando ocorreu o desastre de Fukushima, aumentando “o risco de uma forte escassez de energia em 2012”. Em 27 de abril, aproximadamente 55% do combustível no reator da unidade 1 de Fukushima havia derretido, 35% do combustível na unidade 2 e 30% na unidade 3 enquanto os combustíveis superaquecidos usados nas piscinas de armazenamento das unidades 3 e 4, provavelmente também foram danificadas. O acidente ultrapassou em nível de gravidade o de Three Mile Island, de 1979, e é comparável ao de Chernobil, em 1986.

As estrelas, incluindo o Sol, utilizam de maneira natural o processo que chamamos de fusão termonuclear, transformando H em He , também considerada uma espécie de alquimia. A reação pode ser sintetizada por (KAPLAN; HALLIDAY, RESNICK, WALKER):¹⁶



A probabilidade de ocorrer é baixa, mas, como há muito material, acontece por um longo tempo, não sendo, pois, explosiva. No entanto, para a reação ocorrer, é necessária uma temperatura de cerca $10^8 K$ em lugar dos $600 K$ que os alquimistas usavam.

Se somarmos a massa de $4H^1$, teremos: 4,03258u e a massa atômica de:

$$1He^4 \quad 4,00387u$$

Diferença de massa: 0,02871u, sendo u, unidade de massa atômica.

Usando a equação $E = c^2 \Delta m$, como fizemos anteriormente, obtemos: 26,7Mev

Essa energia em parte é liberada na forma de irradiação, e outra parte é utilizada para manter a temperatura elevada, dando continuidade à reação.

¹⁶ 26,7Mev equivale a $176.119 \frac{Mwh}{kgdeH}$, fatores de conversão: $1u = 1,660 \times 10^{-27} kg$, $1Mev = 4,450 \times 10^{-23} Mwh$

A bomba de hidrogênio funciona, inicialmente, por meio da explosão de uma bomba de fissão que fornece a temperatura de ignição para o material de fusão, deutério de lítio (ISAACS, PITT), que envolve a bomba de fissão. A reação será: $Li^6 + D^2 \rightarrow 2He^4 + 22,5Mev$

A temperatura de ignição é cerca de $45.000.000^\circ K$.

A fusão controlada ainda se encontra em um estado inicial, apesar dos vários recursos e esforços despendidos até hoje. As dificuldades são grandes, a começar pela elevada temperatura necessária no processo, e considerando que não existe nenhum material que possa suportar essa temperatura. Imaginou-se então usar um plasma, a exemplo do existente nas estrelas, contendo deutério e trítio: $D^2 + T^3 \rightarrow He^4 + n^1 + 17,6Mev$

Para evitar o contato material do plasma com as paredes e conseguir uma alta densidade e temperatura, utiliza-se o *pinch effect*, descoberto por Bennett, que é a contração ocasionada no plasma pelo campo magnético criado por corrente elétrica. No entanto, está sujeito a instabilidades que desfazem a contração. Uma dessas experiências é o TOKAMAK, acrônimo russo para “câmara magnética toroidal”, feita em um toroide circular. Até hoje, não se conseguiu manter a reação, a não ser por poucos μs .

Outra técnica é a do “confinamento inercial”, em que pequenas pelotas de DT são comprimidas pelo ataque multilateral de feixes de laser ou partículas. A temperatura se eleva até $10^8 K$ e a densidade de partículas aumenta por um fator de cerca de 10^3 , podendo causar a fusão termonuclear (HALLIDAY, RESNICK, WALKER).

7.9 CONTRIBUIÇÃO DE HENRI POINCARÉ (1854-1912)

Apesar de pouco lembrado, não podemos deixar de mencioná-lo. Sua maior contribuição na Física-Matemática foi a publicação sobre dinâmica do elétron, publicada em 1906, na qual obteve muitos resultados da teoria especial da relatividade independentemente de Einstein. A principal diferença foi que Einstein desenvolveu a teoria de considerações elementares relativas a sinais luminosos, enquanto Poincaré se baseou na teoria completa do eletromagnetismo, restrita aos fenômenos associados com esta última (ENC. BRITANNICA).

7.9.1 Exemplos ilustrativos

Da 2ª lei de Newton temos: $F = \frac{dp}{dt}$, onde $p = mv$, é a quantidade de movimento.

$$\text{Logo: } \int_{p_0}^p dp = \int_0^t F dt \quad \therefore p - p_0 = \int_0^t F dt = I$$

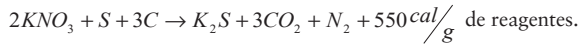
I é chamada Impulsão.

A variação da quantidade de movimento é igual à impulsão.

Pela 3ª lei de Newton: a toda ação corresponde uma reação igual e contrária, então: $F = -F'$. A propulsão a jato baseia-se nessa lei.

No caso de motores a jato: $m_2 v_2 - m_1 v_1 = F \Delta t = I$, isto é, a impulsão é igual à força de empuxo multiplicada pelo intervalo de tempo. Considerando o volume de controle VC do ar entrando no compressor do motor, com massa m_1 e velocidade v_1 , passando pelas câmaras de combustão, onde parte do ar queima o combustível querosene ou gasolina de aviação, os gases de combustão resultantes mais o excesso de ar se expandem com a elevação de temperatura e saem pelo bocal de escapamento com massa m_2 e velocidade $v_2 > v_1$, havendo, portanto, uma aceleração da massa gasosa. Da entrada até a saída transcorre um intervalo de tempo Δt . A força F , resultante dessa variação da quantidade de movimento no intervalo Δt , para trás, origina uma reação no motor igual a $-F$, que propuliona o avião para frente.

No caso de um foguete, consideramos o VC como a massa de gás formada na câmara do foguete por um monopropelente ou bipropelente, cuja massa será m_1 e velocidade v_1 , que é a do foguete com relação à Terra. No bocal de escapamento, teremos a massa $m_2 = m_1$, mas a velocidade será v_2 , acelerada pela expansão devido à alta temperatura e pelo formato do bocal. O propelente pode ser sólido ou líquido. Por exemplo, no caso de um monopropelente sólido, pode-se ter pólvora, usada nos foguetes juninos. A reação seria:



O nitrato de K (Salitre do Egito ou da Índia) é o oxidante.

Um monopropelente líquido seria o peróxido de H (H_2O_2 , água oxigenada). Um bipropelente líquido seria a hidrazina + oxigênio líquido.

Os Estados Unidos planejam um foguete nuclear. Um reator nuclear com moderador de grafite, refrigerado a H . O H é aquecido no reator a $2.000^\circ C$ e usado como propulsor. Para suportar essa temperatura, o bocal é resfriado pelo H líquido. É nessa forma que se armazena o H no foguete (ISAACS, PITT).

$$\text{Da relatividade restrita: } p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

Vimos que a Energia cinética (ver Equação 1, Seção 7.7):

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 = c^2 \Delta m$$

m_0 é a massa de repouso, $m_0 c^2$ energia de repouso

$$\text{A energia total será: } E = E_K + m_0 c^2 = mc^2 \quad \therefore m = \frac{E}{c^2} \quad (2)$$

$$\text{Combinando com a equação (1): } v = \frac{c^2 p}{E}$$

$$\text{De (2): } E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - c^4 p^2/E^2 c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - p^2 c^2/E^2}} = \frac{E m_0 c^2}{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}} \quad (2a)$$

$$\sqrt{E^2 - p^2 c^2} = m_0 c^2 \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

Um caso particular e interessante ocorre quando a massa de repouso for nula, como em fótons e neutrinos. Teremos (LANDAU): $E = cp$ ou $p = E/c$. (2b)¹⁷

Cogitou-se a utilização de um foguete fotônico. O espaço cósmico não tendo atmosfera, não ocasionaria resistência à propulsão e a velocidade poderia ser bastante incrementada, considerando que a velocidade dos fótons é a da luz. No entanto, a realização desse projeto ainda apresenta muitas dificuldades.

Mais factível é o foguete de propulsão iônica. Emprega-se um reator nuclear acoplado a um turbogerador para a produção de energia elétrica, empregada para ionizar vapores de célio Cs^{133} e criar velocidades de escape desejadas, por meio de um acelerador linear (MURRAY).

7.10 POSTULADO DA RELATIVIDADE

As leis da Física são as mesmas para os observadores em todos os referenciais inerciais. Não existe referencial inercial privilegiado.

Referencial inercial é aquele não sujeito a aceleração e que estiver em movimento com velocidade uniforme.

A explicação da gravitação levou Einstein à relatividade generalizada, que veremos a seguir. Trata-se de estender ou generalizar o princípio da relatividade para aplicá-lo a sistemas acelerados, ou seja, não inerciais, além dos que se movem com velocidade uniforme. Com isso se pode resolver simultaneamente o problema da gravitação.

7.11 TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Como já mencionado, Einstein admitiu a velocidade da luz como um invariante físico, com o mesmo valor para todos os observadores. Essa exigência deve-se à aplicação da relatividade ao eletromagnetismo. Ver lei de Ampère-Maxwell na Seção 5.16, Equação 5, que na forma gaussiana, torna-se:

$$^{17} \text{ Se } p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ e } E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ então } p = \frac{Ev}{c^2} \text{ e quando } v = c \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{Pois } c = \nu \lambda \quad (3)$$

Também podemos notar que partículas que se propagam com a velocidade da luz, o tempo se torna nulo, ver Seção 7.2, Equações (1a) e (2). Quando $v = c$, $\beta = 1$, $dt' = 0 \therefore t'_1 = t'_2$, t' não varia. (4)

$c^2 \text{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{v}$, ver Seção 5.25.2, Equação 5.5b, quando falamos do tensor do campo eletromagnético. Podemos observar que c participa da fórmula.

Sabemos que: $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ é a relação entre a velocidade da luz e as constantes dielétrica ϵ_0 e de permeabilidade μ_0 . Essa relação foi deduzida na Seção 5.23, Equação 5, sobre oscilações eletromagnéticas.

Com a invariância de c , a transformação de Galileu não pode ser correta (a não ser para baixas velocidades como $v \ll c$. E, como já visto, o tempo não é absoluto).

Levando em consideração a Figura da Seção 1.3, vamos admitir que os observadores O e O' estejam em movimento com velocidade relativa v , que os eixos X e X' estejam dirigidos ao longo do movimento relativo e que os eixos YY' e ZZ' permaneçam paralelos. Admitimos que os observadores acertem seus relógios quando estiverem em coincidência, $t = t' = 0$, no instante inicial.

No instante $t = 0$, um sinal luminoso é emitido da posição comum dos dois observadores. Após um intervalo de tempo t , o observador O nota que a luz alcança o ponto A e anota $r = ct$.

$$\text{Como: } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ ou } x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad (1)$$

Da mesma forma O' anota $r' = ct'$

$$\therefore x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (2)$$

Temos que relacionar essas duas equações.

$$y = y' \text{ e } z = z' \quad x = vt \quad \text{ou} \quad x - vt = 0$$

Então $x' = k(x - vt)$, com k a ser determinado.

Da mesma forma: $t' = a(t - bx)$, em que a e b são constantes a serem determinadas.

Quando $k = a = 1$ e $b = 0$, teremos a transformação de Galileu: $t' = t$.

Fazendo as substituições na Equação (2), obtemos:

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2)$$

$$\therefore (k^2 - b^2a^2c^2)x^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)xt + y^2 + z^2 = (a^2 - k^2v^2/c^2)c^2t^2$$

Comparando com a Equação (1), obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} k^2 - b^2a^2c^2 = 1 \\ k^2v - ba^2c^2 = 0 \\ a^2 - k^2v^2/c^2 = 1 \end{cases} \quad \text{Fazendo: } k^2 = p, b^2 = q, a^2 = r$$

$$\begin{cases} p - c^2qr = 1 \\ pv - rc^2\sqrt{q} = 0 \\ r - (v^2/c^2)p = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p - [1 - (v^2/c^2)p]c^2q = 1 \\ pv - rc^2\sqrt{q} = 0 \\ r = 1 + (v^2/c^2)p \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - c^2q - v^2pq = 1 \\ vp - c^2\sqrt{q}[1 + (v^2/c^2)p] = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} (1 - v^2q)p = 1 + c^2q \\ vp - c^2\sqrt{q} + v^2\sqrt{q}p = 0 \end{cases} \quad \therefore p = \frac{1 + c^2q}{1 - v^2q}$$

$$vp(1 - v\sqrt{q}) = c^2\sqrt{q} \Rightarrow \frac{1 + c^2b^2}{1 - v^2b^2}v = \frac{c^2b}{1 - vb} \Rightarrow \frac{(1 + c^2b^2)}{c^2b} = \frac{1 - v^2b^2}{1 + vb}$$

$$\frac{(1 + vb)(1 - vb)}{1 - vb} = \frac{(1 + c^2b^2)v}{c^2b} \Rightarrow c^2b + \cancel{vb^2} = v + v\cancel{c^2b^2} \Rightarrow b = \frac{v}{c^2}$$

$$p = \frac{1 + c^2(v^2/c^4)}{1 - v^2(v^2/c^4)} = \frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^4/c^4} = \frac{\cancel{1 + v^2/c^2}}{(1 + v^2/c^2)(1 - v^2/c^2)} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\therefore \boxed{k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma} \quad r = 1 + \frac{1}{1 - v^2/c^2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - v^2/c^2 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k = \gamma}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \quad z' = z \quad t' = k(t - vx/c^2) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases} \quad (3)$$

São as transformações de Lorentz.

Essa fórmula é geral, mas vale também para velocidades compatíveis com a da luz. Como caso particular, se fizermos v muito menor que o da luz: $v \ll c$, obtemos:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Que são as transformações de Galileu, como visto na Seção 1.3.

Da equação (1) obtemos: $x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$.

Essa fórmula sugere que x, y, z, ict ($i = \sqrt{-1}$) são interpretáveis (conforme MINKOWSKI) como coordenadas em um espaço quadridimensional, em que $x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$ representa o quadrado da distância à origem. A ideia de Minkowski levou à concepção geométrica das leis fundamentais da física, que culminou com a inclusão da gravitação na chamada teoria da relatividade geral de Einstein.

Fisicamente, a última equação exprime que $x = ct$ implica $x' = ct'$, ou que a velocidade da luz é independente do movimento do observador. Essa é a explicação do resultado negativo da experiência de Michelson-Morley (BORN).

7.12 TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES

7.12.1 Introdução

A velocidade de A medida por O tem componentes:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

Da mesma forma, A medida por O' :

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Nota-se que usamos dt' e não dt , pois t e t' nesse caso não são iguais.

Diferenciando as equações (3), obtemos:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt = \gamma(V_x - v)dt$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt = \gamma(1 - vV_x/c^2)dt$$

Substituindo dx por $V_x dt$, dividindo as três primeiras equações pela quarta, obtemos:

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2} \quad V'_y = \frac{V_y}{\gamma(1 - vV_x/c^2)} \quad V'_z = \frac{V_z}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}$$

Constitui a lei de Lorentz para a transformação de velocidades, mais geral que a respectiva regra galileana.

Em particular, fazendo $v \ll c$, isto é, para baixas velocidades v muito inferiores a c , obtemos:

$$V'_x = V_x - v \quad V'_y = V_y \quad V'_z = V_z$$

Que é a regra galileana para a comparação das velocidades de um corpo medidas por dois observadores em movimento relativo de translação

(ALONSO, FINN).

7.13 DA VALIDADE DAS FÓRMULAS

7.13.1 Introdução

Como a velocidade da luz é muito alta no vácuo, cerca de 300.000 km/s , é natural pensar que sua propagação fosse instantânea.

O primeiro a intuir de que seu valor fosse definido foi Galileu, que tentou medi-la colocando-se a certa distância de um ajudante, cada um com uma lanterna que poderia ser coberta e descoberta. Inicialmente, ele descobriu sua lanterna. Quando a luz foi vista pelo assistente, este imediatamente descobriu a sua, tornando-a visível para Galileu.

Para uma distância de 1 km, sabe-se agora que o tempo de percurso é de apenas $7 \times 10^{-6} \text{ seg}$. Como é muito menor que o tempo de reação de uma pessoa, o método não serve.

Em 1675, Olaf Roemer, astrônomo dinamarquês, realizou observações dos satélites de Júpiter, pelo qual deduziu que a velocidade da luz fosse de 200.000 km/seg .

Cerca de 50 anos depois, James Bradley, astrônomo inglês, valendo-se da aberração da luz, em 1728, conseguiu um valor melhor: 304.000 km/seg .

Em 1849, Fizeau (1819-1896), físico francês, utilizando uma roda dentada e observando a interferência das imagens em um espelho semiprteado, obteve: 313.300 km/seg .

Albert Abraham Michelson utilizou um espelho rotatório em vez da roda dentada. O valor conseguido em 1880 foi de 299.910 km/seg .

As medições mais atualizadas, por meio do geodímetro atestam: $299.792,9 \text{ km/seg}$.

Tendo em vista esse valor, é compreensível que para os fenômenos usuais na Terra, onde a maior velocidade conseguida por um foguete foi cerca de 10 km/seg , não se conseguisse detectar nenhuma alteração nos conceitos clássicos, em que as fórmulas são válidas, pois $\frac{30}{300.000} = 0,0001$, ou seja aproximadamente 0,01% da velocidade da luz. Usando as fórmulas relativísticas, vimos que se obtêm as fórmulas usuais de Galileu.

Assim como a velocidade da luz, também era usual pensar, como Newton, que a propagação das interações gravitacionais fosse instantânea.¹⁸

Porém, nos fenômenos atômicos, em que temos velocidades compatíveis com a da luz, as fórmulas clássicas falham, sendo forçoso levar em consideração os efeitos relativísticos.

Também, em Astronomia, observamos que a luz leva cerca de 1seg para chegar da Lua, e aproximadamente 8min, do Sol. Em casos de estrelas, a mais próxima, Alfa Centauri, se encontra a 4 anos-luz (o tempo que sua luz leva para chegar a nós), e a galáxia mais próxima, a Grande Nuvem de Magalhães, encontra-se a cerca de 180.000 anos-luz.

Então, a imagem que vemos não é atual, ela é do passado. Por isso, é impossível se falar em tempo absoluto, pois não sabemos o que está ocorrendo agora por lá. Fica, pois evidente a existência de uma 4ª dimensão, o tempo.

O tempo só pode ser considerado imutável para fenômenos locais na Terra, a baixas velocidades, onde se podem aplicar as fórmulas clássicas. Nos outros casos, devemos levar em conta os efeitos relativísticos, função da velocidade do objeto em questão e sua relação com a velocidade da luz, isto é: $\beta = v/c$ e o conseqüente fator de Lorentz: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Conclui-se que as interações se propagam com a velocidade da luz, incluindo as interações gravitacionais onde são mais notadamente observáveis. Não são, portanto, instantâneas. (1)

Vale a pena salientar que, com base na observação do final da Seção 7.9.1 (Equação 4, Exemplos ilustrativos da Seção 7.8), se a velocidade do fóton é igual à da luz, o fóton em si não percebe a passagem do tempo e, nesse sentido, para o fóton, a propagação é instantânea.

7.14 DECAIMENTO RADIOATIVO, MEIA-VIDA

Expressando a natureza estatística do processo de decaimento em uma amostra contendo N núcleos radioativos, a taxa de decaimento é: $-\frac{dN}{dt}$, proporcional a N: $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$, sendo λ a constante de desintegração, com valor característico para cada radionuclídeo.

¹⁸ Na verdade, Newton não associava a interação gravitacional com a propagação da luz, como o fazemos na atualidade.

Integrando na forma:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - \int_0^t \lambda dt \quad \therefore \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \exp(-\lambda t)$$

Recorde-se que: $10^2 = 100 \Rightarrow \log_{10} 100 = 2 \Rightarrow b = e^a = \exp(a) \Rightarrow \log_e b = \ell n b = a^{19}$

Mostrando que o número de núcleos sobreviventes decresce exponencialmente.

Definindo a “meia-vida” T como o intervalo de tempo no qual N se reduz à metade do valor inicial:
 $\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = N_0 \exp(-\lambda t_1) \\ N_2 = N_0 \exp(-\lambda t_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \exp[\lambda(t_2 - t_1)] = 2 \Rightarrow \ell n 2 = \lambda(t_2 - t_1)$$

$$\therefore \frac{\ln 2}{\lambda} = t_2 - t_1 = T \quad \text{Logo: } T = \frac{0,693}{\lambda}$$

Exemplo: seja uma amostra de Iodo 128: I^{128} com as seguintes taxas de desintegração evoluindo no tempo.

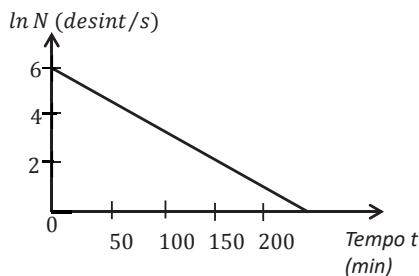
$$\ell n \frac{N}{N_0} = \ell n N - \ell n N_0 = -\lambda T$$

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda T$$

$$\therefore -\lambda = \frac{6,2-0}{225\text{min}-0}, \text{ inclinação da reta} \quad \therefore \lambda = 0,0275 \text{ min}^{-1}$$

Sua meia-vida é:

$$T = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693}{0,0275\text{min}^{-1}} \cong 25\text{min}$$



¹⁹ * Série aritmética: 1 2 3 4 5, logaritmo com base de 32:5 - log 32=5

Série geométrica: 2 4 8 16 32, antilog com base 2 de 5: 32: 2 (elevado a quinta) =32

Trata-se de um exemplo de equação logarítmica e também da fração exponencial. Serve para calcular qual será o valor do capital ao final de certo tempo t , quando o capital inicial for y_0 e com juros $\alpha = i/100$, sendo i a porcentagem: $y = y_0 e^{\alpha t}$. Nesse caso, a função em vez de ser decrescente, será crescente, por isso o sinal positivo de α , em lugar de ser negativo (COURANT). Recorde-se que o valor e é determinado

com o seguinte lim: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (GRANVILLE) ver secção 7.2, equação 1 A.

O iodo radioativo é utilizado para diagnóstico da tireoide, e como sua quantidade é muito pequena, não causa danos ao organismo.

Exemplo: 46,3mg de potássio mostra uma atividade por partículas β (elétrons) de 1,5 desint/s. O isótopo responsável é K^{40} , que se encontra na concentração até 0,012% na mistura natural. Calcular a meia vida do K^{40} .

Quantidade de átomos K^{40} em 46,3mg de potássio natural:

$N = \frac{0,012}{100} \times 46,3 \times 10^{-3} \text{g} \times \frac{6,02 \times 10^{23} \text{at/mol}}{40 \text{g/mol}}$, em que $A = 6,02 \times 10^{23} \text{at/mol}$, é o número de Avogadro. (ver Secção 7.6).

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } N &= 8,37 \times 10^{16} \text{ átomos e } T = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693N}{\frac{dN}{dt}} = \frac{0,693 \times 8,37 \times 10^{16} \text{at}}{1,5 \text{desint/s}} = \\ &= 3,87 \times 10^{16} \text{s} = 1,23 \times 10^9 \text{anos.} \end{aligned}$$

Esse tempo é comparável com o início da vida estimada na Terra. Não estranhe o fato de não ser possível medir a meia-vida desse radionuclídeo, esperando que sua taxa de decaimento diminua. Deve-se mencionar que o potássio presente em nosso organismo tem uma parcela normal desse radioisótopo. Todos nós somos levemente radioativos!

Um teorema simples define a função exponencial.

Se a função $y = f(x)$ satisfizer a equação diferencial: $y' = \alpha y$, em que α é uma constante $\neq 0$, isto é, diferente de zero, y toma a forma: $y = f(x) = c e^{\alpha x}$, em que c é também uma constante. Inversamente, cada função, expressa como $c e^{\alpha x}$, satisfaz a equação $y' = \alpha y$.

Por exemplo, no caso do decaimento radioativo, teremos: $y = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$, consequentemente: $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Sabendo que “desintegração” é a perda de massa por meio da emissão de partículas radioativas, para uma massa de um isótopo de rádio Ra, as experiências mostram que $\lambda = 3,85 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$. Achar a meia vida T desse isótopo, isto é, o tempo necessário para que a massa da substância decaia à metade do que era.

$$\text{Então: } \frac{1}{2} N_0 = N_0 \exp(-0,00385T) \Rightarrow \ln 2^{-1} = -0,00385T \Rightarrow -\ln 2 = \ln e^{-0,00385T}$$

$$\therefore T = \frac{\ln 2}{0,00385} \simeq 180 \text{s}$$

Logo, a meia-vida desse isótopo de Ra é de cerca de 3min. Perceba que é muito mais fácil tratar da meia-vida do que sobre a constante λ , pois é muito mais fácil falar “três minutos” do que “três virgula oitenta e cinco vezes dez elevado a menos três”. Isso justifica o emprego do conceito meia-vida (LIVERHANT; HALLIDAY, RESNICK, WALKER, COURANT, GRANVILLE, KAPLAN, THOMPSON).²⁰

7.15 UMA FORMA SIMPLES DE DEDUZIR A FÓRMULA DE EINSTEIN DA RELATIVIDADE RESTRITA OU ESPECIAL: $E_c = (\Delta m)c^2$

Maxwell deduziu que a luz é onda eletromagnética, comprovado posteriormente por Hertz. Trinta anos mais tarde, Nichols e Hull nos Estados Unidos, e Lebedev na Rússia, em 1903, mediram a denominada pressão de radiação (HALIDAY, RESNICK, WALKER),²¹ que é a variação da quantidade de movimento a qual é função da energia da onda eletromagnética. Como sabemos, o movimento ondulatório transporta energia de um local para outro, por exemplo, o som transportado através do ar ou a radiação solar, transportada do Sol até a Terra através do que Maxwell acreditava ser o “éter luminífero”.²²

De fato:

$$dE_c = Fdx, F = m \frac{dv}{dt}, dE_c = mv dv, E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} pv \text{ pois: } p = mv \text{ (quantidade de movimento)} \Rightarrow p = 2 \frac{E_c}{v}, \text{ relação encontrada por Maxwell, entre quantidade de movimento e energia cinética } E_c.$$

Recordemos: quando um jato d’água incide em uma superfície vertical, a variação da quantidade de movimento será dada por: $mv - (-mv) = 2mv$.

De modo semelhante, quando a luz incide em um espelho vertical, teremos: $P_{\text{luz}} = 2mc$, que é variação da quantidade de movimento, supondo reflexão total, se houver absorção, $P_{\text{luz}} = mc$. Comparando com a expressão de p , obtemos: $\frac{2E_c}{c} = 2mc \Rightarrow E_c = mc^2$, a famosa equação da Relatividade especial, deduzida por Einstein. Na verdade, é: $E_c = (\Delta m)c^2$, pois se trata de variação da massa.

Posteriormente, descobriu-se que as pequenas diferenças de massa, antes e depois das reações nucleares, denominada energia de ligação das partículas nucleares, são responsáveis pela grande liberação de energia nos processos dos elementos radioativos (os elementos descobertos por Marie Curie e outros). Como exemplo, temos a descoberta da fissão nuclear do urânio por Lisa Meitner e Otto Frisch, cujo isótopo U_{235} pode resultar em reação em cadeia, resultando na bomba atômica e nas usinas nucleares. Também as reações de fusão de H para formar He, que fornecem a energia liberada pelas estrelas, como o Sol, e na bomba de H.

²⁰ Silvanus Thompson em *Calculus Made Easy*, o livro teve tanto sucesso que está na internet, em domínio público.

²¹ Média das medições efetuadas com balança de torção: $7,01 \mu N/m^2$, com previsão de $7,05 \mu N/m^2$, medidos em unidades de pressão.

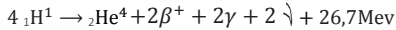
²² Na atualidade, substituímos o éter luminífero pelo conceito do campo eletromagnético (GAMOW).

Observação: pressão é a energia por unidade de volume.

Como $mv = F\Delta t = \text{impulsão}$

Conhecendo a área onde a pressão é aplicada, obtemos a força F e, sabendo o intervalo de tempo em que ela é aplicada, obtemos a quantidade de movimento mv .

Reação termonuclear “próton-próton”:



β^+ partículas β de pósitrons

γ raios γ

ν neutrinos

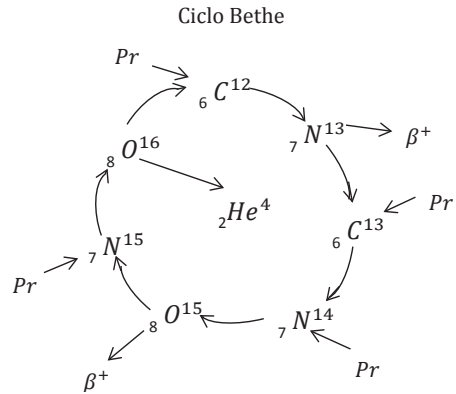
26,7 Mev – energia liberada em megaeletronvolts.

Ciclo de Bethe ou de carbono-nitrogênio:

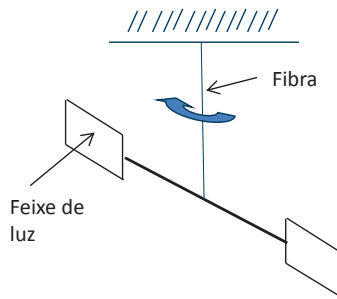
Ocorre com a liberação de cerca 26Mev proposto por Hans Bethe em 1939, ver a figura.

Pr são prótons, núcleos de ^1_1H .

Por alguns anos se pensou que o ciclo C-N fosse responsável pela produção de quase toda energia solar, porém, de acordo com dados recentes, a cadeia próton é agora considerada mais importante do que o ciclo C. Pensa-se que o ciclo C produza mais energia nas estrelas da sequencia principal muito mais luminosas do que o Sol e cujas temperaturas centrais são mais altas, enquanto a cadeia de próton é mais importante para as estrelas da sequencia principal menos luminosas do que o Sol (KAPLAN, GAMOW, KAHN, BETHE, GAMOW).



Para calcular a força, ver exemplo em (ROTH, 2012, Secção 5.1, cap. 5).



Balança de Torção usada por Nichols e Hull. Os detalhes da delicada experiência foram omitidos.

como efeito fotoelétrico. Esse fenômeno não pode ser explicado se considerarmos a luz como de natureza ondulatória.

Em 1905, Einstein introduziu o conceito de fóton e deu uma explicação quantitativa desse efeito.

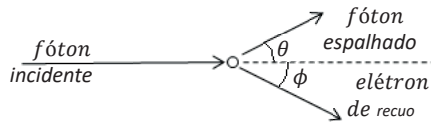
Em consequência do princípio da conservação de energia, cada fóton deve dar toda energia $h\lambda$ a um elétron. Para que o elétron saia do metal, ele deve gastar energia contra a barreira de potencial do metal, chamada função de trabalho ϕ . A equação da energia cinética máxima dos elétrons emitidos será: $\frac{1}{2}mv_m^2 = h\lambda - \phi$, sendo v_m a velocidade máxima dos elétrons.

Então deduzimos ser o fóton partícula que cede sua energia cinética aos elétrons.

O efeito Compton é outro fenômeno no qual raios X perdem energia ao colidir com elétrons. Foi interpretado por Compton como se partículas de raios X colidissem com elétrons, como bolas de bilhar, desviando-se e provocando movimentação desses elétrons.

Um fóton de frequência λ , tem energia $h\lambda$, quantidade de movimento $h\lambda/c$.

Após o impacto com um elétron livre, produz-se um fóton espalhado de frequência λ' , menor do que λ e um elétron de recuo. A energia e a quantidade de movimento do fóton incidente antes do impacto são iguais à energia e quantidade de movimento do fóton espalhado e do elétron de recuo após o impacto.



Logo a quantidade de movimento do fóton $(h\lambda'\sin\theta)/c$ deve ser igual à quantidade de movimento do elétron de recuo vezes $\sin\phi$, são perpendiculares à trajetória do fóton incidente e de sentidos opostos entre si.

No entanto, quando o fóton tiver energia maior do que 2 vezes a energia de repouso do elétron, o fóton pode desaparecer e produzir duas partículas: um elétron e um pósitron, isto é, um elétron positivo.

Nota-se que: $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ ($Q = 1,02$ Mev), e cada fóton γ tem 0,51 Mev de energia. Essa é a reação de aniquilação do pósitron, é o inverso da formação do par elétron-pósitron à custa dos raios γ (FERENCE e LEMON, KAPLAN).

Os elementos químicos são formados nos núcleos das estrelas. São indispensáveis em nossa estrutura física. Os átomos de O que respiramos, o Ca dos nossos ossos, e o Fe e o C da musculatura tiveram uma origem cuja história agora conhecemos. H, He, deutério e parte do Li, foram formados no Big Bang. Os demais, incluindo o He foram sintetizados no centro das estrelas. Após a morte das estrelas, o gás enriquecido com esses elementos é lançado ao espaço, juntando-se ao de outras estrelas. Forma-se uma nova geração de corpos celestes. O Sol é uma estrela de 3ª geração, por isso, a composição do sistema solar é suficientemente rica para a vida como conhecemos (STEINER).

7.15.2.1 Exemplo de aplicação

7.15.2.1.1 Síntese de elementos pesados

A nucleossíntese de elementos leves como: Ne, O, Si etc. até o Fe^{26} são produzidos por fusão em reações exoenergéticas, isto é, com liberação de energia. Os mais pesados que o Fe, como Au, Hg, Pb, Ni, U, Th etc. são sintetizados por reações endotérmicas, isto é, que absorvem parte da energia armazenada pela estrela com as reações exoenergéticas. São formadas na exposição dos núcleos leves ao fluxo de nêutrons, em temperaturas moderadas. Os nêutrons, por serem neutros, não necessitam vencer a barreira coulombiana de íons. Reação típica: $\text{C}^{13}(\alpha, n)\text{O}^{16}$ (0). O íon capturando um nêutron se torna um isótopo do mesmo elemento, com uma unidade a mais de massa atômica: $(Z, A) + n \rightarrow (Z, A + 1) + \gamma$.

Se o núcleo $(Z, A + 1)$ for estável, poderá capturar outro nêutron antes ou depois do decaimento β . Tem-se então o processo *slow*, s, antes do decaimento β , ou o processo *rapid*, r, decaimento β antes da captura de um novo nêutron. Essa nomenclatura foi introduzida por Eleanor Margaret Peachey Burbidge (1919), Geoffrey Ronald Burbidge (1925-2010), William Alfred Fowler (1911-1995) e Sir Fred Hoyle (1915-2001) (SOUZA, SARAIVA, UFRGS, 2000).

7.16 RELAÇÃO ENTRE RELATIVIDADE ESPECIAL E FÍSICA NUCLEAR

7.16.1 Henri Becquerel e experiências de Rutherford²³

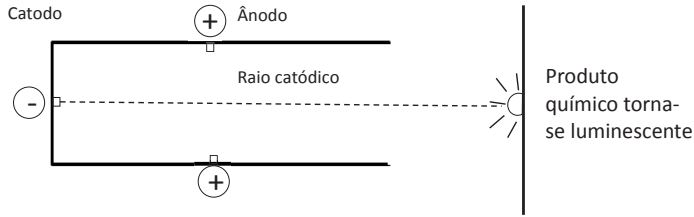
Esse eminente físico francês (1852-1908), ao examinar os sais de um metal raro, o urânio, descobriu que emitiam um raio aparentemente capaz de penetrar os objetos opacos. Um composto de urânio, que ele colocou sobre uma chapa fotográfica envolvida em papel negro, tinha impressionado a chapa “através” do papel. Isso, ao que nos consta, foi a primeira vez que um homem observou as estranhas propriedades penetradoras de certos raios.

No início de 1896, Becquerel realizou experiências com sal duplo de U, sabendo ser de elevada fluorescência. Colocou cristal sobre a chapa fotográfica, envolta em papel preto e expôs à luz do Sol. A luz induziria fluorescência e, se esta contivesse raios X, eles penetrariam o papel preto e registraria na chapa fotográfica.

No outono de 1895, Wilhelm Röntgen examinava fenômenos de luminescência. Passou corrente elétrica por um tubo de vácuo parcial (tubo de raios catódicos, semelhante aos usados em antigos aparelhos de TV).

A fim de examinar a débil luminescência, colocou o tubo dentro de uma caixa preta de papelão. Quando ligou a corrente, viu luminescência fora da caixa de papelão.

²³ Ernest Rutherford (1871-1937), físico neo-zelandês. Esse notável pesquisador foi orientador de Niels Bohr em Manchester. Foi agraciado com título de nobreza, como Primeiro Barão Rutherford de Nelson. Estava aguardando cirurgia de hérnia umbilical, mas como só poderia ser operado por um nobre (exigência do protocolo britânico), a demora custou-lhe a vida.



Descobriu que havia uma folha de papel revestida com camada de platinocianeto de Bário, produto luminescente. Como era possível, se o tubo estava encerrado na caixa preta? Não sabendo a natureza da radiação, chamou-a de raio X.

No caso do cristal de U, Becquerel pensou tratar-se de fenômeno parecido com o raio X e que alguma radiação invisível tivesse energizado o cristal.

Seguindo o mesmo caminho de Becquerel, Marie e Pierre Curie investigaram compostos de U, chegando na pechblenda, um minério betuminoso marrom escuro, mineral de óxido de U, altamente radioativo. Com o efeito piezoelétrico, descoberto por Pierre e seu irmão Jacques, mediram a corrente elétrica induzida no ar ionizado pela radioatividade.

No caso da pechblenda, mediu-se $83 \times 10^{-12} \text{ A}$, enquanto alguns sais de U registravam menos de $0,3 \times 10^{-12} \text{ A}$.

Descobriu-se que o Tório exigia, para ser neutralizado, uma corrente de $53 \times 10^{-12} \text{ A}$.

Concluiu que a pechblenda deveria conter outro elemento radioativo além do U.

Após exaustivas e trabalhosas operações de refinamento com minério de pechblenda, descobriram o polônio, em julho de 1898, de número atômico 84, contido em pó de bismuto²⁴ e semelhante a este, seu número atômico seria determinado muito depois. O polônio é 400 vezes mais radioativo que o U.

No mesmo ano, isolaram um novo elemento no cloreto de bário ao qual deram o nome de rádio²⁵, mais tarde associado ao número atômico 88, cuja radioatividade é 3 milhões de vezes maior que a do U.

Pierre, Becquerel e Rutherford passaram a radiação por um campo magnético e descobriram três tipos: α , β e γ , assim denominados por Rutherford. Pierre descobriu que os raios β têm carga negativa, posteriormente descobriu-se que são elétrons. Rutherford descobriu que os raios α são positivos, e posteriormente se verificou serem núcleos de He. Posteriormente, Rutherford descobriu que os raios γ são neutros, e também são radiação eletromagnética de curto comprimento de onda e alta energia, isto é, de frequência alta.

²⁴ Sulfeto de bismuto.

²⁵ Propriedades semelhantes às do bário.

Em 1903, Becquerel, Pierre e Marie Curie dividiram o Prêmio Nobel de Física. Becquerel recebeu pela descoberta da radioatividade espontânea, e Pierre e Marie Curie pelas pesquisas sobre os fenômenos da radiação descoberto por Becquerel.

Antes deles, Wilhelm Röntgen foi o primeiro a receber Prêmio Nobel, em 1901, pela descoberta dos raios X.

Pierre Curie descobriu que 1 g de Rádio emite 140 calorias/hora, o suficiente para ferver água. Escreveu em seu relatório: “Cada átomo de um corpo radioativo funciona como uma fonte constante de energia, o que implica uma revisão do Princípio de conservação de energia”. Quando a notícia veio a público, a imprensa estampou: “Os Curie descubrem o moto-perpétuo”.

A radioatividade conduziu a ciência para uma nova era.

Desde a Antiguidade, quando Demócrito propôs a ideia de a matéria ser formada por “átomos”, que significam “indestrutíveis”.

Em 1871, o químico siberiano Dmitri Mendeleiev praticamente reinventou a Química ao publicar a Tabela periódica dos Elementos. Listava todos os elementos químicos conforme seu peso atômico e valência, prevendo também elementos que ainda não tinham sido descobertos.

Enquanto os Curies investigavam em Paris, Rutherford e Soddy faziam o mesmo no Canadá. A abordagem deles é mais teórica, e em 1902 publicaram o artigo: “A causa e a natureza da radioatividade”, no qual declaram que a diferença entre os raios X e a radioatividade, até então tidas como semelhantes, é que os raios X são produzidos quando uma substância é bombardeada, enquanto a radioatividade ocorre espontaneamente.

Concluíram ser a radioatividade um fenômeno atômico. Uma forma de decaimento atômico, na qual alguns átomos pesados, instáveis, se desintegram para se converter em átomos mais leves e mais estáveis. “As mudanças devem estar ocorrendo dentro do átomo.”²⁶

Os Curies demonstraram que a radioatividade era uma fonte colossal de energia.

Ninguém sabia o que estava acontecendo.

O 1º passo aconteceu 2 anos mais tarde, quando um obscuro físico amador suíço²⁷, trabalhando na Agência de Patentes de Berna, teve uma ideia. Em 1905, Albert Einstein publicou seu artigo sobre a relatividade especial, na qual derivou a famosa fórmula: $E = mc^2$.

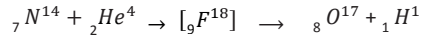
Ou seja: uma diminuta quantidade de matéria, m , podia se transformar em uma quantidade colossal de energia em função da constante c (a velocidade da luz no vácuo). É isso que causa a radioatividade. O que Becquerel e os Curie descobriram, conduziria, um dia, à energia nuclear e às bombas atômicas (THOMAS, THOMAS, STRATHERN, STRATHERN, PAULING).

²⁶ Exemplificando: $ThC (Bi^{212})$, 66,3% desintegra por partículas β e 33,7%, por emissão α . ThC emite β para formar $ThC'(Po^{212})$ ou α para formar $ThC''(Tl^{208})$; ThC' emite α para fornecer Pb^{208} estável, enquanto ThC'' emite β para também formar Pb^{208} estável (KAPLAN).

²⁷ Nascido na Alemanha. Na ocasião, ele tinha cidadania suíça.

7.16.1.1 Experiências de Rutherford

Em 1919, antes de deixar Manchester para assumir a direção do laboratório Cavendish em Cambridge, Rutherford se tornou a primeira pessoa a transmutar um elemento em outro. Ele bombardeou nitrogênio com radiação α , convertendo-o em oxigênio:



Com isso, identificou partículas de hidrogênio, ${}_1H^1$, demonstrando que elas são constituintes do núcleo de nitrogênio, N, e também de outros núcleos. Essa hipótese já havia sido levantada por Prout.²⁸ Por esses motivos, em 1920, Rutherford postulou que o núcleo de H deveria ser uma partícula fundamental, que ele denominou de “próton”, e que seria constituinte de todos os demais núcleos. Assim, agora Rutherford é considerado o fundador da Física Nuclear.

Em 1932, ele detectou, juntamente com Walton e Cockroft, a captura de um próton, ${}_1H^1$, pelo lítio ${}_3Li^7$, decompondo-o em duas partículas α , ${}_2He^4$, e liberando energia. Dois anos mais tarde, conseguiu, com Oliphant e Harteck, efetuar a fusão de dois deutérios, ${}_1H^2$, que se transformaram em hélio ${}_2He^3$, e um nêutron, ou em trítio, ${}_1H^3$, e um próton, ${}_1H^1$, liberando energia em ambos.

Introduziu o conceito de núcleo atômico ao investigar a dispersão das partículas α por folhas delgadas de metal. Verificou que a grande maioria das partículas atravessava a folha sem se desviar e concluiu, com base nessas observações e em cálculos, que os átomos de ouro, Au, e por extensão, quaisquer outros, são estruturas praticamente vazias e não esferas maciças, como Thomson havia imaginado.

Observação: a massa atômica \approx , isto é, aproximadamente igual, pois depende do número de nêutrons nos isótopos e da quantidade relativa dos isótopos, cujo número de massa $A = Z + N$, em que $N =$ número de nêutrons. Daí sua relação com número atômico Z (7.15.1).²⁹

Em 1920, Rutherford sugeriu que elétrons poderiam estar ligados a prótons sem ter existência independente no núcleo. A essa partícula, deu o nome de nêutron. Porém para detectá-lo houve dificuldade, por não ter carga e não ser desviado por campo magnético nem ionizar campos elétricos.

²⁸ A massa atômica de todos os elementos é aproximadamente múltipla da massa do hidrogênio. O procedimento de Rutherford foi proposital, pois ao bombardear um elemento com número atômico $Z = n$ com partículas α , de $Z = 2$, se obtém um isótopo instável de $Z = n + 2$, que decai para um isótopo de $Z = n + 1$ mais um próton ${}_1H^1$ de $Z = 1$, de acordo com a hipótese de Prout. Ver Observação adiante, em 7.15.1.

²⁹ Quando Prout emitiu sua hipótese, não se sabia da existência de prótons e nêutrons no núcleo do átomo. Devemos explicar a diferença entre o número de massa A e massa atômica: foi escolhido o Carbono 12, C^{12} como padrão com número de massa 12, que passou a ter 12 *uma*, unidade de massa atômica, e os outros elementos são comparados com a massa do C^{12} . O número de massa é a soma número de prótons com o número de nêutrons. Por exemplo: o número de massa do cloro é 35, mas a massa atômica é 35,453. Por que a massa atômica é fracionária? Os elementos são formados por uma mistura de isótopos. No caso do cloro, 75,77% dos átomos têm número de massa 35, 24,23%, têm número de massa 37 e uma quantidade muito pequena tem n° de massa diferente de 35 e 37. A massa atômica é a média ponderada desses isótopos. Se examinarmos as reações atômicas do Exemplo ilustrativo da Seção 7.8.1, sobre a fissão e a fusão nuclear, verificamos que há uma diferença entre antes e depois da reação, que somente foi explicado pela fórmula: $E = c^2\Delta m$, a transformação de massa em energia.

Finalmente, em 1932, como resultado da pesquisa da desintegração ou transmutação de núcleos por partículas α , Chadwick demonstrou sua existência, o que conduziu à constituição do núcleo com prótons e nêutrons ver reação $C^{13}\alpha, n O^{16}$ (0).

Mais recentemente, em 1964, Murray Gell-Mann e George Zweig, independentemente, sugeriram que prótons e nêutrons, classificados como bárions, assim como os mésons, fossem constituídos por subunidades, denominadas por Gell-Mann como *quarks*. O *quark down* foi descoberto em 1980 e o *quark up*, em 1996 no acelerador de partículas Tevatron, do Fermilab.

Prótons e nêutrons seriam formados por *quark up*, símbolo u, e *quark down*, símbolo d, da seguinte forma:

$$\text{Próton formado por uud, com a carga: } (+2/3) + (+2/3) + (-1/3) = +1$$

$$\text{Nêutron formado por udd, com a carga: } (+2/3) + (-1/3) + (-1/3) = 0.$$

REFERÊNCIAS

- ALONSO, M.; FINN, E.J. Física um curso universitário. São Paulo: Blucher: 1972. v. 1 e 2.
- Anais ESA Luis de Queiroz, média quadrática.
- Apostila Laboratório de Física do ITA, Desvio quadrático médio, Curva de Gauss.
- ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Campus Elsevier, 2007.
- ARIS, R. Vectors, Tensors and the Basic Equations Equations of Fluid Mechanics, Dover Publications, 1989.
- Aulas de Cálculo Matemática Superior da Univesp, Univ. Virtual do Estado de SP.
- AZEVEDO NETTO, J. M. *Manual de hidráulica*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1957. v. 1.
- BABCOCK AND WILCOX COMPANY. *Steam: its generation and use*. 37. ed. 1963.
- BETHE, H. *Energy Production in Stars*. Phys.Rev. n. 55, v. 4, p. 34, 1939.
- BEZERRA, M.J.; PUTNOKI, J.C. *Matemática*. São Paulo: Scipione, 1996.
- BORISENKO, A.I.; TARAPOV, I. E. *Vector and tensor analysis with applications*. Prentice Hall: 1968.
- BORN, M. *Física atômica*. 4. ed. Lisboa: Fund. Calouste Gulbenkian, 1969.
- CASTRUCCI; GIOVANNI. 6ª serie, FTD.
- CHADE, J. Disponível em: <http://www.estadao.com.br/noticias/impresso,cern-confirma-que-neutrinos-nao-viajam-mais-rapido-que-a-luz-,884041,0.htm>. Acesso em: 26 maio 2017.
- CHAPUT, F. I. *Elementos de geometria*. 14. ed. F. Briguiet & Cia, 1954.
- COSTA, E. V. *Curso de resistência dos materiais*. v. 2, Cia Ed Nacional, 1979.
- COURANT R. *Cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Globo, 1951. v. 1.
- COURANT, R. v. 2.
- CREASE, R. P. As grandes equações. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.
- EDDINGTON, A. S. *The mathematical theory of relativity*. Cambridge Univ. Press, 1923.
- Einstein, A. A Teoria da Relatividade Especial e Geral, contraponto, 1999.
- ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. William Benton, Publisher, 1969.
- FAIRES, V.M. *Thermodynamics*. 4. ed. Nova York: MacMillan, 1962.
- FERENCE JR., M.; LEMON, H.B. E STEPHENSON, R.J. *Curso de física, eletrônica e física moderna*. São Paulo: Blucher.

FERRAZ NETTO, L. Feira de Ciências.

FERREIRA, L. A. Física quântica: o estranho comportamento do mundo microscópico. In: NATALE, A.A.; Vieira C.L. (eds.) O universo sem mistério. Ed. Vieira e Lent.

GALILEI, Galileu, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In: *Teorias e provas matemáticas sobre duas novas ciências*, 1634.

GAMOW, G. *Biografia da Física*. Rio de Janeiro: Zahar, 1963.

GAMOW, G. *The Birth and death of the Sun*. São Paulo: Globo, 1958.

GRANDE ENCICLOPÉDIA LAROUSSE CULTURAL. v. 9, Nova Cultural, 1998. [Há mais de uma referência em todo o livro, acredito que sejam entradas diferentes.]

GRANVILLE, W.A; SMITH, P.F.; LONGLEY, W. R. *Elementos de cálculo diferencial e integral*. 2. ed. Ed. Científica, 1956.

GREENE, B. *O universo elegante*. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

GREENE, BRIAN. *O Universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva*. Cia das Letras, 1999.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física*. 4. ed. Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 2, 3 e 4.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Física*, v.2, Livro Técnico, 1973.

HAWKING, S. [Uma Breve história do tempo]. 30ª ed., Ed Rocco, 2000.

HAWKING, S. [O universo em uma casca de noz]. Ed. Mandarin, 2001.

HÜTTE. *Manual del Ingeniero*. Editorial Gustavo Gili, 1958. v. 1 e 4.

ISAACS, A.; PITT, V. *Física*. Ed Melhoramentos/Edusp, 1976.

KAHN, F. O livro da natureza, 2ª ed., Melhoramentos.

KAHN, F. O Átomo, 3ª ed., Melhoramentos, 1950.

KAPLAN, I. Nuclear Physics, Addison – Wesley Public Inc, 1958 CODATA, 2006.

KAPLAN, I. *Nuclear Physics*. 4. ed. Addison-Wesley Publ, 1958.

KAPLAN, W. *Cálculo avançado*. São Paulo: Blucher/Edusp, 1972.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Mecânica*, Hemus.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Théorie du champ*. 2. ed. Eds Mir, 1966.

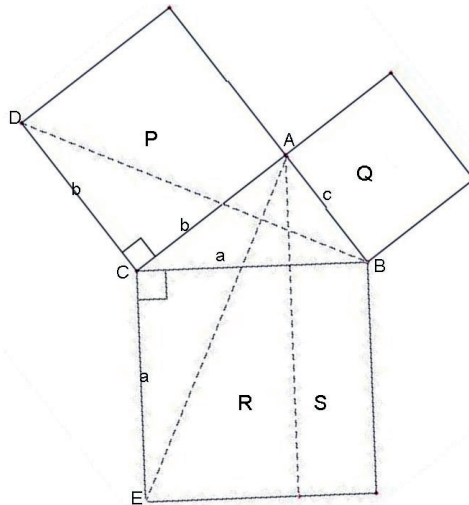
LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Mécanique quantique*. Mir, 1966.

- LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Teoria do campo*, Hemus.
- LEE, J. F.; SEARS, F. W. *Termodinâmica*. Ao Livro Técnico, 1969.
- LEMOINE, J.; GUYOT, J. *Curso de física, magnetismo e eletricidade*. Ed. Livr. Globo, 1942. v. 2.
- LIVERHANT, S. E. *Elementary introduction to nuclear reactor Physics*. John Wiley, 1960.
- MACLACHLAN, J. *Galileu Galilei: o primeiro físico*. São Paulo: Cia das Letras, 2008.
- MAURER, W. A. *Curso de cálculo diferencial e integral, função de várias variáveis e aplicações*. São Paulo: Blucher/Ed. Univ. SP., 1968. v 3.
- MAURER, W.A. *Curso de cálculo diferencial e integral*. 2. ed. São Paulo: Blucher, v 1.
- MÓL, G.S.; FERREIRA, G.A.L.; SILVA, R.R.; LARANJA, H.F. Constante de avogrado. *Química Nova na Escola*. 1996. n. 3.
- MOONEY, D. A. *Mechanical engineering thermodynamics*. 7th print, 1959. Prentice-Hall.
- MURRAY, R. L. *Engenharia nuclear*. Ao livro técnico, Aliança para o Progresso, 1963.
- NEWTON, I. *The mathematical principles of natural philosophy*. 1729.
- OLIVEIRA, K. S.; SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e astrofísica*. Porto Alegre: UFRGS, 2000.
- OSADA, J. *Evolução das idéias da física*. São Paulo: Blucher/Edusp, 1972.
- PAULING, L. *Química general*. 2. ed. Aguilar, 1951.
- PISKOUNOV, N. *Calcul différentiel et intégral*. 3. ed. t. I, et II, Ed. Mir, 1969.
- RAINICH, G. V. *Mathematics of relativity*. 2. ed. John Wiley & Sons, 1954.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*. 2. ed. São Paulo: LTC, 1973. V. 1 e 2.
- ROTH, A. G. *Introdução ao estudo da teoria da relatividade I*. 1. ed. Baraúna, 2011.
- RUSSELL, B. *El A. B. C. De los atomos*. 5. ed. Ed. Imán, 1945.
- SAGAN, C. *Cosmos*, Francisco Alves, 4^a ed., 1983.
- SALMERON, R. A. *Introdução à eletricidade e ao magnetismo*. 4. ed., apostila, 1954.
- SCIENTIFIC AMERICAN. *Gênios da ciência: Isaac Newton*. n. 7.
- SEARS, F. *Princípios de física*. Livro Técnico, 1956. v. 1 e 2.
- SEARS, F. W. *Física Ótica*, Livro Técnico, v. 3, 1956.
- SEARS, F. W. *Física* – Ao livro Técnico, 1954. v. 4.

- SHAMES, I. H. *Mecânica dos fluidos*. São Paulo: Blucher, MEC, 1973. v 11.
- SIELAWA, J. T. *Métodos matemáticos da mecânica do continuum*. Apostila de curso de Pós-graduação do ITA, 1974.
- SIELAWA, J.T. *Equações diferenciais parciais*, ITA, 1976.
- Sistema de consulta interativa, Matemático, Plaza&Janés Ed., 1995.
- SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor Analysis, Theory and Applications*. John Wiley and Sons Inc, 1951.
- SOUZA, K de O.; Fátima, Made. *Astronomia e astrofísica*. Ed. UFRGS, 2000.
- SPIEGEL, M.R. *Análise vetorial*, Livro Técnico, 1969.
- STEINER, J. E; Instituto de astronomia, geofísica e ciências atmosféricas da USP. *Origem do Universo e do Homem*. Estudos Avançados, 2006. n. 20, v. 58.
- STOEVER, H. J. *Engineering Thermodynamics*. 3. Ed. John Wiley & Sons, 1963.
- STRATHERN, P. *Arquimedes e a Alavanca em 90 minutos*. Zahar, 1998.
- STRATHERN, P. *Bohr e a teoria quântica em 90 minutos*. Zahar, 1999.
- STRATHERN, P. *Einstein e a relatividade em 90 minutos*. Zahar, 1999.
- STRATHERN. P. O sonho de Mendeleiev: a verdadeira história da química, Zahar 1940.
- THOMAS, H.; THOMAS, D. L. *Vidas de grandes cientistas*. São Paulo: Globo, 1953.
- THIEL, R. E a luz se fez, o Romance da Astronomia, Melhoramentos, 1952.
- THOMPSON, S. *Caulculus Made Easy*, MacMillan, 1914.
- TIMOSHENKO, S. *Strength of Materials, part 1*. D. Van Nostrand Co. Inc., 1958.
- TYSON, N. G.; GOLDSMITH, D. *Origens: catorze bilhões de anos de evolução cósmica*. São Paulo: Planeta, 2015.
- VAN WYLEN, G. J.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da termodinâmica clássica*. São Paulo: Blucher/Edusp, 1965.
- WILL, C. M. *Einstein estava certo?* Editora UnB, 1996.
- YAVORSKI, B. M.; DETLAF, A. A. *Manual de física*, Mir, 1977.
- ZEMANSKY, M. *Heat and thermodynamics*. McGraw-Hill, 1957

A1B.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

A seguir, a forma clássica para provar o Teorema de Pitágoras.



Os triângulos ACE e BCD são iguais, pois os ângulos em C são iguais e os lados: $AC = CD$ e $BC = CE$.

A área do triângulo BCD é igual à metade da área P .¹

¹ e ² Recordar que a área do triângulo é igual à metade da base vezes a altura.

Portanto, $\triangle BCD = \frac{1}{2}$ do quadrado P .

A área do triângulo ACE é igual à metade da área do retângulo R .²

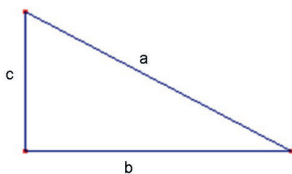
Portanto: retângulo $R =$ quadrado P .

Da mesma forma pode-se provar que o quadrado $Q =$ retângulo S .

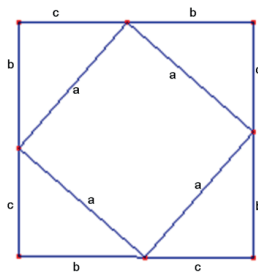
Então: retângulo $R +$ retângulo $S =$ quadrado $P +$ quadrado Q .

Consequentemente: $a^2 = b^2 + c^2$ q.e.d. (*quod erat demonstrandum*), isto é, o que era para ser demonstrado.

Existe outra maneira de prová-lo, por meio de uma forma algébrica, e não geométrica, como a clássica mostrada anteriormente.



Proposição: o quadrado da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados dos catetos b e c .



Demonstração: a área do quadrado com lados $b + c$ é:

$(b + c)^2$, igual à área de: área do quadrado a^2 mais as áreas dos triângulos que têm as áreas $\frac{bc}{2}$, isto é: $4 \frac{bc}{2}$.

$$\text{Portanto: } (b + c)^2 = a^2 + 4 \frac{bc}{2} = a^2 + 2bc$$

$$\text{Então: } b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{q.e.d.}$$

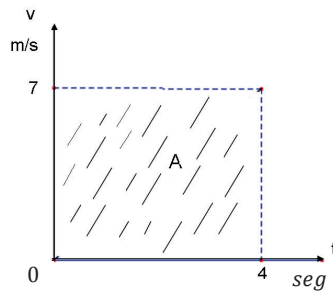
Ref: Elements de Géométrie, F. I. C. (Frère Ignace Chaput), 14ª edição.

2 ANEXO

A2.1 COMO GALILEU DESCOBRIU A ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

Coloque uma bola rolando sobre um plano horizontal com velocidade constante, por exemplo, $v = 7 \text{ m/s}$, durante 4 s.

Graficamente:



A área $A = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 4 \text{ seg} = 28 \text{ m}$ representa a distância percorrida.

Galileu observou uma bola ganhar velocidade enquanto descia por um plano ligeiramente inclinado. Na tábua sulcada, ele foi marcando as sucessivas posições que a bola atingia enquanto cantarolava em ritmo regular. Quando julgou obter precisão, mediu as distâncias da bola em cada intervalo. Usando a primeira distância como unidade, constatou que as distâncias percorridas em tempos iguais seguiam a sequência: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

A seguir, percebeu que as somas cumulativas: $(0 + 1)$, $(1 + 3)$, $(1 + 3 + 5)$,... constituíam em 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 e 64, os quadrados dos n^{os} 1 a 8, isto é, as distâncias são proporcionais aos quadrados dos tempos decorridos.

Para aumentar a exatidão dos intervalos de tempo, Galileu conseguiu iniciar e deter um fluxo tênue de água, coletando e pesando a quantidade de água, medindo em grãos no sistema *troy*, utilizado pelos joalheiros, em que $1 \text{ grão} = 0,0648g$. A unidade de tempo é aproximadamente $1/100 \text{ s}$ e a unidade de comprimento é bem próximo de 1 mm .

Galileu cronometrou pêndulos, observando que o de $0,818 \text{ m}$ de comprimento tinha um período de ida e volta de $0,45 \text{ s}$ e outro, de $1,636 \text{ m}$, $0,64 \text{ s}$, sendo que ambos sempre conservavam o mesmo período. Ele foi o primeiro a observar isso.

Inclinando o plano e medindo tempos e distâncias, usou o primeiro intervalo de tempo como unidade de tempo e o primeiro intervalo de distância como unidade de distância. Usou primeiro para medir o tempo um relógio de água e, depois, um pêndulo. Em resumo, Galileu inventou um relógio de água cujos erros eram menores do que $1/100 \text{ s}$.

Após tomar os valores médios de várias medições, obteve a Tabela a seguir, arredondando os valores:

Tempo	Distâncias em unidades de tempo	Distância desde o início	Velocidade Distância/Tempo
0	0	0	0
1	1 ¹	1	1
2	3	4	2
3	5	9	3
4	7	16	4
5	9	25	etc.
6	11	36	
7	13	49	
8	15	64	

Fazendo a relação:

$$\text{Velocidade/Tempo: } \frac{v}{t} = k \quad (1)^2$$

Observamos que k é constante.

¹ Toma-se como unidade de distância aquela percorrida na primeira unidade de tempo de 0 a 1. O valor da constante de proporcionalidade k depende das unidades escolhidas para distância e tempo, como também da inclinação da rampa de rolamento. Assim, para unidades métricas e queda vertical, teremos $9,8 \text{ m/s}^2$, e o mesmo para as unidades inglesas, $32,174 \text{ ft/s}^2$.

² Nesse caso, o valor de k é 1, mas, em geral, k não tem esse valor (ver exemplos na Equação 1, Seção 1.2.1 e a Equação 4; ver Equação 1a a seguir).

Da tabela, se obtêm:

$$1 = 0 + 1$$

$$4 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$9 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$36 = \dots\dots\dots = 36 = 6^2$$

$$49 = \dots\dots\dots = 49 = 7^2$$

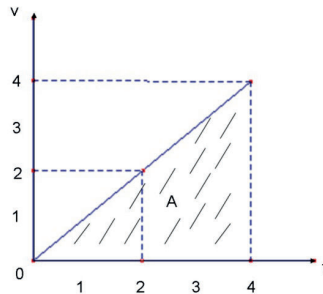
$$64 = \dots\dots\dots = 64 = 8^2$$

Conclusões: a velocidade é diretamente proporcional ao tempo, conforme (1), e as distâncias percorridas são proporcionais aos quadrados do tempo.

Então, temos: $v = kt$.

Para a distância, fazendo um gráfico: v contra t , raciocinando do mesmo jeito de quando a velocidade era constante, concluímos que a área do triângulo A representa a distância percorrida.

Portanto:



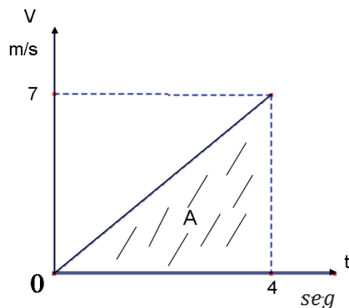
$$\text{Distância } e = \frac{1}{2} vt \quad (2)^3$$

Substituindo com (1), obtemos: $e = \frac{1}{2} kt \times t = \frac{1}{2} kt^2$ (3) o qual⁴ concorda com a conclusão anterior, isto é, que a distância é proporcional ao quadrado do tempo.

³ Recorde-se que a área do triângulo é: $\frac{1}{2} \times \text{altura} \times \text{base do triângulo}$.

⁴ A constante k é denominada “aceleração”.

Exemplo: se a velocidade variasse, com uma relação constante k , de 0 a 7 m/s , de 0 a 4 s, podemos obter (ver Figura):



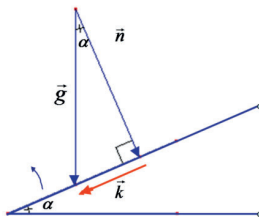
Como vimos anteriormente, a área A (Equação 2) é: $A = 7 \text{ m/s} \times 4 \text{ s} \times \frac{1}{2} = 14 \text{ m}$ $\therefore e = 14 \text{ m}$

Comparando com o caso em que v era constante, representa a distância percorrida.

$$\text{Por (1): } k = \frac{v}{t} = \frac{7 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = \frac{7}{4} \text{ m/s}^2 \quad (1a)$$

$$\text{Aplicando: } e = \frac{1}{2} k t^2 = \frac{1}{2} \frac{7}{4} \text{ m/s}^2 \times 4^2 \text{ s}^2 = 14 \text{ m}$$

$\therefore e = 14 \text{ m}$, o mesmo resultado obtido anteriormente.



Agora, considerando o ângulo α entre a superfície rolante e o plano horizontal, aumentando α , a aceleração \vec{k} também aumenta até atingir 90° , quando \vec{k} se torna \vec{g} , denominada aceleração da gravidade (ver Figura acima).

Galileu realizou medições experimentais com objetos caindo verticalmente, em queda livre, ou seja, quando $\alpha = 90^\circ$, obtendo um valor equivalente, no sistema métrico, próximo de 10 m/s^2 (na época de Galileu, o sistema métrico ainda não existia). Modernamente o valor obtido para o g é $9,8 \text{ m/s}^2$ (4) ao nível do mar e a 40° de latitude N.

Na época, Galileu mostrou seus resultados em uma forma de razões matemáticas, não em forma algébrica.

Conhecendo \vec{k} e α , é possível calcular \vec{g} por trigonometria. Por cálculo vetorial, decompos: $\vec{g} = \vec{n} + \vec{k}$. A componente \vec{n} , vertical à superfície, não promove movimento no objeto, mas a componente \vec{k} produz um movimento no plano inclinado.

Portanto, por trigonometria teremos: $\text{sen } \alpha = \frac{k}{g}$.

Então: $g = \frac{k}{\text{sen } \alpha}$ é a aceleração da gravidade.

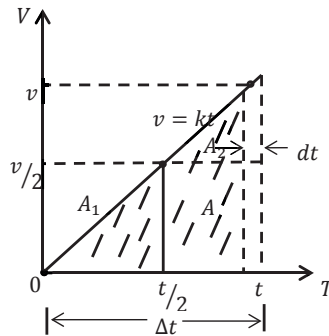
Modernamente, após obter $v = k t$ (ver Equação 1), usaríamos o cálculo integral para obter a distância e .

V, T são as grandezas velocidade e tempo.

v, t são os valores das grandezas.

A distância será dada pela área sob a curva.

$v = kt$ (em nosso caso, uma linha reta):



$$v = \frac{de}{dt} \quad de = v dt, \text{ integrando:}$$

$$e = \int_0^e de = \int_0^v v dt, \text{ pelo "Teorema do valor médio do cálculo integral":}$$

$$A_1 = A_2 = v_m \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad A = v_m \Delta t = A - A_1 + A_2, \text{ em que: } v_m = \frac{1}{2}v, \text{ valor médio de } v, \Delta t =$$

$$t - 0 = t, \int_0^v v dt = v_m \Delta t \text{ (ver Figura)}$$

Então: $e = \frac{1}{2}vt$, o mesmo resultado que a Equação (2)

Também por cálculo integral: $v = \frac{de}{dt} = kt$, portanto: $de = ktdt$, como visto na Equação 1.

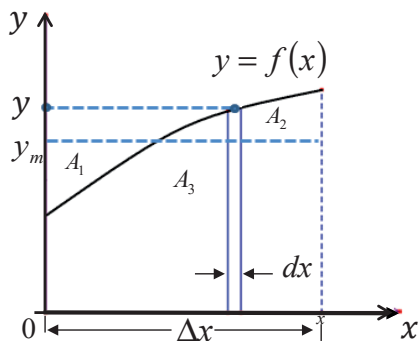
Assim, diretamente se obtém: $e = \int ktdt = k \int tdt$ e $e = \frac{1}{2}kt^2$, obtida na Equação (3)

(GALILEU, 1634; MACLACHLAN, 2008)

Ref.: "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (Teorias e provas matemáticas sobre duas novas ciências), Galileu Galilei, 1634

Galileu Galilei: O primeiro Físico, MacLachlan, James; Cia das Letras, 2008

A2.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO INTEGRAL



A área sob a curva $y = f(x)$ é obtida pela integral:

$$A = \int_0^x y dx \text{ e } A = A_2 + A_3 \text{ (ver Figura)}$$

As áreas: $A_1 = A_2$

Subtraindo A_2 de A

Obtemos: $A_3 = A - A_2 \therefore A = A_2 + A_3$

⁵ Ver demonstração no Anexo 7, seção A 7.2, adendo matemático, Equação 1.

Porém, $A_1 = A_2$, assim, $A = A_1 + A_3$

Da Figura, vemos que:

$$A_1 + A_3 = y_m \Delta x$$

Portanto: $A = \int_0^x y dx = y_m \Delta x$, também: $y_m = \frac{\int_0^x y dx}{\Delta x}$, valor médio.

Tomando-se $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ Obtemos: $y_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}$ ⁶

q.e.d. (que era para ser demonstrado).

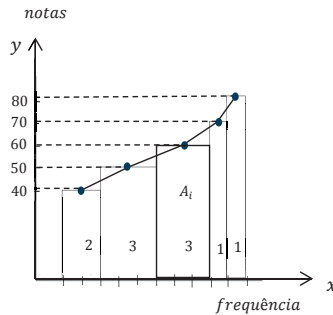
Ref: Elementos de Calc Dif e Integr, Smith, Longley, Granville

(GRANVILLE, SMITH, LONGLEY, 1956)

Recordemos a média aritmética ponderada esclarecendo, como exemplo, calcular a média das notas citadas a seguir.

$$\text{Total: } \sum_{i=1}^5 y_i \Delta x_i = 40 \times 2 + 50 \times 3 + 60 \times 3 + 70 \times 1 + 80 \times 1 = 560$$

(Soma das áreas elementares = A)



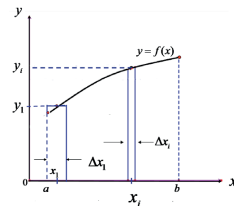
⁶ Recordemos o teorema fundamental do cálculo integral, isto é, a “Integração como processo de soma”, em que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \text{ porém: } y = f(x) \text{ então, } y_i = f(x_i).$$

Consequentemente: $\int_a^b y dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i$

Em nosso caso, como $a = 0$, então:

$$\int_0^x y dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i \text{ como visto anteriormente (ROTH).}$$



Soma das frequências:

$$\sum_{i=1}^5 \Delta x_i = 2 + 3 + 3 + 1 + 1 = 10$$

Largura total das áreas A_i na dimensão x .

Média aritmética ponderada:

$$\sum_{i=1}^5 y_i \Delta x_i / \sum_{i=1}^5 \Delta x_i = \frac{560}{10}$$

$\therefore y_m = 56$ (comprimento da área na dimensão y que, multiplicado por $\sum \Delta x_i$, fornece a área total A)

A diferença entre essa média e o valor médio do cálculo integral é que a segunda é determinada fazendo a quantidade de termos n crescer indefinidamente, $n \rightarrow \infty$, transformando as somatórias em integrais, isto é, a média ponderada, de $y_m = \frac{\sum y_i \Delta x_i}{\sum \Delta x_i}$ (de $i = 1$ até $i = n$) se torna:

$$y_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i} = \frac{\int_a^b y dx}{\int_a^b dx}$$

Área $A = y_m \int_a^b dx = \int_a^b y dx$, ver a Figura da página anterior, em teorma do valor médio do cálculo integral.

Dessa forma, o valor médio do cálculo integral seria uma forma particular de média ponderada, em que os intervalos Δx_i tendem a zero: $\Delta x_i \rightarrow 0$, isto é, as frequências se tornam infinitesimais.

Se em vez de chamarmos de frequência, chamarmos de peso ou, ainda, de porcentagem, o conceito fica mais compreensível.

Suponhamos que o rei Hierão, em Siracusa, procurasse saber a porcentagem de prata na coroa, supostamente de ouro.⁷ Determinaríamos, primeiramente as densidades do ouro puro e da prata pura, e em seguida a amostra da coroa.

Por exemplo: densidade do ouro $d_{Au} = 19,28 \text{ g/cm}^3$, da prata: $d_{Ag} = 10,47 \text{ g/cm}^3$, da amostra da coroa: $d_{coroa} = 17,52 \text{ g/cm}^3$

$$d_{coroa} = \Delta x d_{Au} + \Delta y d_{Ag} = 17,52 \text{ g/cm}^3$$

$$\Delta x + \Delta y = 100\%$$

Resolvendo o sistema de equações, encontraríamos: $\Delta x = 80\%$ e $\Delta y = 20\%$.

A coroa seria constituída de 80% de ouro e 20% de prata.

⁷ Hierão havia pedido para Arquimedes solucionar a questão. Este, ao tomar banho de banheira, observou a água transbordando para fora. A água derramada era equivalente ao volume de seu corpo. Diz a lenda que ele saiu correndo pelas ruas, gritando: “Eureka! Eureka!” [Achei! Achei!].

E assim para ligas metálicas mais complexas, com mais elementos.

A2.3 COMO CALCULAR A DENSIDADE DE UM SÓLIDO?

Por exemplo, deseja-se descobrir a densidade de um objeto. Depois de achar a massa m em gramas g, determinamos seu volume V em cm^3 .⁸

Coloca-se determinado volume de água em uma proveta, ou vasilha transparente, graduada em cm^3 . Mergulha-se o objeto na proveta ou vasilha, a fim de que esteja totalmente submerso.



Determina-se a variação do volume, que será o volume do objeto ΔV .

Calcula-se a densidade: $d = \frac{m}{\Delta V}$

Por exemplo: se $m = 39,5\text{g}$, e $\Delta V = 5\text{cm}^3$

Obtemos: $d = \frac{39,5}{5} = 7,9\text{g/cm}^3$ que é a densidade do ferro a 20°C .

Há uma forma de obter essa densidade com maior precisão por meio do princípio de Pascal: a pressão aplicada a um fluido é transmitida a todos os pontos do fluido e às paredes que o contém. Então, o volume de fluido deslocado que chamaremos de V , que além de exercer pressão sobre o objeto submerso, exercerá pressão no fundo do recipiente, ocasionando um acréscimo no peso do recipiente, proporcional à massa do líquido deslocado: $m_L = Vd_L$, sendo d_L a densidade do líquido.

Denotando a densidade do objeto por $d_c = \frac{m_c}{V}$, com m_c , massa do objeto.

Logo: $V = \frac{m_L}{d_L}$, substituindo na equação anterior: $d_c = \frac{m_c}{m_L} d_L$.

Também com essa equação, podemos encontrar a densidade do líquido, conhecendo a densidade do corpo submerso: $d_L = \frac{m_L}{m_c} d_c$.

O procedimento é: primeiro se pesa o recipiente sem a amostra e, depois, pesa-se com a amostra submersa⁹, tomando-se o cuidado de não deixar o objeto encostar nas paredes ou no fundo. A diferença

⁸ Aplicaríamos o princípio descoberto por Arquimedes: todo corpo imerso em um fluido (líquido ou gasoso), recebe um impulso de baixo para cima, igual ao peso do fluido deslocado (estendido também para gases).

⁹ Naturalmente, após encontrar o peso m_c da amostra, fora do recipiente.

de pesos, conforme o princípio de Arquimedes, fornecerá o empuxo devido ao peso do fluido deslocado: $E = m_L g$, sendo g a aceleração da gravidade.

Nesse segundo caso, utilizamos somente as massas e, por meio da balança analítica, podemos melhorar a precisão.

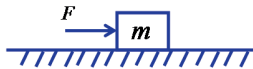
E se o corpo flutuar no líquido, como determinar sua densidade?

Por exemplo, um bloco de madeira flutuando na água com $\frac{2}{3}$ de seu volume submerso. Nesse caso, como o peso do bloco iguala o empuxo, pois estão em equilíbrio: $d_m = \frac{V_a}{V_m} d_a$

Tomando a densidade da água: $d_a = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Teremos: $d_m = \frac{2}{3} d_a = 0,666 \text{ g/cm}^3$.

A3.1 PRINCÍPIO DA AÇÃO MÍNIMA OU DE HAMILTON

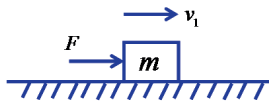


Pela 2ª lei de Newton, um corpo de massa m , sujeito a uma força F , sofrerá uma aceleração a , conforme a equação: $F = ma$.

Sabemos que a aceleração é a variação da velocidade com o tempo, expressa pela fórmula: $a = \frac{dv}{dt}$.

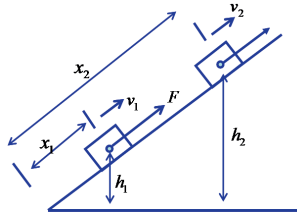
Substituindo na fórmula anterior, temos: $F = m \frac{dv}{dt}$.

Por outro lado, considerando a massa m , sujeita à força F , provocando uma variação da velocidade de v_1 para v_2 , no intervalo de tempo t_1 a t_2 :



$\int_{v_1}^{v_2} m dv = \int_{t_1}^{t_2} F dt$, deduzida da fórmula anterior, por integração, isto é, a variação da quantidade de movimento mdv é igual à impulsão da força exercida sobre o corpo $F dt$.

A3.1.1 Trabalho e energia

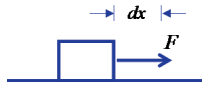


Seja o corpo de massa m , sujeito à força F , com velocidade variando de v_1 a v_2 , elevando-se da altura h_1 até h_2 . Podemos escrever, fazendo um balanço de trabalho e energia:

$$\left(\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) + (mgh_2 - mgh_1) = F(x_2 - x_1) \quad (1)$$

Em palavras: a variação da energia cinética (1º parênteses) mais a variação da energia potencial (2º parênteses) é igual ao trabalho realizado sobre o corpo.

Isso comprova uma equivalência entre trabalho e energia.



Definindo então um trabalho elementar $dW = Fdx$, equivalente a uma variação de energia elementar dE : $dW = Fdx = dE$ (1a), que pode ser genericamente a variação de energia cinética e/ou potencial.

Fazendo: $\int_{x_1}^{x_2} \int_{v_1}^{v_2} m dv dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F dt dx \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p dx = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S$ (2)

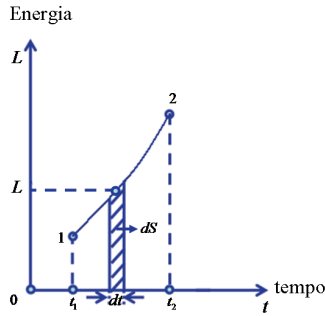
Chamamos a quantidade de movimento elementar: $dp = mdv$ e a quantidade de impulsão elementar: $dl = Fdt$. Se definirmos a energia L , podemos denominar uma grandeza que chamaremos ação elementar: $dS = p dx$ que também pode ser definida como: $dS = L dt$, pois $F dx = dE$. Temos então: $p dx = L dt$, portanto: $L = pv$, e daqui deduzimos uma energia elementar: $dL = p dv$ e a importante fórmula: $p = \frac{dL}{dv}$ (2a)

$dS = p dx = L dt$ (2b) $\therefore p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ (unidimensional) $- ds^2 = dx_i dx_i - c^2 dt^2$ $\therefore p_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial t} = -i \frac{E}{c}$, pois (tridimensional)

$$L = E = \frac{dS}{dt}$$

¹ Ver Fórmula (1) na Seção 7.2: dx_i , componente espacial e cdt , componente temporal.

Também temos, em consequência, o quadrivetor energia-quantidade de movimento, utilizado em Mecânica relativística.



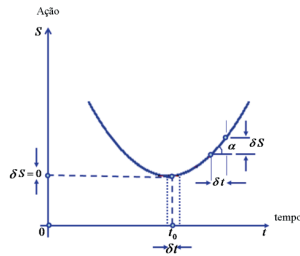
Componentes espaciais: $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ e componente temporal: $p_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial t} = -i \frac{\partial S}{\partial \tau}$ em que c é a velocidade da luz $\tau = ict$ ou $\therefore d\omega = icdt$ $p_\alpha = -i \frac{E}{c}$ em que p_i é a quantidade de movimento e p_α é quantidade de movimento em função da energia.

Como a ação elementar é: $dS = Ldt$.

Integrando: $S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$

Condição para um mínimo: $\tan \alpha = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta S}{\delta t} = 0$

Ver Figura a seguir.



α varia de $\alpha < 0$ para $\alpha = 0$ e torna-se $\alpha > 0$

Condição para um mínimo:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (3) \quad \delta \text{ aqui é variação.}$$

$$\text{Como } L = L(x, \dot{x}, t) \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \quad (4)$$

$$\text{E: } F = \frac{\partial L}{\partial x} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v} \quad (4a)$$

$$p dx = L dt = dS$$

Quando $\delta t \rightarrow 0$

$\delta x \rightarrow 0$ também

Observe que δS é infinitésimo de ordem maior que δx e $\delta \dot{x}$, pois do contrário, não poderíamos ter a derivada $\frac{\delta S}{\delta \dot{x}} = 0$. Se fossem da mesma ordem de grandeza, teríamos uma indeterminação do tipo: $\frac{\delta S}{\delta \dot{x}} = \frac{0}{0}$. Isto é: δS tende ao 0 mais rápido que δx e δt .

$$\text{Então: } \delta S = \int_{t_1}^{t_2} (F \delta x + p \delta v) dt = 0$$

Na condição de mínimo $t_1 \rightarrow t_2$ e como $x = x(t)$, devemos ter: $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

$$\text{Logo: } F \delta x = 0 \text{ e } \delta S = \int_{t_1}^{t_2} p \delta v dt = 0$$

$$\text{Sendo que: } \delta v = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x$$

$$\text{Portanto: } \delta S = \int_{t_1}^{t_2} p \frac{d}{dt} \delta x dt$$

$$\text{Integrando } \int_{t_1}^{t_2} p \delta v \text{ por partes}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\therefore \int p \delta v = p v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v dp \text{ como } t_1 \rightarrow t_2$$

$v_1 = v_2$ no limite.

$$\therefore p v \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \therefore \delta S = \int_{t_1}^{t_2} F \delta x dt - \int_{t_1}^{t_2} v dp dt = 0$$

$$\therefore \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta x}{\delta t} d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0} \quad \text{q.e.d.}$$

Outra forma das Equações 3 e 4, derivando em α :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} \right) dt = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \eta \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\eta}{dt} \right) dt \quad \eta(t_1) = \eta(t_2)$$

Integrando o 2º termo por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\eta = \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

pois $\int u dv = uv - \int v du$ Como $\eta(t_2) = \eta(t_1)$ e $\partial L / \partial \dot{x} = \partial L / \partial v = p = mv$

$v_1 = v_2$ no limite $\therefore m(\eta_2 v_2 - \eta_1 v_1) = 0$, o 1º termo se anula.

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt = 0 \quad , \text{ pois: } \quad \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

e $\partial t \rightarrow 0$

Também:

$$\text{Multiplicando por } \delta \alpha, \text{ usando } \eta \delta \alpha = \delta x \text{ } \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt = \delta \alpha \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \delta S = 0$$

Quando $\alpha = 0$, a derivada $\delta S / \delta \alpha = 0 \therefore \delta S = 0$, ver Figura ao lado da Equação 3.

Ver: Arfken-Weber e Landau (Mecânica)

$$\therefore \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0} \quad \text{q.e.d.}$$

Em consequência: $F = \frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} (mv)$, pois $\partial L / \partial \dot{x} = p$, ver Equações 4a e 2a:

Que é a 2ª lei de Newton.

$$\text{Também: } F dt = d(mv)$$

No intervalo de tempo dt , temos dm elementar, e m pode ser considerado constante no intervalo elementar $dt \therefore F dt = mdv$. Obtemos: $mdv = F dt$.

Retomando a fórmula da impulsão e quantidade de movimento: a variação da quantidade de movimento mdv é igual à impulsão da força exercida sobre o corpo.

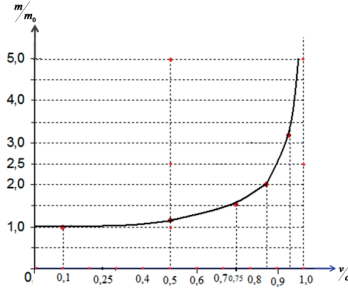
Integrando: $\int_{v_1}^{v_2} m dv = \int_{t_1}^{t_2} F dt$

Também podemos considerar m constante no intervalo de tempo dt correspondente ao intervalo de velocidade dv .

Em mecânica relativística, $m = f(v)$, a massa é função da velocidade. Quando integramos, devemos levar em conta essa variação, pois $\Delta t \neq 0$, enquanto, $dt \rightarrow 0$ (isto é, $t_1 \rightarrow t_2$).

Em baixas velocidades m pode ser considerada constante. Em altas velocidades a massa varia com a velocidade, cujo limite é a velocidade da luz.

No Capítulo 7, Seção 7.5, Equação 2, sobre relatividade da massa: $m = \gamma m_0$ em que m_0 massa de repouso e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = v/c$ γ é o fator de Lorentz (ver equação 0 da Seção 7.2). Assim, temos:



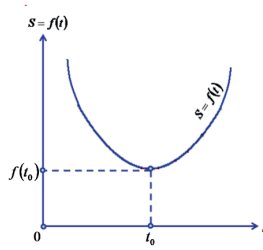
Quando $v/c \rightarrow 1$ $m/m_0 \rightarrow \infty$

O limite é assintótico.

v/c	m/m ₀
0,1	1,005
0,5	1,15
0,75	1,50
0,87	2,00
0,95	3,20

Referência: Alonso-Finn 1º vol.

Para saber se o ponto crítico é um mínimo, devemos examinar como a derivada varia ligeiramente antes e depois do extremo. Se a derivada antes for negativa e depois do extremo for positiva, teremos um mínimo. Toda função $S = f(t)$ passa por um “mínimo” (relativo) em um ponto t_0 , quando se pode determinar uma vizinhança de t_0 , tal que, para todo t diferente de t_0 dessa vizinhança, temos: $f(t) > f(t_0)$, essa condição define o “Princípio da ação mínima”. (5) Ver figura adiante.



O contrário determina um máximo.

Os pontos máximo e mínimo de uma função recebem o nome genérico de extremos.

Referência: Maurer, v.1

O filósofo e matemático inglês Bertrand Russel (1872-1970) cita o astrônomo e físico inglês Arthur S. Eddington (1882-1944), um dos primeiros a compreender e explicar a teoria da relatividade em seu livro *The mathematical theory of relativity*.

Em 1919, participou da expedição para observar e fotografar o eclipse solar na Ilha do Príncipe, próxima da costa da Guiné espanhola. Com uma expedição em Sobral, no Ceará, confirmou-se a previsão de Einstein quanto à deflexão da luz das estrelas ao passarem próximas do Sol.

Voltando ao assunto inicial: depois da massa e da energia, há uma quantidade física com papel muito importante na Física moderna, especialmente na teoria da relatividade: a “Ação”. Não se deve confundir com a “ação e reação” de Newton. Se quisermos falar sobre a matéria presente em qualquer ponto do espaço-tempo em um dado instante, devemos usar o termo densidade. A densidade multiplicada pelo volume nos dá a massa ou seu equivalente, a energia. Do ponto de vista espaço-tempo, é muito mais importante o que se obtém multiplicando a densidade não pelo volume espacial, porém, por um volume tetradimensional de espaço-tempo: obtemos, assim, a “Ação”, que é a massa ou energia multiplicada pelo tempo, mais importante que os anteriores.

Eis aqui a primeira conexão entre a relatividade e a teoria dos *quanta*: em ambas, a “Ação” tem a maior importância.

De fato, pela Equação 1 da Seção 7.8: $dE = c^2 dm = c^2 \rho dV$

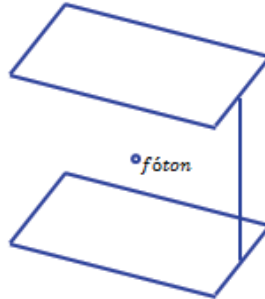
Da Equação 2 do Anexo 3: $Edt = dS$, teremos: $c^2 \rho dV dt = dS$, e como: $dV dt = d\Omega$,
 $c^2 \rho d\Omega = dS$

Em que V , volume, m , massa, Ω , espaço tetradimensional, ρ , densidade e S , Ação.

A3.2 RELATIVIDADE DO TEMPO

A3.2.1 Relógio de luz

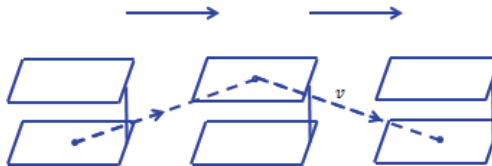
Dois espelhos paralelos com um fóton oscilando entre ambos. O relógio faz “tique-taque” toda vez que o fóton completa uma viagem de ida e volta.



Os espelhos estão a 15 cm de distância. O fóton leva um bilionésimo de segundo para fazer um percurso de ida e volta, um bilhão de “tique-taques” perfaz um segundo.

O que foi apresentado vale para um sistema estacionário.

Suponhamos outro relógio que passa com velocidade constante. O tempo registrado pelo segundo relógio, com relação ao primeiro, será o mesmo?



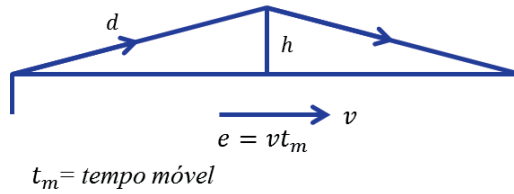
Velocidade do fóton:

$$v = \frac{\text{percurso}}{\text{tempo}} \quad \therefore \text{tempo} = \frac{\text{percurso}}{\text{velocidade}}$$

Como a velocidade do fóton é constante (igual à da luz), e o percurso aumentando, provocará um tempo maior.

Logo, o relógio móvel pulsará mais lentamente, pois o tempo de pulsação aumenta.

A3.2.2 Demonstração matemática



$$\text{Tempo estacionário: } t_{est} = \frac{2h}{c} \quad h = c \frac{t_{est}}{2}, \text{ pois: } c = 2 \frac{h}{t_{est}}$$

$$h = 15 \text{ cm}$$

$$t_{est} = 1 \text{ bilionésimo de s}$$

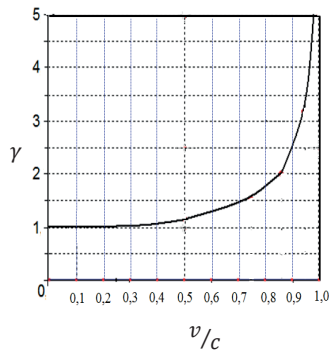
$$1 \text{ bilhão de tique-taques} = 1 \text{ s}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt_m\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt_m\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ct_{est}\right)^2} = c \frac{t_m}{2} \quad (\text{conforme Pitágoras})$$

$$d^2 = \frac{1}{4}v^2t_m^2 + \frac{1}{4}c^2t_{est}^2 = \frac{1}{4}c^2t_m^2 \Leftrightarrow t_m^2(c^2 - v^2) = c^2t_{est}^2$$

$$t_m = \sqrt{\frac{c^2t_{est}^2}{c^2 - v^2}} \Leftrightarrow t_m = \frac{t_{est}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{Parâmetro de velocidade.}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ Fator de Lorentz, ver Seção 7.2, Equação 0.}$$



Quanto $> v^2$, $> t_m^{(2)}$, pois $\frac{v^2}{c^2}$ aumenta:

$\therefore \sqrt{1 - v^2/c^2}$ diminui $\therefore t_m$ aumenta, pela equação 1a da secção 7.2, o intervalo $d't \rightarrow 0$, o tempo próprio torna-se lento até parar.

No limite para $v = c$, $\gamma \rightarrow \infty$

Isto é, o tempo pararia; é o que ocorre em um buraco negro (por efeito gravitacional que aumenta a velocidade até $v \rightarrow c$).

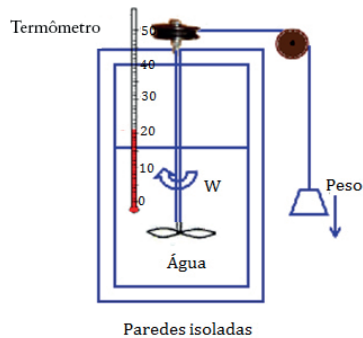
² Quanto maior v^2 , maior t_m .

4 ANEXO

A4.1 1º PRINCÍPIO DA TERMODINÂMICA

Calor é uma forma de energia. É energia em trânsito.¹

Experiência de J. P. Joule em 1840. James P. Joule (1818-1889)



Equivalente mecânico do calor.

O peso cai fazendo rodar a roldana fornecendo um trabalho W para a água, elevando sua temperatura.² Isto é, o trabalho W é convertido em calor Q . Portanto, trabalho e calor são mutuamente conversíveis.

¹ Passa de um corpo a maior temperatura para um corpo a menor temperatura. Passa da água para o termômetro, fazendo subir sua temperatura.

² Por atrito interno, agitação, das moléculas da água.

Resultado: $1kcal = 427kgfm^{-3}$

$$Q = mc\Delta t \quad Q \text{ em } kcal$$

m = massa da água em kgm (quilograma massa)

Δt = elevação de temperatura em $^{\circ}C$ c = calor específico em $\frac{kcal}{kgm^{\circ}C}$

Referência: D. Mooney, Mechanical Engineering Thermodynamics.

M. Zemansky, Heat and Thermodynamics.

V. M. Faires, Thermodynamics

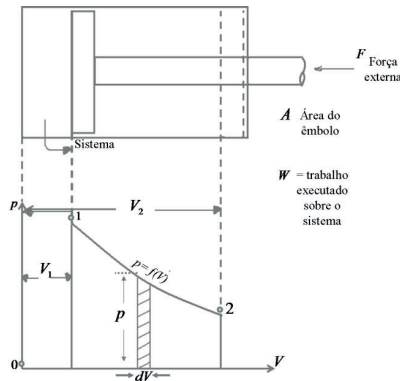
A4.2 TRABALHO EM UMA VARIAÇÃO DE VOLUME

Em um sistema fechado (sem escoamento):

$$\delta W = (pA)de = p(Ade) = pdV \text{ Trabalho executado sobre o sistema fechado.}$$

Usamos o símbolo δ para indicar “uma pequena quantidade de trabalho”, mas não uma pequena variação da propriedade W , pois W não é uma propriedade.

Matematicamente falando, δW não é uma diferencial exata, pois a integral de δW :



$W = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 pdV$ (0) Depende do percurso executado entre os estados 1 e 2. Para um percurso diferente, o valor de W será outro.

Para ser diferencial exata, deveríamos ter: $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B dU = [U]_A^B = U_B - U_A$

³ kgf – quilograma força.

Isto é, o valor da integral, nesse caso, só depende dos estados inicial e final e não do percurso executado.⁴

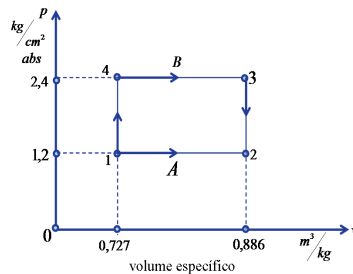
A4.2.1 Diagrama indicador (0a)



Em outras palavras, quando a diferencial não é exata como δW , o valor da integral $W = \int_1^2 p dV$ (0a) depende do desenvolvimento da curva $p = f(V)$, pois o valor da integral W é medido pela área encerrada pela curva $p = f(V)$. Se a curva for com desenvolvimento diferente, a área sob a curva será outra.

Podemos obter experimentalmente o gráfico do trabalho resultante em um cilindro fornecendo força motriz por vapor, usando o “diagrama do indicador”, como se vê na figura acima.

A4.3 ENERGIA INTERNA



Imaginemos dois processos:

⁴ Esclarecendo melhor, se $U = f(x, y)$, a diferencial total: $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P dx + Q dy$, nesse caso é denominada diferencial exata. Veja-se a ref. Maurer, v3,

Processo A: 1kgm de ar a pressão constante de $1,2\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\text{ abs}$ e 25°C , expande-se de $0,727\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$ até $0,886\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$. Sua temperatura sobe até 90°C e a energia interna aumenta de $11,21\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

É o percurso entre os estados 1 e 2.

Processo B: O ar é aquecido a volume constante de 1 a 4, até que sua pressão suba a $2,4\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\text{ abs}$. A seguir se aquece de 4 a 3, expandindo de $0,727\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$ até atingir o volume específico igual ao estado 3, de $0,886\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$. Esfria-se a volume constante até chegar ao estado 2.

Usando a lei dos gases perfeitos: $pV = RT$ $R = 29,27\frac{\text{m}^3}{\text{kg}^\circ\text{K}}$ ⁵

$$T_4 = \frac{2,4 \times 10^4 \times 0,886}{29,27} = 596^\circ\text{K} \text{ (ou } t_4 = 323^\circ\text{C)}$$

$$\text{e } T_3 = \frac{2,4 \times 10^4 \times 0,727}{29,27} = 726^\circ\text{K} \text{ (ou } t_3 = 453^\circ\text{C)}$$

Calor Q : $Q = c_v(t_4 - t_1) + c_p(t_3 - t_4) + c_v(t_2 - t_3)$, fornecido e retirado no processo B.

$$c_v = \text{calor específico a volume constante: } 0,172\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

$$c_p = \text{calor específico a pressão constante: } 0,241\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

$$Q = 0,172(323 - 25) + 0,241(453 - 323) + 0,172(90 - 453)$$

$$Q = 51,28 + 31,25 - 62,40 = 20,13\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \quad (1)$$

Referência: Lee-Sears, Termodinâmica;

Herman Stoever, Termodinâmica;

David Mooney Mechanical Engineering Thermodynamics;

Willie A. Maurer, Cálculo Diferencial e Integral, v4 e 3.

Como os trabalhos efetuados nos processos a volume constante 1 – 4 e 3 – 2 são nulos, o trabalho líquido será o efetuado no processo de expansão a pressão constante:

$$W = p(v_3 - v_4) = 2,4 \times 10^4 \times 0,158 = 3814\frac{\text{kgfm}}{\text{kgm}}$$

⁵ Na verdade seria $29,27\frac{\text{kgfm}}{(\text{kgm}^\circ\text{K})}$. Como no sistema MKS técnico, os valores em kgf e kgm são iguais, por isso podem ser cancelados, ver ao pé da pag. Na Secção 4.4.

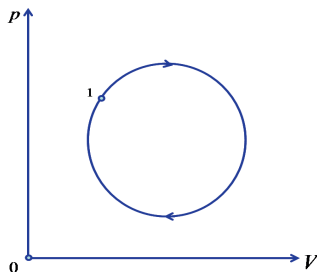
$$\text{ou: } \frac{W}{J} = \frac{3814}{427} = 8,92 \text{ kcal/kgm} \quad (2)$$

Varição da energia interna do ar no processo B: Do calor fornecido ao Sistema como Q (eq. 1), uma parte se transforma em trabalho, fornecido pelo Sistema ao exterior, W/J (eq. 2), o restante resulta como energia interna ganho pelo Sistema. Energia interna: $\Delta U = Q - \frac{W}{J}$

$$(20,13 - 8,92) = 11,21 \text{ kcal/kg} \quad (\text{kg entendemos kgm})$$

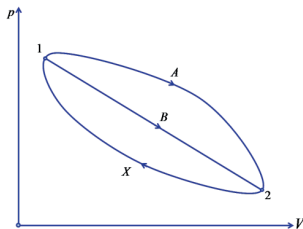
A mesma variação do processo A.

Isto é, em um ciclo, que seria ir do estado 1 e voltar ao estado 1, a variação da energia interna será nula pois se volta ao estado inicial. (2a)



$$\text{Em geral, em um ciclo: } Q_{\text{ciclo}} = \frac{W_{\text{ciclo}}}{J}$$

Pelo 1º Princípio, que é uma forma da conservação de energia, o calor fornecido deve ser igual ao trabalho executado.



Consideremos dois processos A e B entre os estados 1 e 2, e um terceiro processo X retornando do estado 2 ao estado 1. Teremos pelo 1º princípio, como já visto: $Q_a + Q_x = \frac{W_A + W_X}{J}$ e

$$Q_B + Q_x = \frac{W_B + W_X}{J} \quad (2b)$$

Subtraindo um do outro: $Q_A - \frac{W_A}{J} = Q_B - \frac{W_B}{J}$

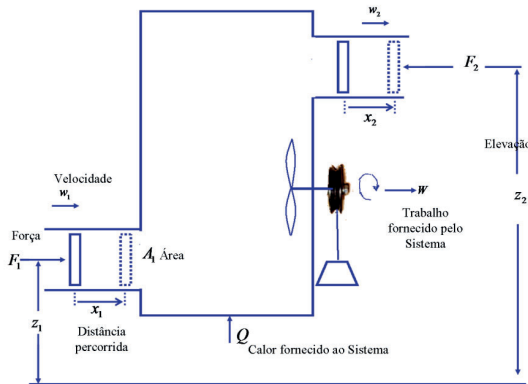
Conclusão: A variação da energia interna em um sistema depende somente dos estados inicial e final e não do processo que une os estados. Isso é característica de uma “propriedade” do sistema ou, matematicamente, uma função de ponto, isto é, cada ponto tem um determinado valor. Então podemos dizer que a diferencial dU é exata.

Podemos escrever então para qualquer processo 1 - 2, o 1º Princípio será:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} - \frac{W_{12}}{J} \quad (3)$$

Referência: Stoever

A4.4 EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA ESCOAMENTO PERMANENTE (STEADY FLOW)



Trabalho efetuado pelo sistema quando a massa m flui pelo sistema:

$$W + F_2x_2 - F_1x_1$$

A_1 e A_2 Áreas dos êmbolos

$$F_1x_1 = p_1A_1x_1 = p_1V_1$$

$$F_2x_2 = p_2A_2x_2 = p_2V_2$$

Portanto, o trabalho será:

$$W + p_2V_2 - p_1V_1 \quad V_1 \text{ e } V_2 \text{ volumes ocupados pela massa } m, \text{ ao entrar e ao sair.}$$

Aumento da energia interna: $m(u_2 - u_1)$ u_1 e u_2 energias internas específicas (por unidade de massa) na entrada e na saída.

Varição da energia cinética: $\frac{1}{2}m(w_2^2 - w_1^2)$

Varição da energia potencial: $mg(z_2 - z_1)$

g = aceleração local da gravidade

Obtemos para equação da energia:

$$Q - (W + p_2 V_2 - p_1 V_1) = m \left[(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2) + g(z_2 - z_1) \right]$$

Dividindo por m e ordenando:

$$\left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{1}{2} w_1^2 + g z_1 \right) - \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{1}{2} w_2^2 + g z_2 \right) - \omega + q = 0$$

Onde: Q calor fornecido ao sistema

W trabalho fornecido pelo sistema

v volume específico, ω trabalho específico, q calor específico, isto é, por unidade de massa.

À expressão: $h = u + pv$ chamamos entalpia. Como u , p e v são funções de estado do sistema, isto é, propriedades, a entalpia h também é uma propriedade e sua diferencial dh é uma diferencial exata..

Então, h_1 e h_2 são as entalpias na entrada e na saída.

Podemos escrever para o 1º Princípio, que é uma forma da equação da conservação da energia como:

$$\underbrace{\left(h_1 + \frac{1}{2} w_1^2 + g z_1 \right) - \left(h_2 + \frac{1}{2} w_2^2 + g z_2 \right)}_{\text{Energia } \Delta e} - \omega + q = 0$$

Trata-se de um balanço de energia: $\Delta e = \omega - q$

É outra forma do 1º Princípio, usada para regime de escoamento permanente (*steady flow*).

5 ANEXO

A5.1 2º PRINCÍPIO DA TERMODINÂMICA

A5.1.1 Introdução

The moving finger writes; and having writ,

Moves on: nor all your piety nor wit

Shall lure it back to cancel half a Line

Nor all your tears wash out a word of it.

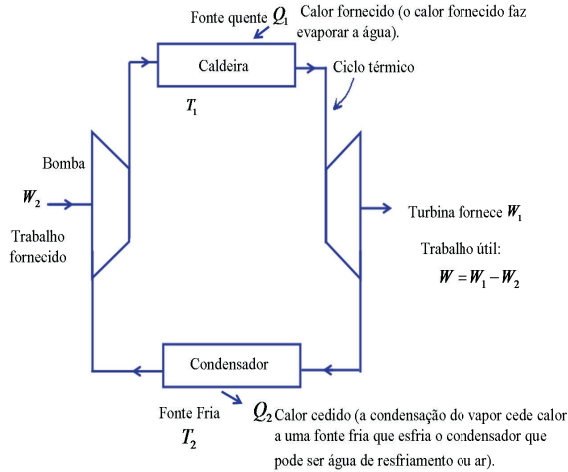
Omar Khayyam, Rubayat – tradução de Fitzgerald

Do sublime ao pragmático medeia o 2º princípio.

Toda máquina térmica funciona entre uma fonte de calor e um absorvedor a baixa temperatura, fornecendo trabalho útil e absorvendo trabalho para bombear o fluido da fonte fria para a fonte quente.

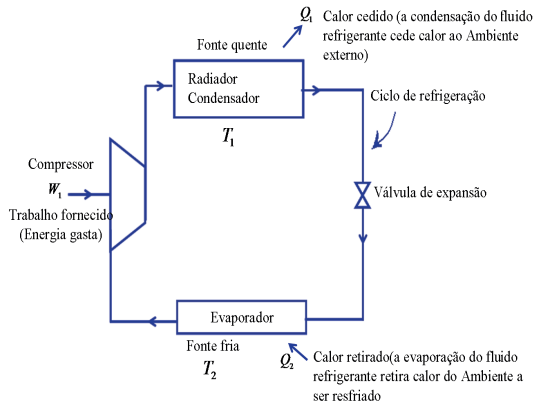
Por exemplo:

$$Q_1 > Q_2 \quad \text{Temperaturas: } T_1 > T_2$$



$W_1 > W_2$ Isto é, a máquina térmica só funciona à custa da troca de calor entre fonte quente e fria, fornecendo trabalho útil.

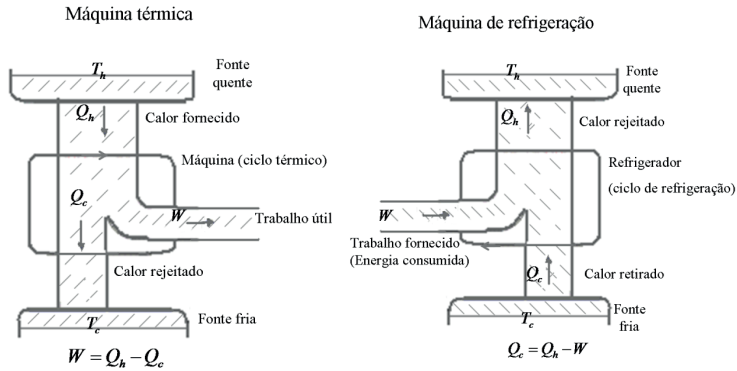
Toda máquina de refrigeração consome trabalho para comprimir um fluido que retira calor de uma fonte fria e rejeita calor para uma fonte quente.



$$Q_1 > Q_2 \quad T_1 > T_2$$

Isto é, a máquina de refrigeração só funciona à custa de energia fornecida ao Compressor, bombeando calor de uma fonte fria para uma fonte quente.

Outra visão do 2º Princípio:



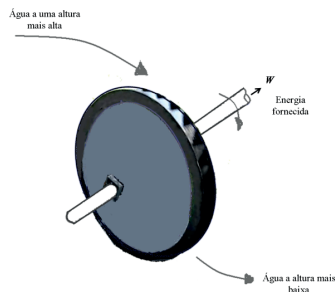
O que interessa à máquina térmica é obter trabalho útil, recebendo calor de uma fonte quente e rejeitando calor para uma fonte fria.

O que interessa à Máquina de refrigeração é retirar calor de uma fonte fria, bombeando o calor para uma fonte quente graças ao fornecimento de energia.

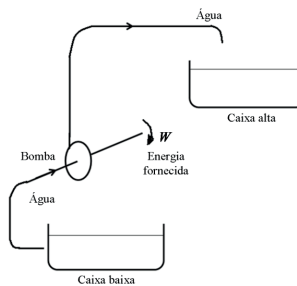
Referência: Haliday, Resnick, Walker. v. 2
Fundamentals of Physics

A5.1.2 Analogia hidráulica

A roda hidráulica recebe água de uma altura mais alta e rejeita água a uma altura mais baixa, fornecendo energia no eixo da roda.



Uma bomba eleva água de uma caixa mais baixa para uma caixa mais alta à custa de energia fornecida.

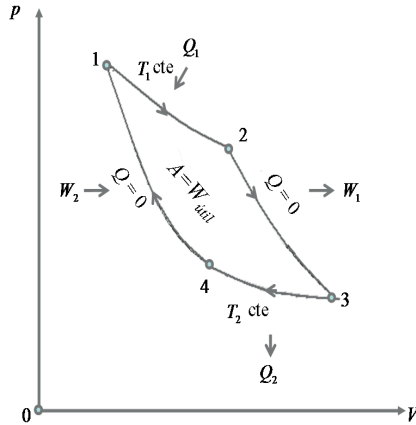


Referência: G. Gamow. Biography of Physics

A.5.1.3 Ciclo de Carnot

Nicolas Carnot (1796-1832) enunciou o 2º princípio da termodinâmica em 1824, assim, denominamos este ciclo em sua homenagem.

Carnot imaginou um ciclo formado por:



1. Um processo isotérmico de 1 a 2 em que o fluido (no caso, o gás perfeito) recebe calor Q_1 .
2. Um processo adiabático ($Q=0$) em que o fluido se expande fornecendo trabalho W_1 (processo 2 a 3).
3. Um processo isotérmico, 3 a 4, em que o fluido rejeita o calor Q_2 .
4. Outro processo adiabático, 4 a 1, em que o fluido é comprimido, consumindo o trabalho.

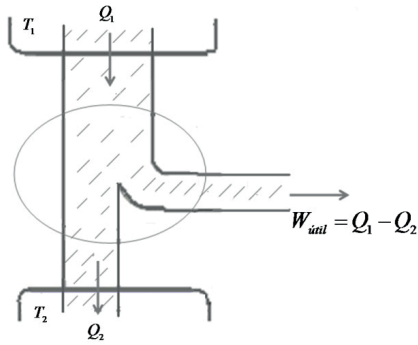
Trabalho útil: $W_{\text{útil}} = Q_1 - Q_2$, é fornecido pela área interna A da Figura “1234” do gráfico pV, ver o gráfico pV do Anexo 4, Secção A 4 .2.1, indicado por 0a, sob o título “Diagrama indicador”.

Trabalho útil: $W_{\text{útil}} = W_1 - W_2$

Rendimento:

$$\eta = \frac{W_{\text{útil}}}{\text{Calor fornecido}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

Diagrama de fluxo:



O trabalho executado na expansão isotérmica 1 a 2 é devido ao fornecimento de calor Q_1 .

$$W_{12} = \int_1^2 p dV, \text{ pela Lei dos Gases perfeitos: } pV = mRT \Rightarrow p = mRT/V$$

$$\therefore W_{12} = mRT \int_1^2 \frac{dV}{V} = mRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$W_{12} = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1 J$$

Na compressão isotérmica de 3 a 4, da mesma forma como em 1 a 2, obtemos:

$$W_{34} = mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = Q_2 J$$

Substituindo em 1, teremos:

$$\text{Rendimento: } \eta = \frac{mR \left(T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \right)}{mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (2)$$

Das Equações 0 e 3 do Anexo A4, podemos escrever o 1º princípio em equação diferencial como:

$$dQ = dU + p dV/J$$

Quando o processo for a volume constante $dQ = dU = mc_v \Delta T$, sendo c_v , calor específico em volume constante.¹

Se o processo for em pressão constante: $mc_p dT = mc_v dT + p dV/J$

Chamando c_p , calor específico em pressão constante.

Pela Lei dos gases perfeitos: $p dV = m R dT$, substituindo na equação anterior:

$$c_p dT = c_v dT + \frac{R dT}{J} \Rightarrow c_p - c_v = R/J$$

Pelo processo adiabático, $dQ = 0 \quad \therefore 0 = c_v dt + p dV/J$

Como $p = mRT/V \Rightarrow 0 = mc_v dt + m \frac{RT}{J} \frac{dV}{V} \Rightarrow 0 = c_v \frac{dt}{T} + (c_p - c_v) \frac{dV}{V}$

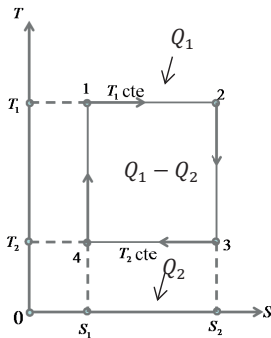
Chamando $k = C_p/C_v : 0 = \frac{dT}{T} + (k - 1) \frac{dV}{V}$ integrando:

$$\ell n T + (k - 1) \ell n V = cte_1 \Rightarrow \ell n(TV^{k-1}) = cte_1 \quad \text{ou} \quad TV^{k-1} = cte_2$$

$\therefore T_1 V_2^{k-1} = T_2 V_3^{k-1}$ na adiabática 2 a 3. Da mesma forma para a adiabática 4 a 1:

$$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_4^{k-1}, \text{ logo: } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{k-1}$$

$\therefore \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$, substituindo em 2:



$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \text{ comparando com}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ obtemos: } \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Pode-se provar que o ciclo de Carnot é o de maior rendimento possível nas mesmas temperaturas extremas T_1 e T_2 . Isto é: para qualquer máquina térmica: $\eta \leq \eta_{Carnot}$.

¹ Definição de calor específico: calor por unidade de massa e por unidade de temperatura, matematicamente: $c = Q/m\Delta T$.

² Pelo gráfico TS, podemos visualizar: $(Q_1 - Q_2)$; veremos adiante em Entropia, Equação 3, que a área “1234”: $Q_1 - Q_2 = \int_1^2 T dS - \int_4^3 T dS$, $Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$ e $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$.

A5.1.4 Temperatura absoluta

Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) deduziu uma escala energética de temperatura, independente da substância termodinâmica.

$$\text{Para qualquer ciclo: } \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Para um ciclo de Carnot (reversível):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

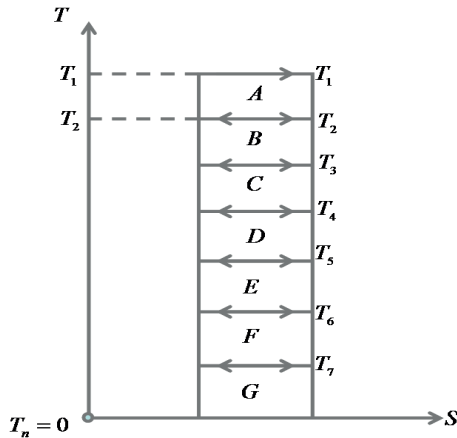
Trabalho de uma máquina de Carnot A:

$$W = \eta Q_1 = \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) Q_1 = \frac{Q_1}{T_1} (T_1 - T_2)$$

$$\text{Logo: } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (2a)$$

Se o calor for descarregado reversivelmente a uma segunda máquina de Carnot B, o trabalho será:

$$W = \eta Q_2 = \left(\frac{T_2 - T_3}{T_2} \right) Q_2 = \frac{Q_2}{T_2} (T_2 - T_3)$$



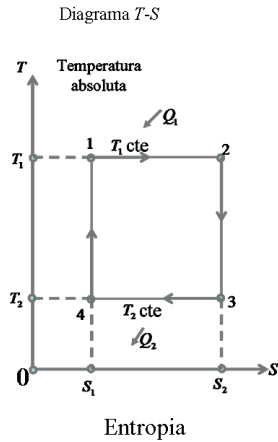
Se o trabalho realizado por cada máquina for o mesmo, podemos igualar W e concluir que:

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3$$

Pois $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$

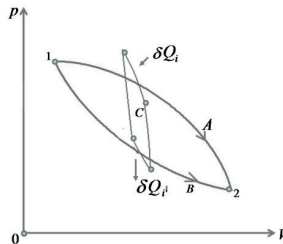
Concluimos que: $T_3 - T_4 = T_4 - T_5$.

A grandeza do intervalo é proporcional ao trabalho e, portanto podemos definir qualquer tamanho de intervalo, °F ou °C .



Entropia

Sejam dois processos A e B entre os estados 1 e 2. Entre cada duas adiabáticas e duas isotérmicas, temos um ciclo de Carnot:



$$\frac{\delta Q_i}{T_i} = \frac{\delta Q_f}{T_f} \quad 3$$

³ Pela demonstração anterior da Equação 2a.

genérico para

$$i=1 \quad \text{até } i=n \text{ e } i' \text{ idem.}$$

(Subdividindo o ciclo 1A 2B em ciclos de Carnot elementares C.)

$$\frac{\delta Q_b}{T_b} = \frac{\delta Q_{b'}}{T_{b'}} \quad i=b \text{ e } i'=b' \text{ etc. somando membro a membro teremos:}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta Q_i}{T_i} = \sum_{i'=1}^n \frac{\delta Q_{i'}}{T_{i'}}$$

Levando ao limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\delta Q_i}{T_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i'=1}^n \frac{\delta Q_{i'}}{T_{i'}}$$

Que nos fornece as integrais

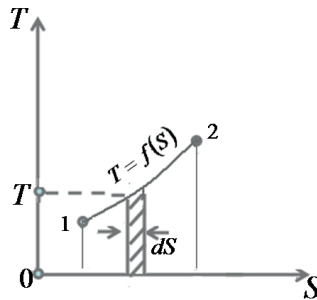
$$\int_A^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_B^1 \frac{\delta Q}{T} = \Delta S = S_2 - S_1$$

Chamamos: $dS = \frac{\delta Q}{T}$ de entropia elemental, e como a variação entre os pontos 1 e 2 é constante, temos que S é uma propriedade, portanto, uma função de ponto. dS é uma variável exata e T é um fator integrante que transforma a diferencial δQ não exata em uma variável exata dS .

Em consequência da definição de entropia, obtemos para um processo entre os estados 1 a 2:

$$\delta Q = TdS$$

Integrando: $\int_1^2 \delta Q_{12} = \int_1^2 TdS_{12} = Q_{12} \quad (3)$



Calor fornecido no processo 1 a 2.

Isso significa que o calor fornecido no processo 1 a 2 pode ser determinado pela área sob a curva $T = f(S)$ entre os pontos 1 e 2, cujas coordenadas são as funções de ponto, isto é, cada ponto tem um determinado valor das propriedades temperatura absoluta e entropia:

Ponto1: T_1, S_1

Ponto2: T_2, S_2 .

A5.1.5 Processo reversível

É aquele que, após realizado, possa por qualquer meio, restaurar o sistema e sua vizinhança exatamente nos mesmos estados antes do processo.

Essa definição é geral e não especifica condições físicas necessárias para a reversibilidade. A 2ª lei necessita, e a experiência confirma, que a presença de certas condições específicas durante um processo tornarão o mesmo irreversível. Entre essas condições estão:

- 1- Transferência de calor por uma diferença finita de temperatura.
- 2- Falta de equilíbrio de pressão entre o sistema e suas paredes confinantes.
- 3- Expansão livre. Expansão de um sistema para um volume maior na ausência de trabalho feito pelo sistema.
- 4- Atrito, sólido ou fluido (e resistência elétrica).
- 5- Transferência de trabalho de roda de pás para um sistema.

Processos reversíveis existem somente como casos-limite aos quais processos reais possam se aproximar em um maior ou menor grau.

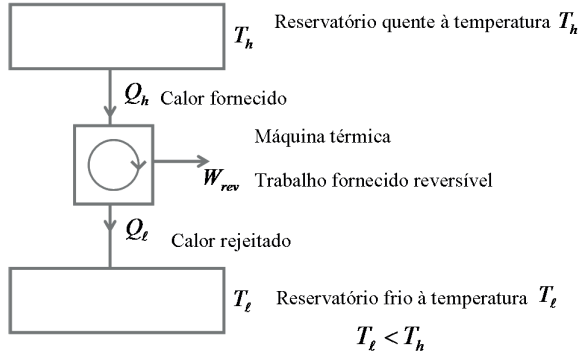
Um ciclo reversível é aquele composto de processos reversíveis.

O exemplo clássico é o ciclo de Carnot, que consiste de dois processos isotérmicos reversíveis e dois processos adiabáticos ($Q = 0$) reversíveis.

Referência: Mooney

A5.1.6 Desigualdade de Clausius

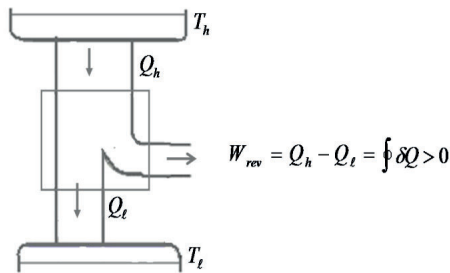
Seja um ciclo de Carnot:



Transferência de calor: $\oint \delta Q = Q_h - Q_l > 0$

T_h e T_l são constantes e como o ciclo é reversível:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_l}{T_l} = S_{inicial} - S_{final} = S_{ini} - S_{fin} = 0$$

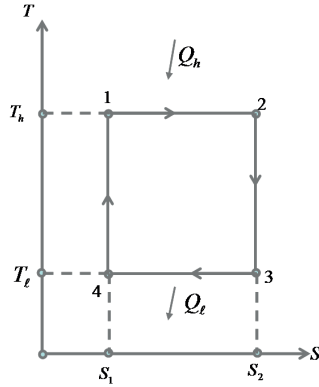


Como a entropia é uma propriedade, sua diferencial é exata: $dS = \frac{\delta Q}{T}$

Sendo propriedade, o processo “12341” que é um ciclo, o valor de $S_1 = S_4$ e, portanto

$$S_1 - S_4 = \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_l}{T_l} =$$

$$= S_{inicial} - S_{final} = S_{ini} - S_{fin} = 0$$



Seja uma máquina térmica cíclica irreversível, operando entre as mesmas temperaturas T_h e T_l e recebendo a mesma quantidade de calor Q_h .

O trabalho desse ciclo é $W_{ir} < W_{rev}$

Logo: $Q_h - Q_{l,ir} < Q_h - Q_{l,rev}$

Portanto: $\oint \delta Q = Q_h - Q_{l,ir} > 0$

E: $\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_{l,ir}}{T_l} < \frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_{l,rev}}{T_l} = 0$

Pois: $Q_{l,ir} > Q_{l,rev}$ já que: $W_{ir} < W_{rev}$

Então: $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ Desigualdade de Clausius

Será < 0 quando o ciclo for irreversível e $= 0$ quando for reversível.

Como, na realidade, os ciclos são irreversíveis: $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$

Referência: Van Wylen e Sonntag
Fundamentos da Termodinâmica Clássica, Blucher

No limite, quando o trabalho fornecido pelo ciclo irreversível tende a zero: $\oint \delta Q = 0$ e $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$

Assim, em geral temos: $\oint \delta Q \geq 0$ e $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$ (1)

Para ciclos irreversíveis.

Podemos, então, afirmar que para ciclos irreversíveis: $\oint \frac{\delta Q}{T} + \Delta S_p = 0$ sendo ΔS_p (2)

o acréscimo de entropia devido às perdas provocadas pelas irreversibilidades.

Referência: V. Faires

Resumindo: como δQ não é diferencial exata, há duas maneiras de se obter uma diferencial exata com δQ . Uma é subtrair de δQ a diferencial inexata δW . Essa diferença é a diferencial exata dU , da energia interna. Essa é a expressão matemática do 1º princípio: $\delta Q - \delta W = dU$.

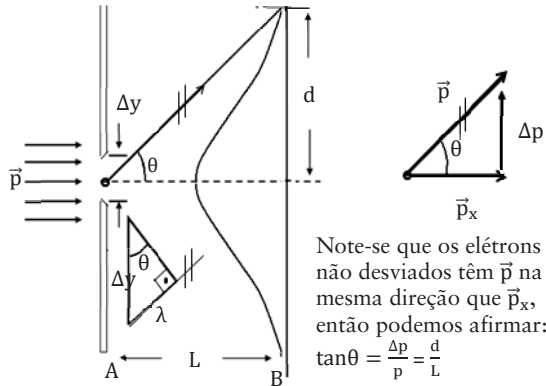
Outra consiste em dividir δQ_{rev} pela temperatura absoluta T , que é um fator integrante. O quociente é a diferencial exata dS , da entropia. Isso constitui a expressão matemática do 2º princípio: $\frac{\delta Q_{rev}}{T} = dS$.

Referência: Lee e Sears,
Termodinâmica, ao Livro Técnico.

Van Wylen Sonntag, já mencionado.

A6 PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG À LUZ DO PRINCÍPIO DA AÇÃO MÍNIMA

A6.1 Introdução



Seja um feixe incidente de luz que encontra um anteparo, A com fenda de comprimento: Δy .

A maior parte dos fótons incide no centro do anteparo B, conforme o gráfico de distribuição normal ou de Gauss, mas uma quantidade mínima incide no 1º mínimo, distante d do centro.

Observação: A distância L é muito maior que a fenda, portanto o ângulo θ é no máximo da ordem de 5° a 6° . Ver a seguir a ordem de grandeza das aproximações:

<i>graus</i>	<i>rad</i>	<i>senθ</i>	<i>erro %</i>	<i>tangθ</i>	<i>erro %</i>	<i>erro %</i>
5	0,0873	0,08716	0,16	0,08749	0,22	0,38
6	0,1038	0,10453	0,70	0,150510	1,25	0,55

$$\left. \begin{array}{l} 3,1416 \text{ rad} \longrightarrow 180^\circ \\ x \longleftarrow 5^\circ \\ y \longleftarrow 6^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{5 \cdot 3,1416}{6 \cdot 3,1416} = 0,0872 \text{ rad} \\ y = \frac{6 \cdot 3,1416}{180} = 0,1038 \text{ rad} \end{array}$$

Então teremos:

$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\Delta y}$ λ comprimento de onda \vec{p} quantidade de movimento, é conservada e desviada de um ângulo, θ .

Se θ for pequeno, podemos substituir $\text{sen}\theta$ por θ e escrever: $\theta \cong \frac{\lambda}{\Delta y}$.

E como $\tan \theta = \frac{\Delta p}{p} \cong \theta$, em rad, temos que θ cresce mais rápido que $\text{sen}\theta$, cujo max é **1**, enquanto θ cresce até $\pi/2$ quando $\text{sen} \theta = 1$, e também $\tan \theta$ cresce até ∞ quando $\theta = \pi/2$.¹ Sendo Δp componente da quantidade de movimento p na direção perpendicular ao feixe.

Recorde-se que além do 1º mínimo, temos outros, intervalados por feixes de luz.

$$\therefore \tan \theta = \frac{\Delta p}{p} \geq \text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\Delta y} \quad \text{quantidade de movimento } p = mv$$

Será igual quando for pequeno. Para valores maiores, a desigualdade torna-se válida. Quanto $> \theta$, mais mínimos teremos.

Dos exemplos ilustrativos das Equações 2a e 2b, Seção 7.9.1: $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $p = \frac{E v}{c^2}$.

Como $v = c$, no caso da luz: $p = \frac{E}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, (a) pois $c = \lambda \nu$ (observar Equação 3 Seção. 7.9.1, ao pé da pág.) $E = h \nu$ (0) hipótese de Planck, energia da radiação térmica, $h =$ constante de Planck, para explicar a energia média:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/kT-1}} \quad \text{onde} \quad \epsilon_0 = h \nu \quad \text{quantum de energia, isto é, a menor parcela de energia possível.}$$

¹ Isto é, $\Delta p/p = \dots = \tan \theta \geq \lambda/\Delta y = \text{sen}\theta$, estamos supondo \vec{p} na sua direção não desviada, isto é, na direção de \vec{p}_x . Portanto, quando Δy diminui, θ aumenta, intuindo a existência de um fator constante limitando como mínimo, que será visto a seguir.

Foi o início da Mecânica quântica. (0a)

Introduzindo na desigualdade:

$$\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{h}{p\Delta y} \Rightarrow \Delta y \cdot \Delta p \geq h, \text{ pois } \lambda = h/p, \text{ equação (a)} \quad h \text{ Constante de Planck} \quad (1)$$

Essa relação é qualitativa; mais adiante, será apresentada a relação quantitativa, isto é, rigorosa (ver Determinação do princípio da incerteza de Heisenberg, Secção A6. 6.1.1 Equação 3 e “Em outras palavras”, Equação 4 Secção A6.4.1 e Equação final (1) em Uma prova simples do princípio da incerteza de Heisenberg) Secção A6.9.

Trata-se do princípio da incerteza de Werner Heisenberg (1901-1976), enunciado em 1927.

Significado de h : se o produto $\Delta y \cdot \Delta p$ fosse zero, as noções clássicas sobre partículas e órbitas estariam corretas. Seria possível medir com precisão a posição e a quantidade de movimento. A constante h significa que as ideias clássicas não são totalmente corretas. O valor de h informa em que circunstâncias os conceitos clássicos devem ser substituídos pelos quânticos.

Exemplo: um elétron tem velocidade de 300 m/s medida com precisão de $0,01\%$. Qual é a precisão máxima para determinar sua posição?

$$p = mv = (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})(300 \text{ m/s}) = 2,7 \times 10^{-28} \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p = (0,0001)(2,7 \times 10^{-28} \text{ kgm/s}) = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kgm/s}$$

$$\text{Incerteza mínima na posição: } \Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{s}}{2,7 \times 10^{-32} \text{ kgm/s}} = 2,4 \text{ cm}$$

Não há a menor possibilidade de se conhecer a posição melhor com exatidão, ou seja, de cerca de 1 pol.

Exemplo: um projétil tem velocidade de 300 m/s com precisão de $0,01\%$. Qual é a precisão máxima para determinar sua posição se a massa da partícula é $50\text{ g} = 0,05\text{ kg}$?

$$p = mv = (0,05 \text{ kg})(300 \text{ m/s}) = 15 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p = (0,0001)(15 \text{ kgm/s}) = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kgm/s}$$

$$\Delta x = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{s}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ kgm/s}} = 4,4 \times 10^{-31} \text{ m}$$

Está longe de poder ser medido. Um núcleo tem diâmetro da ordem de 10^{-15} m . Pode-se afirmar que, para objetos pesados, como um projétil, o princípio da incerteza não impõe qualquer limitação no processo de medida. O princípio da correspondência indica como a Física quântica se reduz à Física clássica em circunstâncias adequadas.

A seguir, mais exemplos elucidativos da natureza dualística dos objetos da natureza e que a Mecânica quântica ajudou a esclarecer.

Conforme Louis de Broglie:

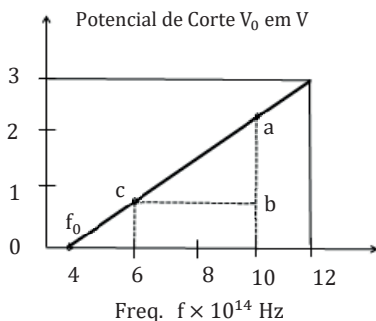
$$\lambda = h/p = h/mv \quad (1a)$$

Para se ter ideia das ordens de grandeza, consideremos, por exemplo, uma bola de tênis de 100g com velocidade de 50 km/h , a onda associada tem um comprimento $\lambda = 4,8 \times 10^{-24} \text{ A}$ em que 1 A é da ordem do raio de um átomo, sendo portanto desprezível para nossas percepções. Se tomarmos um elétron com a mesma velocidade, o comprimento de onda será $\lambda = 5,2 \times 10^5 \text{ A}$, muito maior que o da bola de tênis. Por esse motivo, nosso corpo não sofre difração ao atravessar uma porta, mas um elétron ou um fóton sofre difração se atravessar uma fenda ou uma estrutura cristalina, como verificado por Davisson e Germer, em 1927, e Thomson, um ano mais tarde (ver experiência de feixes de elétrons difratados sobre cristal de Ni ou feixe monoenergético de raios X, ou elétrons sobre película metálica de microcristais orientados ao acaso).

Referência: Ferreira, L.A. em Física

Quântica: o estranho comportamento do mundo microscópico, do Universo sem Mistério, e Halliday – Resnick – Walker em Ótica e Física Moderna.

Vimos que a natureza da luz é dualística, comportando-se sob certas circunstâncias como onda, e sob outras, como partícula ou fóton. Da equação do efeito fotoelétrico de Einstein, obtemos, após alguns ajustes: $V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{E_0}{e}$, uma relação linear entre V_0 e f . A inclinação da reta h/e é obtida experimentalmente. Sendo f a frequência.



$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{(2,2-0,65)V}{(10-6)10^{14}\text{Hz}} = 3,9 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

Multiplicando pela carga do elétron: $h = (3,9 \times 10^{-15}\text{V})(1,6 \times 10^{-19}\text{C}) = 6,2 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$

Com análise mais cuidadosa e uso de superfícies de Li, Millikan chegou a:

$$h = 6,57 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} \text{ com precisão de } 0,5\%.$$

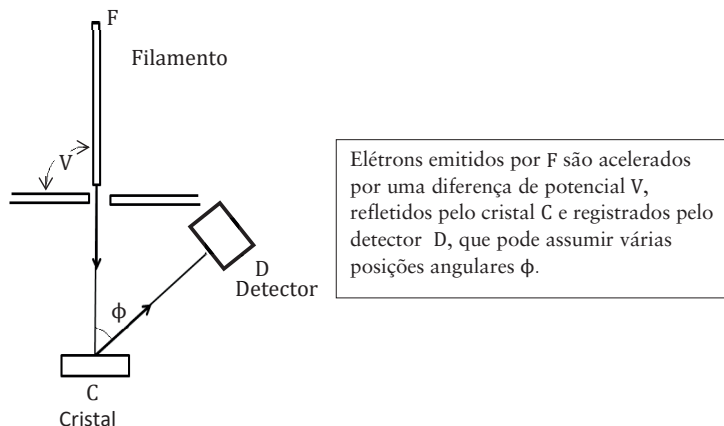
Em 1905, Einstein introduziu o conceito de fóton e realizou uma explicação quantitativa do efeito fotoelétrico.

Em 1924, Louis de Broglie, na França, raciocinou da seguinte forma: como a luz tem uma natureza dualística de onda e corpúsculo, talvez a matéria também a tenha. Como a matéria fora considerada composta de partículas, de Broglie sugeria que se procurasse um comportamento ondulatório para a matéria.²

De Broglie prognosticou que o comprimento de onda das ondas da matéria seria a mesma válida para a luz: $\lambda = h/p$ (1b). A natureza dualística da luz está clara nessa equação e também na equação: $E = hf$. Cada expressão contém um conceito ondulatório (f e λ) e um conceito de partícula (E e p), em que p seria a quantidade de movimento da partícula da matéria, e f a frequência.

Davisson e Germer, em 1927, demonstraram experimentalmente, por meio da medição dos comprimentos de onda de elétrons lentos, nos Estados Unidos.

Observação importante: A matéria, como a luz também tem comportamento dual, isto é, como uma moeda, tem duas faces. Sempre mostra uma única face e nunca as duas, ao mesmo tempo. Convém ressaltar ainda que se usássemos na experiência da página inicial, feixe de elétrons em vez de luz, ao deduzirmos a fórmula: $\Delta y \cdot \Delta p \geq h$, devemos empregar: $p = h/\lambda$, pois o feixe de elétrons está se comportando como onda e não materialmente como vemos pela experiência a seguir:



Para elétrons lentos, podemos desprezar correções relativísticas $\lambda = h/mv$. A velocidade dos elétrons é determinada pelo potencial V aplicado ao tubo de raios catódicos: $\frac{1}{2}mv^2 = eV$.

² Se a luz tem um caráter duplo, enquanto a matéria parecia ser exclusivamente corpuscular, essa diferença não combinava ao fato da luz e a matéria serem formas de uma entidade que se transformam entre si, De Broglie pensou que a matéria, como por exemplo os elétrons, poderiam ter propriedade ondulatórias.

Portanto, $\lambda = h / \sqrt{2 m e V}$. Substituindo por:

$e = 4,8 \times 10^{-10}$ u e s, unidade eletrostática statcoulomb (Ferenca e Lemon, Kaplan)

$m = 9,1 \times 10^{-28}$ g, $h = 6,62 \times 10^{-27}$ erg.s, obtemos

$$\lambda = \left(\sqrt{\frac{150}{V}} \right) \text{ \AA}$$

Para V em volt. A um potencial acelerador de 10.000V, temos $\lambda = 0,122 \text{ \AA}$ aproximadamente na região de raios X penetrantes.

Referência: Ferenca Jr, Halliday-Resnick, Max Born

A6.2 COMPORTAMENTO ESTRANHO DO MUNDO MICROSCÓPIO

Expressando o Princípio de Heisenberg: $\Delta x \Delta v \geq h/m$, onde Δx , posição, Δv , incertezas na velocidade e m , massa do corpo, h cte de Planck.

Observe que o produto das incertezas é inversamente proporcional à massa. Como h é muito pequeno, as incertezas são relevantes para corpos microscópios, como átomos ou moléculas e respectivas partículas. Assim, para uma caneta de 10g, a precisão chega a $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$, cerca do tamanho do átomo. Mas a incerteza na velocidade será $\approx 10^{-22} \text{ m/s}$, o que significa a caneta demorar 100.000 anos para percorrer a distância de um átomo.

Mas no caso do elétron, cuja massa é $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, se medirmos com boa precisão sua posição com $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, teremos uma incerteza de velocidade de 10^7 m/s , velocidade suficiente para o mesmo ir da Terra à Lua em alguns segundos.

Conclui-se então que a massa do corpo é o divisor entre fenômenos descritos pela Física clássica e os descritos pela Física quântica. O que determina o que é grande e o que é pequeno é, como vimos, a constante de Planck.

Relações relativísticas úteis:

Quantidade de movimento: $p = \varphi m_0 v$, onde $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\beta = \frac{v}{c}$ m_0 = massa de repouso, massa relativística: $m = \varphi m_0$

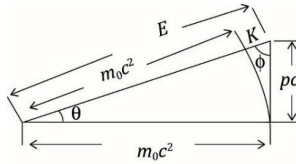
Energia cinética: $K = m_0 c^2 (\varphi - 1)$

Energia total: $E = \varphi m_0 c^2 = m_0 c^2 + K$

Na Mecânica clássica, temos: $p^2 = 2Km \diamond K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$

Relativisticamente: $(pc)^2 = K^2 + 2Km_0 c^2 \diamond$ resulta: $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$

Mnemonicamente temos a fórmula Pitagórica: onde $\text{sen} \theta = \frac{pc}{E}$ e $\text{coss} \theta = \frac{m_0 c^2}{E}$



Daqui obtemos para um fóton: $E = hf$, f = frequência e $m_0 = 0$, o fóton propagando com velocidade da luz, tem massa nula.

Logo: $hf = pc$ como $c = \omega \lambda$ resulta $p = \frac{h}{\lambda}$ λ = comprimento de onda

É um comportamento ondulatório.

A6.3 TEORIA ATÔMICA DE BOHR

Publicada em 1913, baseada na descoberta de Rutherford de que os átomos têm núcleos maciços, positivamente carregados, com enxames de elétrons girando ao redor como um diminuto sistema planetário.

Estudando o átomo de hidrogênio, o mais simples que existe, tendo somente um elétron ao redor do núcleo, propôs o seu modelo atômico.

A primeira dificuldade encontrada é de os átomos não poderem existir, pela Física clássica, mais de uma fração desprezível de segundo. O elétron deslocando-se em sua órbita é equivalente a uma oscilação elétrica, tendendo a emitir oscilações eletromagnéticas, perdendo rapidamente energia. Mover-se-iam em trajetórias espiraladas e cairiam no núcleo em centésimos de milésimos de segundo. Mas, com certeza, isso não ocorre, pois os átomos são configurações muito estáveis. A situação era paradoxal.

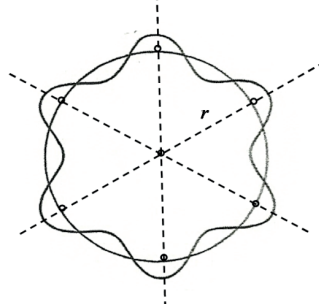
Racionou, se a energia radiante só pode existir em certas quantidades mínimas ou seus múltiplos, conforme Planck descobriu em 1900, porque não fazer a mesma suposição com energia dos elétrons girando em torno do núcleo?

Então, o movimento dos elétrons no estado normal do átomo, corresponderia a quantidades mínimas de energia, enquanto os estados excitados corresponderiam a variações desses “quanta” de energia.

Sob certos aspectos, se comportaria como uma caixa de mudanças de um carro. Engrenamos primeira, segunda e terceira, mas nunca velocidades intermediárias. Estando o movimento de elétrons e a luz emitida, quantificados, a transição do elétron de um nível superior para outro inferior resultaria na emissão de “quantum” de luz com hf igual à diferença de energia entre os dois níveis.

Inversamente, se a luz incidente com um “quantum” hf for igual à diferença de energia entre os estados estáveis e excitado do átomo, o “quantum” de luz será absorvido e o elétron se moverá do nível mais baixo para o mais alto. Expressamos isso como: $hf = E_k - E_j$ (1a).

Onde hf é o “quantum” de energia do fóton durante a transição e E_j e E_k , os níveis de energia do átomo nos seus estados estacionários antes e depois da transição.



As condições quânticas de Bohr³ também resultam da natureza ondulatória da matéria. Como exemplo simples, consideremos um elétron no átomo de H como uma onda permanente (estável) estendendo-se em um círculo em torno do núcleo. Para que a onda do elétron possa preencher a circunferência do círculo, ela deve conter um número inteiro de comprimentos de onda: $2\pi r = n\lambda^4$, em que r é o raio do círculo e n é um número inteiro.

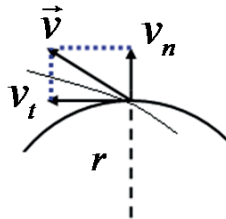
Considerando a velocidade \vec{v} do elétron, temos dois componentes: a tangencial v_t e a normal v_n .

A quantidade de movimento: mv_t será a efetiva.

A quantidade de movimento angular $mv_t r$, que chamaremos de L . A velocidade angular será ω .

A velocidade angular

$$\omega = 2\pi \nu \quad \text{em que } \nu \text{ é a frequência.}$$



³ Niels Bohr (1885-1962), físico dinamarquês.

⁴ De fato, tomando-se a equação $E = nh\nu = L\omega$, em que L é quantidade de movimento angular $L = pr$ e

$p = \frac{h}{\lambda}$ (ver Equação a em Introdução) $\therefore nh\nu = \frac{h}{\lambda} r\omega$ e $E = nh\nu = \frac{h}{\lambda} \omega r = \frac{h}{\lambda} 2\pi \nu r$ $\lambda = \text{comprimento de onda}$
 $\omega = 2\pi\nu$, logo $2\pi r = n\lambda$, isto é, uma volta compreende n ondas.

Então, temos: $L\omega$ Energia. Se igualarmos essa energia no postulado de Planck⁵ sobre a quantização da energia:

$$E = nh\nu$$

$$L\omega = nh\nu \Rightarrow L(2\pi\nu) = nh\nu \quad \therefore L = n \frac{h}{2\pi}$$

Essa é a quantização da quantidade de movimento angular, estabelecida por Bohr em 1913.

Outra forma é chamar: $\hbar = h/2\pi$ (0a)⁶

Teremos $L = n \hbar$ (0b) encontrada em muitos autores (por exemplo, LANDAU, em *Mécanique Quantique*).

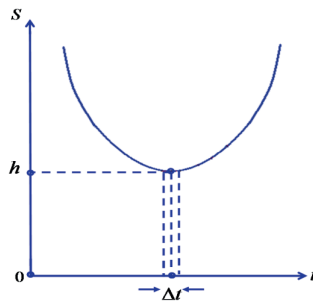
Recordemos o postulado de Bohr: para haver emissão ou absorção de energia pelo átomo, é necessária uma transição entre dois estados estacionários:

$$h\nu = E_1 - E_2 \quad (1)$$

Temos então que a ação: $S = \Delta y \times \Delta p \geq h$ (ver Anexo 3), pois como vimos: $dS = p dx$. Ver Anexo 3, Equação 2b Secção A3.1.1 (1)

Recordemos o princípio da ação mínima ou de Hamilton: em todo sistema mecânico existe uma função ação S com um mínimo para o movimento efetivo, cuja variação δS é consequentemente nula.

$$\delta S = \delta \int_{x_1}^{x_2} p dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta p dx = 0$$



⁵ Max Planck (1858-1947), físico alemão, estabeleceu o postulado em 1900.

⁶ Vamos verificar na Equação 2 do momento angular (Anexo secção A9.6), que \hbar é justamente o momento angular do elétron no átomo de hidrogênio, em que $n = 1$, pois é o menor valor possível de energia, chamado de "estado fundamental".

Da Seção 7.4, Equação 1a, e Seção 7.9.1, Equação 2b, temos: $p = \frac{E}{c}$ e $ct = y$

$$\therefore \Delta p = \frac{\Delta E}{c} \quad \text{e} \quad \Delta y = c\Delta t$$

$$\therefore S = c\Delta t \cdot \frac{\Delta E}{c} = \Delta t \cdot \Delta E \geq h$$

Já vimos, no Anexo 3, Equação 2b, que:

$dS = Ldt$, em que L é energia.

$$\therefore \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} \delta Ldt = 0, \text{ ver fig.}$$

h é o mínimo da função $S = \Delta E \cdot \Delta t = \Delta p \cdot \Delta x$ (2), satisfazendo a condição do princípio da ação mínima. Logo, o princípio da incerteza satisfaz o princípio da ação mínima, em que $\delta S = 0$ (ver Anexo 3, Equação 3).

De fato, $h = S_{\min} = 6,55 \times 10^{-27}$ erg. seg, valor em que $\delta S \rightarrow 0$.

Observemos que h tem um valor extremamente pequeno, por isso permaneceu desconhecido, até que Planck o tivesse descoberto e Heisenberg o tivesse utilizado.

Ref.: Landau em Teoria do Campo, Yavorski.

A6.4 EQUAÇÃO DA ONDA DE SCHRÖDINGER⁷

Conforme Alonso e Finn (1972), a descrição matemática da propagação $\xi(x, t)$ é uma função senoidal ou harmônica: $\xi(x, t) = \xi_0 \text{ sen } k(x - vt)$, ver Seção 5.23, Equação a e a Figura correspondente.

Significado de k : substituindo x por $x + \frac{2\pi}{k}$, obtemos o mesmo valor para $\xi(x, t)$.

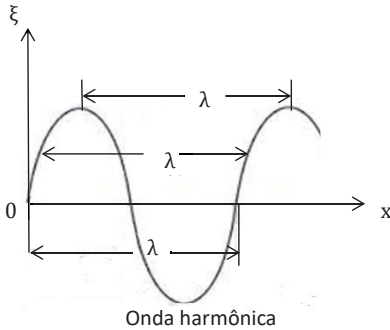
$$\begin{aligned} \xi\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) &= \xi_0 \text{ sen } k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = \xi_0 \text{ sen } [k(x - vt) + 2\pi] = \\ &= \xi(x - vt) \end{aligned}$$

$\therefore \lambda = \frac{2\pi}{k}$, (λ) comprimento de onda, período espacial.

A curva se repete a cada comprimento de onda λ .

$\therefore k = \frac{2\pi}{\lambda}$ representa o número de comprimentos de onda na distância angular 2π .

⁷ Erwin Schrödinger (1887-1961), físico austríaco, estabeleceu a equação em 1926, e recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1933.



Também pode ser escrita:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$ (a1), número de ciclos ou frequência angular da onda, velocidade angular, secção 2.1.3

$$\omega = 2\pi \nu \Rightarrow \nu = \omega/2\pi \quad (b)$$

$$\nu \text{ frequência, pois } \lambda \nu = v$$

Análise de Fourier do movimento ondulatório:

$$\begin{aligned} \xi &= f(x - vt) = a_0 + a_1 \text{cos}k(x - vt) + a_2 \text{cos}2k(x - vt) + \dots + \\ &+ b_1 \text{sen}k(x - vt) + b_2 \text{sen}2k(x - vt) + \dots \quad c \end{aligned}$$

Isto é, qualquer movimento periódico pode ser expresso como superposição de movimentos harmônicos simples de frequências angulares $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$ ou períodos $P, P/2, \dots, P/n$.

ξ se repete em tempos $P, 2P, \dots, nP$, sendo

$$P = 2\pi/\omega = 1/\nu$$

Ou seja: $\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \mp vP)$

Equação diferencial do Movimento Ondulatório:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \text{ Solução geral: } \xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Para onda senoidal: $\xi = \xi_0 \text{sen}k(x - vt)$

Derivadas parciais: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = k\xi_0 \text{cos}k(x - vt)$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi_0 \text{sen}k(x - vt)$

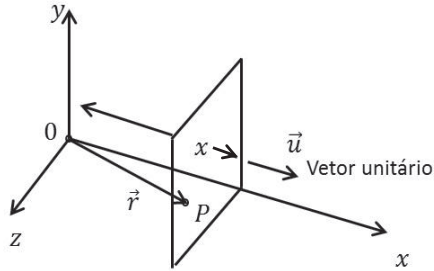
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -k\xi_0 v \text{cos}k(x - vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k^2 v^2 \xi_0 \text{sen}k(x - vt)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (0), \text{ comparando as duas equações.}$$

Frente de onda: $\xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$

$$\xi = \xi_0 \text{sen}k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Para onda harmônica ou senoidal.



Definindo o vetor-propagação.

$\vec{k} = k\vec{u}$, comprimento (módulo):

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/v \quad (1)$$

$$\therefore \omega = kv$$

$$\xi = \xi_0 \text{ sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi = \xi_0 \text{ sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

$$k_x, k_y, k_z \text{ componentes de } \vec{k}: \vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Satisfazendo: $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2$ (Teorema de Pitágoras)

Propagação no espaço tridimensional, equação do feixe de partículas derivada por Schrödinger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1a) \quad \psi(x, y, z, t)$$

Referência: Max Born: Movimento de uma partícula livre

$$\psi = e^{i(kx - \omega t)} = e^{(2\pi i/h)(px - Et)} \quad (2) \text{ Ver resolução da equação da onda Secção A6.8 equação 11}$$

Onde: $\lambda = \frac{h}{p}$ (ver Equação a na Introdução seção A6.1) $h = \text{constante}$ $E = h \nu$ de Planck

Referência: Piskounov: $z = r(\cos \varphi + i \text{ sen} \varphi)$ Equação de Euler

$$\cos \varphi + i \text{ sen} \varphi = e^{i\varphi} \therefore z = r e^{i\varphi}$$

Deduzindo por Mecânica quântica: $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ (Lei da comutação de Born-Jordan)

$\left(-\frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = 0$ ⁸ Equação da onda de Schrödinger, ver Equação 3, “Em outras palavras”, Secção A6.4.1

Exemplo: equações da onda eletromagnética, Secção 5.2.3, Equações 7 e 8.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}$$

Campo elétrico: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x - ct)$

Campo magnético: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x - ct)$

$E = E_0 \text{sen}k(x - ct) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t)$

$B = B_0 \text{sen}k(x - ct) = B_0 \text{sen}(kx - \omega t)$

Recordemos: $\frac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \cos k(x - ct)$ e $\frac{\partial B}{\partial t} = -kB_0 \cos k(x - ct)$

Pela lei de Faraday-Henry temos: $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$, logo: $E_0 = cB_0$

$\therefore E = cB$ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ velocidade da luz

A6.4.1 Em outras palavras

Sendo \vec{k} o vetor propagação da luz, que fornece a direção de propagação da onda $\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$

O módulo de \vec{k} é $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, λ comprimento de onda

Velocidade da luz c

Velocidade angular ou frequência angular: $\omega = 2\pi \nu$ ν = frequência $\therefore \omega = 2\pi/T$, pois

$T = 1/\nu$ Sendo T o período.

Na propagação da luz temos: $c^2 k^2 = \omega^2 \Rightarrow k \cdot c = \omega$. Ver equação a1 na Secção A6.4 equação Schrödinger (0), $k = 2\pi/\lambda$

$\therefore \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi \nu$ $\therefore c = \lambda \nu$

análise dimensional: $[L/T] = [L]/[T]$

⁸ E, energia; V, energia potencial e q coordenada generalizada.

Substituindo k por $\frac{1}{i}\nabla$ e ω por $i\frac{\partial}{\partial t}$ (1), e operando sobre a função de onda ψ , obtemos:⁹

$$c^2\left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2\psi = \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi, \text{ ver equação 1a na Secção A6.4.}$$

Recordemos: ∇ é o operador gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$, ou seja:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0 \quad \text{Explicitamente: } \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2)$$

∇^2 é chamado Laplaciano.

A equação das ondas pode ser expressa com o operador:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ em que } \Delta = \nabla^2 \text{ Laplaciano} \quad (2a)$$

\square é chamado operador de d'Alembert, em que $icdt = d\tau$ é a 4ª variável. Podemos escrever, abreviadamente: $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

A equação das ondas se torna: $\square\Psi = 0$

Tomando-se a equação da conservação de energia relacionada com a quantidade de movimento:

$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ em que $\frac{p^2}{2m}$ é energia cinética, e V é energia potencial.

$$\text{Como } E = h\nu \Rightarrow E = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu \quad \therefore E = \frac{h}{2\pi}, \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

⁹ Nota-se que k é desenvolvimento angular na unidade de comprimento λ , e ω é desenvolvimento angular na unidade de tempo

T. Temos: $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T$, pois $\nu = 1/T$. Por outro lado, temos uma variação espacial: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ e uma

variação temporal: $\partial/\partial t$, que estão correlacionados com k e ω . T é período em seg. Observe que o fóton liberado pelo elétron em sua suposta órbita circular visto anteriormente terá a mesma frequência e comprimento de onda do elétron. Por isso, n deve ser inteiro. Ou seja, assim como $k\lambda$ e ωT têm 2 π como constante de proporcionalidade, d/dx e d/dt também terão. Pois:

$$\omega^2/k^2 = c^2, \quad \frac{(2\pi/T)^2}{(2\pi/\lambda)^2} = c^2 \text{ Logo: } \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(1/i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = c^2$$

Tome-se: $y = y_0 \text{ sen } k(x - ct) \Rightarrow \left(d^2y/dt^2/d^2y/dx^2\right) = c^2$, confirmando, derivando y em x e em t e relacionando, ver equação 0 na Sec. A6.4. Aliás é óbvio que acontecesse, pois: $dx = cdt$.

pois $\omega = 2\pi\nu$ e $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi\nu}{c}$

$\therefore p = \hbar k$ desde pois que $k = \omega/c$

Substituindo como fizemos em (2), obteremos:

$$E = i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad p = \frac{\hbar}{2\pi i} \nabla$$

Substituindo na equação da conservação de energia:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(r)$$

e fazendo a substituição como em (2): $i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$

Daqui, obtemos a equação de Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = 0, \quad (3)$$

(Não deve ser tomada como uma multiplicação simples, na verdade é um operador.)

Equação diferencial de 2ª ordem cuja solução é: $\psi = e^{(2\pi i/\hbar)(px - Et)}$ no caso unidimensional.

No caso tridimensional, em vez de px , teremos: $p_x x + p_y y + p_z z = p_i x_i$, levando em conta a convenção de Einstein. Logo, ψ se torna: $\psi = e^{(2\pi i/\hbar)(p_i x_i - Et)}$ (3a)

Derivando em relação a x , no caso unidimensional, temos: $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi$ e, no caso tridimensional: $p = \frac{\hbar}{2\pi i} \nabla$.

Derivando em relação a t , obtemos: $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$, como obtido anteriormente.

Calculando $p^2\psi$, temos: $p^2\psi = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \nabla^2 \psi$ e dividindo por $2m$, obtemos o 1º termo da equação de Schrödinger, o 3º termo: $-E\psi$ também se obtém.

Assim verificamos que a expressão de ψ apresentada anteriormente satisfaz essa equação.

Podemos também expressar a equação de Schrödinger como faz Landau em *Mécanique Quantique*, lembrando que: $\psi = e^{(i/\hbar)(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \hbar = h/2\pi \quad e$$

Recordemos o comprimento de onda de Broglie: $\lambda = h/p$, ligando λ , comprimento de onda e h , constante de Planck e p quantidade de movimento, ambos ligados à noção de partícula, pois de Broglie, em 1924, levantou a hipótese de a matéria também ser ondulatória. (Hipótese comprovada experimentalmente por Davisson e Germer, em 1927, com a difração dos elétrons pelos cristais.)

Calculemos: $px - xp$, em mecânica clássica seria comutativo: $px - xp = 0$, porém, em mecânica quântica não. Verifiquemos:

Então temos: $px - xp = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, e aplicando à função de onda ψ :

$$\frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial(x\psi)}{\partial x} - x \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] = \frac{h}{2\pi i} \psi^{10} \quad \text{Torna } \Psi, \text{ uma função periódica dependente de "h" (4)}$$

A6.4.1.1 Comutação no produto matricial

Seja o arranjo de elementos escalares a_{ij}

$$\left[\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \quad \text{Simbolicamente: } A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$$

Podemos atribuir a operação de produto de matrizes a:

$$\{a_{ij}\}_{m \times n} \{b_{ij}\}_{n \times p} = \{c_{ij}\}_{m \times p} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha} b_{\alpha j}$$

Em geral, o produto matricial não é comutativo, isto é: $AB \neq BA$

O espaço pode ser definido pela matriz: $\{x_i\}_{1 \times 3}$, e a quantidade de movimento, por: $\{p_i\}_{3 \times 1}$.¹¹

Então o produto matricial xp não é comutativo, isto é, $xp \neq px$.

¹⁰ Explicitando: $\frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) - (x) \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi = \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$, e: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

¹¹ Resulta em: $\{x_i\}_{1 \times 3} \cdot \{p_i\}_{3 \times 1} = \{x_i p_i\}_{1 \times 1}$, como um produto interno ou contraído e, nesse caso em particular, um produto escalar.

Recordemos, como exemplo, o cálculo do produto externo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \{A_1 A_2 A_3\} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1 B_1) & (A_1 B_2) & (A_1 B_3) \\ (A_2 B_1) & (A_2 B_2) & (A_2 B_3) \\ (A_3 B_1) & (A_3 B_2) & (A_3 B_3) \end{pmatrix}$$

O produto interno seria:

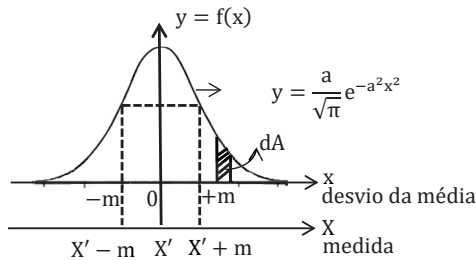
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \{A_1 A_2 A_3\} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3\} = A_i B_i \quad (1)$$

Isto é, corresponde ao traço da matriz acima de nove elementos, ou seja, soma dos elementos da diagonal principal, se obtém do produto externo, igualando os dois índices $i = j$: $A_i B_j \Rightarrow A_i B_i$, chamado de contração.

Ref.: Sielawa, Putnoki

Então, $px - xp$ age como um operador que se pode aplicar a uma função. É a chamada Lei da Comutação de Born e Jordan de 1925.¹²

Para avaliar o grau de desvio das grandezas medidas x e p com relação a seus valores médios, valemos dos “desvios quadráticos médios” da teoria das medições, denominadas $\overline{\Delta x^2}$ e $\overline{\Delta p^2}$. Os traços sobre os elementos significam valores médios, e Δ , os desvios. Recordemos, chamando: $x_i = X' - X_i$ desvio entre valor mais provável e medição X_i , sendo o valor mais provável: $X' = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$, também chamado de valor médio.



Definindo o “desvio quadrático médio” como a média da soma dos quadrados dos desvios: $m^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}$, (1b) considerando uma frequência de n_i desvios quadráticos x_i^2 , temos: $m^2 = \frac{n_1}{n} x_1^2 + \frac{n_2}{n} x_2^2 + \dots + \left(\frac{n_i}{n}\right) x_i^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}$, em que $n = \sum n_i$ (1c)

¹² Podemos expressar matricialmente a Lei da Comutação: $px - xp = i\hbar/2\pi i$, onde I é a matriz unitária: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ou seja:

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = p_i x_i, \text{ ver eq 1, isto é: } p_i x_i \neq x_i p_i \Rightarrow p_i x_i - x_i p_i = -i\hbar \Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2, \text{ ver eqs. 3 e 4.}$$

Na Figura anterior, temos a curva de Gauss com equação:

$$y = f(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}$$

Integrando entre $-\infty$ e $+\infty$, teremos a área A sob a curva que, segundo Gauss, representa 100% de probabilidade de cometer um erro (desvio), ou seja, $A = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2} dx = 1$, mas sabemos que $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$. Ver dedução da Equação 1, em Teoria dos erros de Gauss.

Como a integral é o limite da somatória \sum quando o número de termos n for muito grande, $\frac{dA}{A} = \frac{m}{n}$, pois $A = \sum dA$, $A = 1$, logo:

$$m^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} = \int_0^{\infty} \frac{2a}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-a^2 x^2} dx, \text{ pois } dA = y dx \quad 13$$

E obtemos: $m^2 = \frac{1}{2a^2}$ ou $m = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$, em que m é inversamente proporcional ao “índice de precisão” a (ou achatamento).

Derivando $y = f(x)$, duas vezes, teremos: $y' = -\frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-a^2 x^2}$ e

$$y'' = \frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} (2a^2 x^2 - 1) e^{-a^2 x^2}, \text{ quando } x^2 = m^2 = \frac{1}{2a^2},$$

$y'' = \frac{2a^3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2a^2}{2a^2} - 1 \right) e^{-1/2} = 0$, logo, para $x = \pm m$, teremos dois pontos de inflexão afastados m da origem O no eixo das abscissas x . Daí se conclui que quanto maior m , menor o índice de precisão a , isto é, mais achatada é a curva de Gauss, e menor a precisão.

Para levar em conta a simetria da curva de Gauss, usamos o produto do complexo $A + iB\lambda$ por seu conjugado $A - iB\lambda$, fazendo $A = X'$ e $m = iB\lambda$. B é a outra variável independente que, multiplicada por $i\lambda$, se transforma em m . Assim, uma equação leva em conta as duas variáveis independentes A e B , pois a curva de Gauss é válida qualquer que seja a variável independente.

Além do mencionado, a expressão é apropriada pelos seguintes motivos:

- 1- O produto $A \times B$, que será px , visto na Introdução, Equação 1 e Anexo 3, Equação 2, tem a dimensão da “Ação” S .
- 2- Como vimos, tem um mínimo, que é justamente h , ver Equação 2 da secção A6.3.
- 3- Por ter um mínimo, sua concavidade será voltada para cima.
- 4- A função mais simples possível deve ser uma parábola par de 2º grau.

¹³ Da tabela de integrais definidas, por Halliday, Resnick e Walker (1996):

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} a^{n+1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \text{ com } n = 1: \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} = \frac{1}{2a^2}$$

Ver tabelas matemáticas em Spiegel (1969): $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(m+1/2)}{2a^{(m+1/2)}}$, onde $\Gamma(m+1/2) = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}$, função Gama $\Gamma(m+1/2)$.

5- O mínimo é h .¹⁴ Os outros valores da função $\Delta p \cdot \Delta x$ devem ser positivos, como visto na Introdução e no Anexo 3, e maiores do que h .

Então, temos: $x_i = X' + m$ e $-x_i = X' - m$.

Portanto: $(x_i)(-x_i) = (X' + m)(X' - m) = (X')^2 - (X'm - mX') - m^2$

Como: $X'm - mX' = \frac{h}{2\pi i}$, por não ser comutativo, não se anula (ver anterior).

Substituindo, obtemos:

$$(A + iB\lambda)(A - iB\lambda) = A^2 - i(AB - BA)\lambda + B^2\lambda^2 = \\ = A^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)\lambda + B^2\lambda^2 \geq 0 \quad ^{15}$$

Referência: Sears, v.4; Laboratório de Física do ITA; Yavorski.

Verificação da homogeneidade do binômio complexo: $(A + iB\lambda)$ Se A for L.

$iB\lambda \Rightarrow i = \sqrt{-1}$ cte B será p quantidade de movimento $p = mv = MLT^{-1}$

$$\lambda = i \frac{AB - BA}{2B^2} = i \left(\frac{AB}{2B^2} - \frac{BA^*}{2B^{2*}} \right) = \left(\frac{A}{2B} - \frac{A^*}{2B^*} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{A^*}{B^*} \right)$$

$$iB\lambda = iB \left[\frac{i}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{A^*}{B^*} \right) \right] = -\frac{1}{2}(A - A^*) \quad \therefore \text{também } A$$

Denotamos com asterisco para levar em conta o Princípio da não comutação. A expressão de λ será deduzida a seguir.

Dado o trinômio: $y = ax^2 + bx + c$, o mínimo do trinômio será quando: $x = -\frac{b}{2a}$ para $a > 0$, isto é, concavidade para cima. O mínimo deve estar na parte mais baixa da curva, a parábola par mais simples possível, simétrica com relação ao eixo vertical, passando por $x = -\frac{b}{2a}$, além disso, a inequação apresentada é de 2º grau em λ .

Derivando y e igualando a zero:

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Quando $a > 0$, temos um mínimo, a concavidade é para cima (ver Figura).

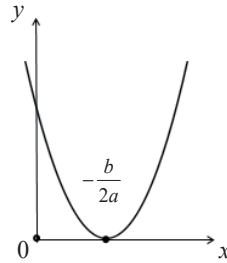
Quando $a < 0$, temos um máximo, a concavidade é para baixo.

Para ser mínimo, a derivada 1ª é crescente (ver Figura) se $a > 0$ e a , positiva.

Referência: Bezerra, Putnoki

¹⁴ É a constante de Planck, que a descobriu enquanto investigava o fenômeno da “Radiação térmica”, que a energia é constituída de quantidades elementares, denominadas *quanta*, plural de *quantum*. Por isso, se diz “quantização” da energia. Cada *quantum* é: $E = h \nu$ sendo ν a frequência da radiação.

¹⁵ Como veremos posteriormente, $\lambda > 0$.



Resolvendo a equação, pela expressão do seu mínimo anteriormente exposto:

$$\lambda = i \frac{AB - BA}{2B^2} > 0, \text{ fazendo } A = p \text{ e } B = x, \text{ teremos } AB - BA = \hbar/2\pi i: \quad (3)$$

Note que AB é diferente de BA , e não são comutativos nesse caso (ver anterior).

Substituindo na desigualdade anterior:

$$A^2 + B^2 \frac{i^2 (AB-BA)^2}{4B^4} - i(AB-BA) \frac{i(AB-BA)}{2B^2} \geq 0$$

$$A^2 - \frac{(AB-BA)^2}{4B^2} + \frac{(AB-BA)^2}{2B^2} = A^2 + \frac{(AB-BA)^2}{4B^2} \geq 0$$

$\therefore A^2 B^2 \geq -\frac{1}{4}(AB-BA)^2$ Fazendo $A = \Delta p$ e $B = \Delta x$, aplicando (3) anteriormente, obtemos:

$$(\Delta p)^2 (\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{4\pi^2} = \frac{1}{16} \frac{\hbar^2}{\pi^2} \quad \therefore \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{4\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (4)$$

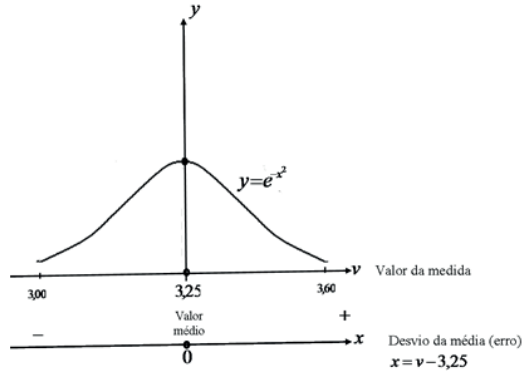
Lembrando que $\hbar = \hbar/2\pi$

É a lei da incerteza de Heisenberg na forma matemática.

Essa relação não é qualitativa como a da Equação 1 da Introdução, mas sim quantitativa, isto é, rigorosa.

A6.5 TEORIA DOS ERROS DE GAUSS

A6.5.1 Distribuição gaussiana



y é a frequência de medidas (n° de medidas iguais).

(Pode-se fazer um histograma com medidas semelhantes às frequências iguais ou separar em faixas de medidas.) Ver "Estatística", em Alonso e Finn (1972).

A frequência y decresce exponencialmente com o quadrado do desvio x . A integração fornece a área sob a curva $y = e^{-x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Referência: Alonso-Finn vol. 1

Como exemplo, a medida do período de um pêndulo.

Tomando como referência Courant: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

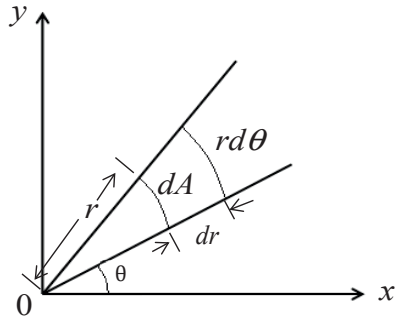
Seja I_a a integral de $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2}$

No círculo de raio ρ , temos: $0 \leq \rho \leq a$

$$\text{Então: } I_a = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} \right) d\phi$$

Pois:

Em coordenadas polares:



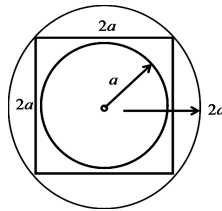
$dA = r d\theta dr$ fazendo:

$$u = \rho^2 \Rightarrow du = 2\rho d\rho$$

$$\therefore d\left(\frac{u}{2}\right) = \rho d\rho$$

$$e: \int e^{-u} du = e^{-u}$$

$$\therefore I_a = \pi(1 - e^{-a^2})$$



O quadrado formado por: $-a \leq \rho \leq a$, $-a \leq y \leq a$ contém o círculo: $0 \leq \rho \leq a$, sendo contido no círculo $0 \leq \rho \leq 2a$. O integrando $e^{-(x^2+y^2)}$ é sempre positivo.

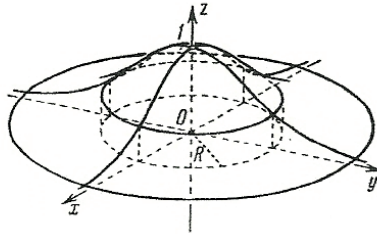
Logo:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) = I_a \leq \int_{-a}^a (e^{-x^2-y^2} dy) dx \leq I_{2a} = \pi(1 - e^{-4a^2})$$

$$\int_{-a}^a (\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dy) dx = \int_{-a}^a e^{-x^2} (\int_{-a}^a e^{-y^2} dy) dx = (\int_{-a}^a e^{-x^2} dx)^2$$

$$\therefore \pi(1 - e^{-a^2}) \leq (\int e^{-x^2} dx)^2 \leq \pi(1 - e^{-4a^2})$$

$$\text{Quando } a \rightarrow \infty, \text{ temos: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Repetimos a operação para: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

Logo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = \pi$$

Por outro lado, se tivermos: $x^2 = at^2$, obteremos como

for fácil de ver: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. (1) ver tabela matemática Spiegel e Born Física atômica

Logo: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-by^2} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}$

Ver interpretação espacial da integral Figura anterior.

Referência Piskounov

Tomando-se as ações espacial: $S_e = px$ e temporal: $S_t = -Et$ $S = S_e + S_t$ (2) ver Equação 2 da “Equação da onda de Schrödinger”, Seccção A6.5.

A equação de onda se torna: $\Psi = e^{(2\pi i/h)(S_e+S_t)}$, uma forma semelhante à adotada por Landau em Mecânica Quântica:

$$\psi = ae^{(i/\hbar)S}$$

A6.6 DETERMINAÇÃO DO PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

A6.6.1 Integral e transformadas de Fourier

Pela identidade de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Desenvolvendo em série: e^x , $\sin x$ e $\cos x$, obtemos:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

A série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Ver Equação c da “Equação da Onda de Schrödinger”, isto é, qualquer movimento harmônico pode ser expresso como superposição de movimentos harmônicos de simples frequência $\omega, 2\omega, 3\omega \dots n\omega$, entregando a série original de Fourier

A expressão pode ser escrita: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x$

Em que: $a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt$ e $b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt$

Introduzindo: $\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{\ell} \dots \alpha_k = \frac{k\pi}{\ell}$ e $\Delta\alpha_k = \frac{\pi}{\ell}$

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \alpha_k (t-x) dt \right] \Delta\alpha_k$$

levando $\ell \rightarrow \infty$ e observando que:

$$\left| \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \right| \leq \int_{-\ell}^{\ell} |f(t)| dt < \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = Q \rightarrow 0$$

Obtemos: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$, denominado “Integral de Fourier”.

Como: $\cos \alpha (t-x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x$, teremos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right] \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right] \sin \alpha x d\alpha$$

Forma complexa: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$, da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t-x) + i \sin \alpha (t-x) dt \right] d\alpha$$

Em que: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha$ (0)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Portanto: $F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$, Transformada de Fourier

e: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$, Transformada inversa de Fourier

A6.6.1.1 Determinação

Tomando-se a função de erro de Gauss: $f(x) = Ae^{-x^2/a^2}$ (1)

Utilizando a média quadrática, obtemos a semi-largura do feixe de ondas:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx}} = \frac{1}{2}a \quad (2) \text{ ver equação 1a e 1b da secção A.6.4.1.1,}$$

equação 1 da secção A6.5 e Born

Usando a integral de Fourier, na forma:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{2\pi i k x} dk, \text{ onde: } \varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

Introduzindo: $\rho = k/2\pi$, temos:

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{2\pi i k x} dk, \text{ em que:}$$

$$\varphi(k) = \sqrt{\pi} g(2\pi k) \quad ^{16}$$

Ref.: Courant, v. 2.

$\varphi(k)$ é a amplitude de uma onda harmônica parcial com o número de ondas k .

Substituindo $f(x)$ de 1 em $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2/a^2 + 2\pi i k x)} dx = A e^{-(\pi k a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/a + \pi i k a)^2} dx$$

Fazendo: $x/a + \pi i k a = y$, $dx = a dy$ transformamos em uma integral de Gauss:

$$a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = a\sqrt{\pi}, \text{ portanto: } \varphi(k) = Aa\sqrt{\pi} e^{-(\pi k a)^2} = Aa\sqrt{\pi} e^{-k^2/b^2}$$

Em que: $b = 1/\pi a$, distribuição que constitui feixe de ondas $f(x)$ é ainda função de Gauss com semilargura $\Delta k = \frac{1}{2}b$

$$\text{Portanto: } \Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4\pi}$$

$$E = h \nu$$

Sabemos que sob o ponto de vista da relatividade, a energia e quantidade de movimento são entidades da mesma espécie. A quantidade de movimento é a parte espacial de um quadrivetor cuja componente temporal é a energia, e é óbvia a sugestão de expressar por coerência: $p = hk$. Se ν representa o número de vibrações por unidade de tempo, k será o número de ondas por unidade de comprimento, portanto, $p = hk$.

¹⁶ Lembrar que: $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ e $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dx$ transformadas de Fourier: substitui-se α por $2\pi\alpha$ e leva-se em conta que: $d(2\pi\alpha) = 2\pi d\alpha$, na Equação 0.

Havíamos deduzido que $p = \hbar k$, mas como $\hbar = h/2\pi$, após 2π rad, como o movimento é periódico, as oscilações retornam à mesma posição, portanto, espacialmente idêntico. Multiplicando então por h , obtemos:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi} = \hbar/2 \quad (3)$$

Que é o princípio de Heisenberg, já obtido, desta vez como igualdade, sendo a desigualdade já comprovada como o mínimo da função S .

Ver Equação 4, no final de “Em outras palavras”, Secção A6.4.1.

Essa relação é quantitativa, isto é, rigorosa.¹⁷

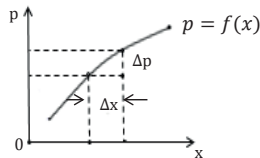
Ref.: Max Born

Em termos da teoria dos erros de Gauss, confirmamos o apresentado anteriormente: a curva obtida na difração é de probabilidade, distribuição gaussiana, em que o máximo ocorre no centro e, nas extremidades, tende assintoticamente a zero.

A condição de mínimo, como visto no Anexo 3, Equação 3, é que $dS = 0$ ou seja: $dS = dS_e + dS_i = 0$

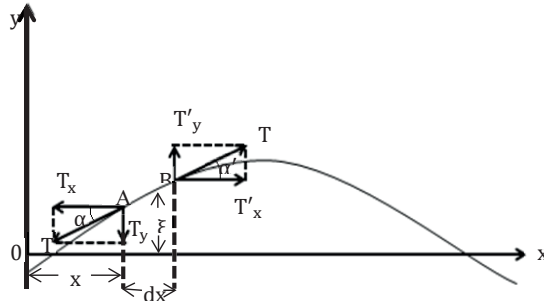
$\therefore d(px) = d(Et)$ e como: $\frac{E}{p} = c$ e $\frac{x}{t} = c$, obtemos uma identidade: $c = c$. Isso significa que a energia E que se desloca com a velocidade da luz, se transmite e se comunica com a velocidade da luz (isto é, se transfere).

¹⁷ Observação importante: $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2 = h/4\pi$.



Ver Equação 2 da Teoria Atômica de Bohr, Secção A6.3.

A6.7 ONDAS TRANSVERSAIS EM UM FIO



$$T'_y = T \operatorname{sen} \alpha'$$

$$T_y = -T \operatorname{sen} \alpha$$

ξ é o deslocamento do fio da posição de equilíbrio

Força vertical sobre secção AB do fio:

$$F_y = T'_y - T_y = T (\operatorname{sen} \alpha' - \operatorname{sen} \alpha)$$

Se a curvatura não for muito grande, os ângulos α e α' serão pequenos e podem ser substituídos por sua tangente:

$$F_y = T (\tan \alpha' - \tan \alpha) = T d(\tan \alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\tan \alpha) dx$$

Estamos considerando, por exemplo, uma corda vibrante.

Porém, $\tan \alpha$ depende tanto da posição x quanto do tempo t . Contudo, $\tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$\therefore F_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Força igual à massa da secção AB vezes aceleração para cima $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

Sendo m a densidade linear do fio expressa em kg/m

$$\text{Massa da secção AB: } m dx: (m dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\text{Análise dimensional: } T = [F], m = \left[\frac{M}{L} \right] \therefore F = [M] \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

$$\therefore \frac{T}{m} = \frac{[M][L/T^2]}{[M/L]} = [L^2/T^2] = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{T/m}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Assim, chegamos à equação da onda típica¹⁸, diferencial de 2ª ordem já obtida na Seção 5.23, como preâmbulo das equações dos campos \vec{E} e \vec{B} que definem a onda eletromagnética.¹⁹

A questão é como resolvê-la partindo da equação diferencial. Então, veremos a seguir que ao utilizar o método da separação de variáveis, chegamos à solução das expressões na forma trigonométrica ou exponencial, evidenciando que a recíproca é verdadeira, no caso em questão, ao partir da equação diferencial para se chegar às amplitudes.

Quando a amplitude for grande, em relação ao tamanho da onda, a equação para ondas transversais se torna: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$, equação que não é linear e se reduz à equação anterior quando $(\partial \xi / \partial x)^2$ for desprezível. Note-se que: $\text{sen } \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \tan \alpha - \frac{1}{2} \tan^2 \alpha + \dots$, desenvolvendo em série. Essa é a ressalva.

A6.8 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda unidimensional: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ (1), equação diferencial parcial de 2ª ordem, pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis ou de Fourier.

Temos: $\xi = \xi(x, t)$, fazemos: $\xi = X(x) \cdot T(t)$

$$\therefore \frac{\partial \xi}{\partial t} = X(x) \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = T(t) \frac{\partial X}{\partial x} \implies \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \text{substituímos em (1):}$$

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Separando as variáveis: $\frac{\partial^2 T / \partial t^2}{v^2 T} = \frac{\partial^2 X / \partial x^2}{X} = -k^2$, número de comprimentos de onda que é uma constante de separação. (2)

Tomando: $\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$, onde: $\omega = vk$ (3), ver equação de Schrödinger, equação 1, Secção A6.4, “Equação da onda de Schrödinger”.

Seja a equação diferencial de 2ª ordem: $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$, p e q constantes

Tomando uma solução particular: $y = e^{rx}$, derivando:

$$\frac{dy}{dx} = r e^{rx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}, \quad \text{substituindo e dividindo por } e^{rx}: \quad e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

$r^2 + pr + q = 0$, chamada equação auxiliar da equação diferencial.

A equação auxiliar tem duas raízes distintas r_1 e r_2 , então: $y = e^{r_1 x}$ e $y = e^{r_2 x}$, logo, a solução geral será: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

¹⁸ Utilizada em diversos fenômenos físicos como: ondas elásticas em bastão sólido, ondas de pressão em coluna de gás, ondas superficiais em um líquido etc.

¹⁹ Partindo das amplitudes de \vec{E} e \vec{B} para chegar à equação diferencial.

Tem duas constantes arbitrárias e a equação diferencial é satisfeita pela solução geral.

Portanto, $\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$, a equação auxiliar é: $r^2 + \omega^2 = 0 \therefore r = \pm \omega\sqrt{-1} = \pm \omega i$

Logo, as raízes são imaginárias: $r_1 = +\omega i$ e $r_2 = -\omega i$

$$e^{r_1 t} = e^{+\omega i t} \quad e \quad e^{r_2 t} = e^{-i\omega t} \quad \therefore y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (5)$$

Usando a fórmula de Euler: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$ e $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t$ (5a)

Fazendo $A = C_1 + C_2$ e $B = (C_1 - C_2)i$ obtemos:

$$y = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \quad (6)$$

Retomando as equações (2) e (3):

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -v^2 k^2 = -\omega^2, \quad \text{pois} \quad \omega = vk \therefore \xi_t = e^{-i\omega t} \text{ uma solução particular}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad \therefore \xi_e = e^{+ikx} \text{ uma solução particular}$$

$$\text{Logo: } \xi = \xi_e \cdot \xi_t = e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} = e^{i(kx - \omega t)} \quad (4)$$

$$2\pi/\lambda = k \quad e \quad h/p = \lambda$$

$$\therefore 2\pi p/h = k, \text{ ver equação a da Seção Introdução, A6.1, "Equação da onda de Schrödinger"} \quad (7)$$

Se a onda for tridimensional:

$$\text{A equação } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \xi - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2} = 0 \quad (7a), \text{ em que:}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8) \quad \text{Aqui, } v = c$$

$$\text{Usando a notação de D'Alembert: } \square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$$

$\square \xi = \nabla^2 \xi - \frac{\partial^2 \xi}{c^2 \partial t^2}$, na verdade, é uma equação quadridimensional, $\xi = \xi(x, y, z, ct)$, em que a 4ª dimensão é ct , c = velocidade da luz e t , tempo.

Então, a solução se torna: $\xi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, Equação (4), equação 3a da Seção A6.4.1, "Em outras palavras".

Para exemplificar, citamos:

$$\text{Equação do pêndulo simples: } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \text{ ver MHS, (9) Seção 2.1.4, Equação 6.}$$

$$\text{Fazendo } \omega^2 = g/L \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0, \omega \text{ é constante} \quad g = \text{aceleração da gravidade,}$$

L = comprimento do pêndulo $\omega = d\theta/dt$ arco $s = L\theta$ θ = ângulo descrito pelo pêndulo.

Façamos $\theta = e^{rt}$, derivando duas vezes: $\frac{d\theta}{dt} = re^{rt}$ e $\frac{d^2\theta}{dt^2} = r^2e^{rt}$

Teremos, substituindo na equação: $r^2e^{rt} + \omega^2e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0$

Equação auxiliar: $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \omega i$, em que $i = \sqrt{-1}$

Raízes da equação: $r_1 = \omega i$ e $r_2 = -\omega i$ $p = 0$ e $q = \omega^2$

Equação auxiliar: $r^2 + pr + q = 0$

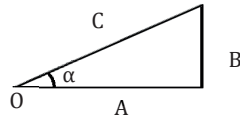
Solução geral: $\theta = C_1e^{\omega it} + C_2e^{-\omega it}$ ver Equação (5)

Em forma trigonométrica: $\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (ver equação 5a, aplicando a fórmula de Euler: $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$

$$e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt$$

Ver Equação (6)

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$



$$\cos \alpha = \frac{A}{C} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{B}{C}$$

$$\therefore \theta = C \left(\frac{A}{C} \cos \omega t + \frac{B}{C} \sin \omega t \right)$$

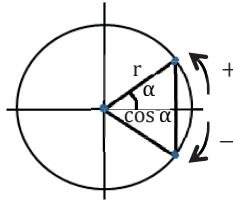
$$\theta = C(\cos \alpha \cos kt + \sin \alpha \sin kt)$$

$$\theta = C \cos(kt - \alpha) = C \cos(\alpha - kt), (10)^{20}$$

$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, pois:

$\cos(\omega t - kx) = \cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t$, e assim retomamos a equação do MHS, vista na Seção 2.1.3, pela recíproca, isto é, partindo da equação diferencial conseguimos a amplitude. Verifica-se também que ao tomar a equação diferencial parcial, resolvendo por separação de variáveis, cada uma das equações separadas é semelhante à equação do MHS.

²⁰ Veja-se MHS, Seção 2.1.3, Equação 4b2.



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = C_1 e^{\omega it} + C_2 e^{-\omega it}$$

ver Equação (5)

Referência Maurer

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad e \quad 2\pi/\lambda = k \quad \therefore 2\pi p/h = k, \quad 2\pi \nu = \omega \quad h \nu = E \quad 2\pi E/h = \omega$$

Ver Equação a na Introdução, Equação 1 em Equação da Onda de Schrödinger, e Equação 0 a, “Em outras palavras”.

$\psi = e^{(2\pi i/h)(px - Et)} = e^{(2\pi i/h)px} \cdot e^{-(2\pi i/h)Et} = \psi_e \psi_t$ (11), como vimos na Equação 2, é a solução da equação da onda de Schrödinger, na secção de mesmo nome.

$$\psi_e = e^{(2\pi i/h)px}$$

$$(2\pi ix) / (h/p) = (2\pi/\lambda)ix, \text{ como } 2\pi/\lambda = k \quad e \quad h/p = \lambda \Rightarrow \psi_e = e^{ikx}$$

$$\psi_t = e^{-(2\pi i/h)Et}, \text{ como } E = h\nu \quad e \quad (2\pi \nu h/h)it = 2\pi i \nu t$$

$$\omega = 2\pi \nu \Rightarrow \psi_t = t^{-i\omega t}$$

Referência: Sielawa

Se o espaço for tridimensional:

$$\text{Onda plana: } \xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) \Rightarrow \xi = \xi_0 \text{sen } k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) \quad (8a) \quad \vec{u} = \text{vetor unitário}$$

Vetor propagação $\vec{k} = k\vec{u} \Rightarrow$ comprimento $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ na direção da propagação.

$\xi = \xi_0 \text{sen } (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \xi_0 \text{sen } (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$, como visto na equação da onda de Schrödinger.

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x \vec{e}_1 + k_y \vec{e}_2 + k_z \vec{e}_3) \cdot (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \quad (4)$$

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2$, módulo do vetor \vec{k} (por Pitágoras).

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \xi$ ver equação 7a (equação da onda em coordenadas cartesianas)

Fazendo: $\xi = X(\vec{r}) \cdot T(t)$ por separação de variáveis (método de Fourier)

Como visto no início da Resolução da equação da onda.

$$\text{Substituindo } T \cdot \nabla^2 X = \frac{1}{v^2} X \frac{d^2 T}{dt^2} \Rightarrow \frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

$$\text{Em que: } \omega = vk \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

Referência: Alonso- Finn e Sielawa

Outra resolução interessante é a devida a Landau- Lifchitz.

Para ondas denominadas planas (ver Equação 0 em “Equação da onda de Schrödinger”), as equações do campo têm a forma: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, em que f é qualquer componente dos vetores \vec{E} ou \vec{H} .

$$\text{Para resolver, colocamos na forma: } \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

Introduzindo as novas variáveis²¹,

$$\text{Isto é, variáveis independentes: } \xi = t - \frac{x}{c} \quad \text{e} \quad \eta = t + \frac{x}{c} \quad \begin{cases} 2t = \xi + \eta \\ 2\frac{x}{c} = \eta - \xi \end{cases}$$

Ou seja, $\xi \rightarrow$ avança no tempo e η recua.

$$\text{De maneira que: } t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad \text{e} \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

De fato, retomando a Seção 5.23, Equação a: $f = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, chamando $\xi = x - ct$ ²², teremos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \quad \text{etc. obtemos: } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{c^2 \partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{Logo: } \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\text{E a equação assume a forma: } \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando em relação a ξ : $\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta)$, função arbitrária.

Integrando outra vez: $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, f_1 e f_2 , funções arbitrárias.

Portanto: $f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, solução geral, e os termos contendo f_1 e f_2 , soluções particulares.

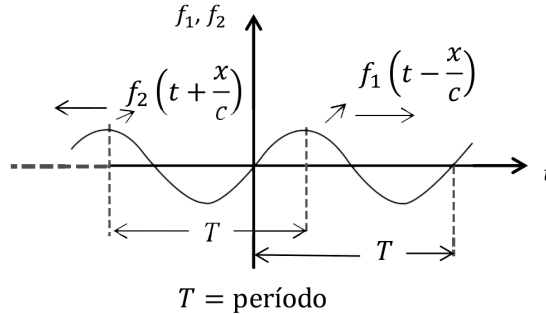
Do Alonso-Finn.

²¹ Isto é, a função f que era: $f = f(x, t)$, se torna $f = f(\xi, \eta)$, portanto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) f(\xi, \eta) = 0, \text{ ver Observação indicada em 5, mais adiante.}$$

²² Da mesma forma, com $\eta = x + ct$, teremos $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial \eta}{\partial t} = +c$, etc. Obtemos também $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Nesse caso, ξ seria avanço espacial e η , recuo.



Assim $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ (12), representa uma onda plana propagando-se no sentido positivo do eixo t e $f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, onda plana se propagando no sentido negativo.

Essa resolução é muito satisfatória, simples e compacta.

Como se depreende, f é uma função periódica. Se for harmônica, será do tipo MHS, como visto nas páginas anteriores, e será expressa:

$f = f_0 \text{sen } k(x - vt)$ (8b), função senoidal, podendo também ser expressa, como já visto, por uma função exponencial: $f = e^{i(kx - \omega t)}$ por intermédio da fórmula de Euler: $e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i \text{sen } kt$

Observação: (5)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x/c} \right) = \left(\frac{\partial(\partial x/c - \partial t)}{\partial t \partial x/c} \right) = - \left(\frac{\partial[\partial(t - x/c)]}{\partial t \partial x/c} \right) = - \left(\frac{\partial(\partial \xi)}{\partial t \partial x/c} \right) \text{ invertendo}$$

$$- \frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \xi)} \quad 23$$

$$\partial t = 1/2 (\partial \eta + \partial \xi) \text{ e } \partial x/c = 1/2 (\partial \eta - \partial \xi) \quad \therefore \partial t \partial x/c = 1/4 (\partial^2 \eta - \partial^2 \xi) =$$

$$= f(\eta, \xi)$$

Idem para: $\frac{\partial t \partial(x/c)}{\partial(\partial \eta)} \quad \therefore \left(\frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \xi)} \right) \left(\frac{\partial t \partial x/c}{\partial(\partial \eta)} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial(\partial \xi)} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial(\partial \eta)} \right) f(\eta, \xi)$

Integrando em η e depois em ξ obtemos $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ e, como já vimos anteriormente, integrando novamente em ξ e η , se obtém: $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, f_1 e f_2 , funções arbitrárias.

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) f, \text{ justificando } \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right), \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \text{ e } \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

Da relação de de Broglie: $E = \hbar \omega \quad \text{e} \quad p = \hbar k \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$

Substituindo por: $k \Rightarrow \frac{1}{i} \nabla \quad \text{e} \quad \omega \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{ver equação 1 da seccção A6.4.1}$

²³ Pois: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

$$\therefore E = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow p_i = \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$dS_t = -Edt = -\frac{\hbar}{i} \quad dS_e = p_i dx_i \quad (\text{ver equação 2, Teoria dos erros de Gauss, Secção A6.5})$$

Integrando: $\therefore S_t = -Et \quad \therefore S_e = p_i x_i$

$$e^x = y \quad \ln y = x \quad \text{Ex: } 10^2 = 100 \quad \log_{10} 100 = 2$$

$e^{(i/\hbar)S_e} = \Psi_e \Rightarrow \ln \Psi_e = (i/\hbar) S_e \quad \ln \Psi_t = (i/\hbar) S_t$ (ver equação 2, Equação da Onda de Schrödinger, Secção A6.4)

$\ln \Psi_e = (i/\hbar) p_i x_i \quad \ln \Psi_t = -(i/\hbar) Et^{24}$ (ver equação 11, Resolução da equação da onda, Secção A6.8)

Somando: $\ln \Psi_e + \ln \Psi_t = \ln(\Psi_e \cdot \Psi_t) = (i/\hbar) (p_i x_i - Et)$

$$\therefore \Psi = \Psi_e \cdot \Psi_t = e^{(i/\hbar)(p_i x_i - Et)}$$

Ou melhor: $E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -Et = \frac{\hbar}{i} S_t = -Et$

$\Psi = e^{(i/\hbar)(p_i x_i - Et)}$ derivando em t: $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -(i/\hbar) E \Psi$

Ou $E \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \ln \Psi_t = -Et \quad (i/\hbar)$

$\therefore \Psi_t = e^{-Et(i/\hbar)}$ q.e.d.

A6.9 UMA PROVA SIMPLES DO PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

Seja um oscilador harmônico linear, por exemplo, o do Capítulo 2, sobre o MHS.

Partindo da expressão clássica da energia: $E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2$, k Constante elástica, ver equação 3c da Secção 2.1.3, $k = m\omega_0^2$

Introduzindo a condição quântica da lei da comutação:

$$p_x - x p = \frac{\hbar}{2\pi i} = \frac{\hbar}{i}$$

$$E = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega_0^2 x^2)$$

Conforme a mecânica ondulatória:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right) \right] \Psi = 0, \text{ ver equação 3 da Secção A.6.4.1.}$$

²⁴ Justificando o sinal negativo em Et. Além do mais, pode-se verificar na equação 12 que:

$f = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)$, a onda se propaga no sentido positivo de t e para $f = f_1 \left(t + \frac{x}{c} \right)$, a onda se propaga no sentido negativo de t, isto é, a onda retrocede.

$$\lambda = \frac{8\pi^2 m E}{h^2} \quad \alpha = \frac{2\pi m \omega_0}{h} = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} \quad (1) \quad \omega_0 = 2\pi \lambda_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\therefore \left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda - \alpha^2 x^2 \right] \psi = 0 \quad \alpha = \frac{\lambda}{2} \quad \frac{1}{2} \alpha x^2 = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} x^2 = 2\pi^2 m \lambda_0 \frac{x^2}{h}$$

$$\text{Recordemos: } \psi_e = e^{(2\pi i/h)px}, \frac{1}{2} \alpha x^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} x^2 = 2\pi^2 m \lambda_0 \frac{x^2}{h}$$

$$\psi = a_0 e^{-1/2 \alpha x^2} = a_0 e^{-2\pi^2 m \lambda_0 x^2/h}$$

$$\omega_0 = 2\pi \lambda_0$$

$$E_0 = \frac{h^2 \alpha}{8\pi^2 m} = \frac{1}{2} h \lambda_0$$

Em mecânica clássica o estado mínimo de energia de um oscilador é zero na posição de repouso ou equilíbrio. Porém, em mecânica ondulatória, o estado fundamental tem energia finita $E_0 = \frac{1}{2} h \lambda_0$ e a função própria é a função de erro de Gauss

$$\psi_0 = a e^{-1/2 \alpha x^2} \text{ em que: } \alpha = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h} \text{ e } \lambda_0 \text{ frequência própria do oscilador.}$$

Pelo desvio quadrático médio da coordenada (visto $\bar{x} = 0$):

$$\overline{\delta x^2} = \overline{x^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi_0 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 dx} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{h}{8\pi^2 m \lambda_0} \quad (25), \text{ de 1: } \alpha = \frac{4\pi^2 m \lambda_0}{h}$$

$$\text{Recorde-se: } \frac{d}{dx} \ell n u = \frac{du/dx}{u}$$

$$\text{Equação da energia } \therefore E = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m (2\pi \lambda_0)^2 x^2$$

Desvio quadrático médio da quantidade de movimento:

$$\overline{\delta p^2} = m^2 (2\pi \lambda_0)^2 \overline{\delta x^2} = \frac{1}{2} h \lambda_0 m \quad m \omega_0 x = m (2\pi \lambda_0) x = mv \Rightarrow dp = mdv$$

$$dv_0 = \omega_0 dx, \omega_0 = cte.^{26}$$

$$\therefore \overline{\delta x^2} \overline{\delta p^2} = \frac{h^2}{16\pi^2} = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad \text{com: } (\Delta x)^2 = \overline{\delta x^2} \quad (\Delta p)^2 = \overline{\delta p^2}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (1) \quad \text{forma exata do princípio da incerteza de Heisenberg}$$

²⁵ $\lambda = 2\alpha, I_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, I_2 = \frac{dI_0}{d\lambda} = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} (1/2) \quad \overline{x^2} = \frac{2I_2}{2I_0} = \frac{1/4 \sqrt{\pi/\lambda^3} (1/2)}{1/2 \sqrt{\pi/\lambda}} = \frac{1}{2\alpha}, \text{ Ref.: Max}$

Born, Anais ESA Luiz de Queiroz.

²⁶ Recorde-se que $v = R\omega$, ver Equação 3b do MHS no Capítulo 2.

Agora, se torna óbvio o motivo de $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, isto é, no mínimo a metade de \hbar , pois como visto na primeira demonstração, deveria ser menor que \hbar , pois \hbar está relacionado com a menor porção de energia possível: $\varepsilon_0 = \hbar \cdot \nu$

Em seguida, demonstramos quantitativamente que deveria ser no mínimo $\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$, porque \hbar se refere à onda elementar de energia. Se tomarmos um eixo de coordenadas como origem, metade fica do lado positivo e a outra metade no lado negativo, isto é, resulta em: $\frac{1}{2} (\frac{h}{2\pi})$ de cada lado, uma vez que a onda, como sabemos, tem 2π radianos.

Nota-se que \hbar é exatamente (ou justamente) a quantidade de movimento angular mínima do elétron em torno do núcleo, ver equação 3 da secção A9.4, movimento angular.

Sendo L esse momento angular, $2\pi L = 2\pi\hbar = h$, constante de Planck, quantidade mínima de energia na natureza, é o “Quantum” de Planck.

Também se torna claro o porquê da estabilidade do átomo, que não funciona exatamente como um sistema planetário, pois embora haja uma atração entre o núcleo e os elétrons, os quais têm cargas opostas, a velocidade v , conseqüentemente, a energia dos elétrons (recorde-se que: $\Delta p = mv$), é tão grande que o núcleo não consegue reter o elétron, provocando um efeito repulsivo contrabalançando a atração eletrostática, isto é, o efeito dinâmico do elétron torna o átomo estável. Retorne-se à hipótese de De Broglie, confirmada por Davisson Germer nas páginas iniciais deste Anexo, para uma melhor compreensão desse efeito quântico (ver as Equações 1a e 1b), isto é, de a matéria também ter um comportamento ondulatório.

Para responder como Planck chegou ao “Quantum” h , anexamos a Secção A6.11.

A6.11. COMO MAX PLANCK DESCOBRIU A FÓRMULA DA IRRADIAÇÃO DO CORPO NEGRO, QUE DEU INÍCIO À FÍSICA QUÂNTICA.

Em 1896, Wien afirmou que o espectro da radiação do corpo negro correspondia a um equilíbrio térmico, que seria completamente determinado pelo Princípio da máxima entropia, mas não o fez. Em vez disso, adotando um modelo de radiação em analogia com a distribuição de velocidade de Maxwell, obteve a formula:

$$u(o, T) = f_1(o) \exp[-f_2(o)/T]$$

Onde $f_1(o) = c_1/o^a$, c_1 e a ctes.

$f_2(o)$ a determinar

A fim de satisfazer a Lei de Stefan-Boltzmann $W = \sigma T^4$, da densidade de energia (²⁷), é necessário que $\alpha = 5$ e $f_2(o)/T$ seja função de σT , dando uma expressão à Lei de deslocamento de Wien: $f_2(o)/T = c_2/\sigma T$ onde c_2 cte. (²⁸)

Resulta: $u(o, T) = c_1 \sigma^{-5} \exp[-c_2/\sigma T]$, conhecida como fórmula de Wien. (4)

Daqui resulta comprimento de onda máximo $\lambda_m: \lambda_m T = c_2/5$

Estava em concordância com observações de Paschen de 1896: $c_2 = 5\lambda_m T = 14.445/\mu K$ ou $\lambda_m T = 2,891 \times 10^3 mK$ (K temperatura absoluta em graus Kelvin).

Desde 1897, Planck decidiu realizar o intento de Wien e em 1899, atraído pelas medições de Lummer e Pringsheim de que a distribuição espectral não dependia da constituição dos corpos e sim unicamente da temperatura.

Inicialmente, pelo princípio das Ondas estacionárias em Cavidades ressonantes, ver A1. Finn v2 p. 455, obteve: $u(\lambda, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \bar{\epsilon}$, onde $\bar{\epsilon}$ energia média de um oscilador à temperatura T , f , frequência.

Seguindo sugestão de Wien, decidiu relacionar $\bar{\epsilon}$ com a entropia e não com a temperatura, pelo seu faro em Termodinâmica, pois, temos que: $dS = \frac{\delta Q}{T}$, e pelas relações de Maxwell, temos: 1º Princípio da Termodinâmica: $TdS = dU + pdV$, sendo U energia interna, obtemos: $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$, isto é, a volume V cte.

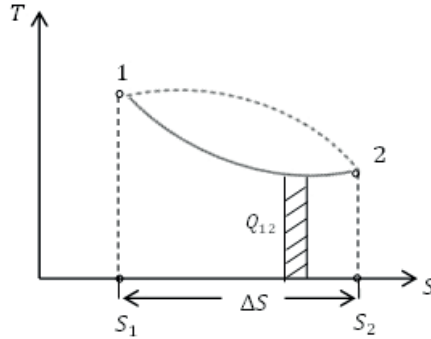
Aliás, a esse propósito, convém salientar que T é um fator integrante, que transforma a diferencial não exata de calor δQ em uma diferencial exata de entropia dS , isto é, uma diferencial que não depende do caminho percorrido. O símbolo δ define uma diferencial não exata. A diferencial exata só depende dos estados inicial e final.

$$\int_1^2 \delta Q = \int_1^2 T dS = Q_{12}$$

Vemos que o valor de Q depende do processo desenvolvido, mas $S_2 - S_1$ não depende. Ou seja, o processo com a linha inteira dá um determinado valor para Q_{12} que é diferente do processo com a linha tracejada, (ver figura).

²⁷ Energia por unidade de área.

²⁸ $\frac{W_1}{T_1^4} = \frac{W_2}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_1 \lambda_2 T_2}{W_2 \lambda_1 T_1} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Rightarrow \frac{W_{\lambda 1}}{W_{\lambda 2}} = \frac{T_1^5}{T_2^5} \therefore \frac{W_{\lambda}}{T^5} = cte$, por considerações termodinâmicas, Wien comprovou: $\frac{T}{\tau_0} = \frac{\omega}{\sigma} \phi \sigma T = cte$, recorde-se $W_o = \frac{W}{\sigma}$, fluxo de energia por comprimento de onda unitário. Lummer e Pringsheim o comprovaram experimentalmente. Wien tratou a irradiação como uma máquina termodinâmica. Considerou que a irradiação exerce pressão nas paredes do recinto. O que aconteceria se uma expansão adiabática ocorresse. Encontrou que a relação entre λ e T , antes e depois, seria: $T/T_o = \frac{\omega_0}{\omega} \phi \sigma T = cte$.



As áreas desenvolvidas pelos 2 processos são diferentes.

Voltando à relação de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \frac{1}{T}$$

Tomando a Lei de Wien (eq. 4) e renomeando as constantes, obtemos; explicitando U : $U = b f e^{-a/T}, u_f = U f$

$$\ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{af}{T}, \text{ como } \int \frac{dx}{x} = \ell n x \Rightarrow \frac{d}{dx} \ell n x = \frac{1}{x} \quad (\text{operação inversa})$$

$$\text{Logo: } \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{af}{T} \Rightarrow \frac{1}{af} \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) = -\frac{1}{T}$$

$$\therefore \ell n\left(\frac{U}{bf}\right)^{1/(af)} = -\frac{1}{T}$$

Insertando a relação de Maxwell:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = -\frac{1}{af} \ell n\left(\frac{U}{bf}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) = -\frac{1}{af} \frac{bf}{U} = -\frac{b}{\alpha U}$$

Ou seja: $\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U}$, isto é, proporcional a $\frac{1}{U}$.

Mas esta relação surpreendentemente simples se revelou insustentável com as medições, revelando ser inadequada como forma geral.

Se chamarmos: $R = (\partial^2 S / \partial U^2)^{-1}$, confrontando com as medições realizadas por H. Rubens e F. Kurlbaum, revelaram que a radiação infravermelha emergente de cristais de fluorita e salgema para energia e comprimento de onda longo, revelaram que o R era proporcional à

energia ao quadrado: $\frac{d^2 S}{dU^2} \propto \frac{1}{U^2}$, válida para frequências baixas.

Então, para tomar a fórmula geral, sendo válida para ondas longas e curtas, Planck modificou para:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{U(U+b)} \Rightarrow \frac{d}{dU} \left(\frac{dS}{dU}\right) = -\frac{1}{U(U+b)} \Rightarrow d\left(\frac{dS}{dU}\right) = -\frac{dU}{U(U+b)}$$

Integrando: $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{U}$ Das tabs de integrais: $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ell n \frac{ax+b}{x} + C$

Com a definição da temperatura:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{x} \quad (29), \text{ explicitando } U: U = \frac{b}{e^{b/T}-1}$$

Voltando a equação de Planck:

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{b}{e^{b/T}-1} \right)$$

Esta fórmula foi revelada na Sociedade Física de Berlim em 19 de outubro de 1900.

Explicuemos o raciocínio de Planck:

Como inicialmente, tínhamos:

$$R = \frac{1}{d^2S/dU^2} = -\frac{a}{b} U, \text{ depois das experiências de Rubens e Kurlbaum, se obteve:}$$

$$R = \frac{1}{d^2S/dU^2} = -U^2$$

Combinando com os dois e fazendo: $c = a/b$, obtemos:

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{cU+U^2} = -\frac{1}{U(c+U)} \quad (30), \text{ na equação acima chamamos } c \text{ de } b, \text{ são constantes.}$$

Medições posteriores feitas por Rubens, confirmaram a validade da fórmula para ondas longas e curtas.

Na ocasião, Planck não soube explicar pela Física clássica, a razão de ser da fórmula. Resolveu fazer um estudo probabilístico da entropia total do Sistema S_n , com n osciladores com energia média U e frequência f , energia total $U_n = nU$, assumindo um número inteiro P de elementos de energia $\varepsilon: U_n = P\varepsilon$.

Pelo 2º Princípio da termodinâmica: $S_n = k \ell n \Omega$, dependendo do número Ω de formas possíveis de distribuição dos P elementos de energia ε entre os n osciladores:

$$\Omega = \frac{(n+P-1)!}{(n-1)!P!}, \text{ obedecendo a fórmula combinatória: } \binom{n+P-1}{n-1}$$

Obedecendo ideias de Boltzmann.

$$\text{Obtém-se: } \frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon} \ell n \left(1 + \frac{\varepsilon}{U} \right) \Rightarrow \frac{U}{e^{\varepsilon/(kT)}} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{U} \right)$$

$$\therefore U = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/(kT)}-1}$$

Esta equação deve ser compatível com a 1ª Lei de Wien, isto é, ε deve ser proporcional a $f: \varepsilon = hf$.

²⁹ $1 = \frac{1}{b} \ell n \frac{U+b}{x} \Rightarrow 1 = \ell n \left(\frac{U+b}{x} \right)^{T/b} \Rightarrow \left(\frac{U+b}{x} \right)^{T/b} = e \Rightarrow \frac{U+b}{U} = e^{b/T}$
 $U e^{b/T} = U + b \Rightarrow U(e^{b/T} - 1) = b \Rightarrow U = \frac{b}{e^{b/T}-1}$

³⁰ $R_1 = -cU, R_2 = U^2 \Rightarrow R = -cU - U^2 = -U(c+U) \quad \therefore \frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{U(c+U)}$

Em lugar de fazer a demonstração probabilística conforme Boltzmann, faremos como Maxwell, postulando como Planck que em lugar de a energia ter valores contínuos de 0 a ∞ , teria valores de números inteiros: 0, ε_0 , $2\varepsilon_0$, $3\varepsilon_0$, ... $n\varepsilon_0$, onde ε_0 , é uma quantidade finita chamada “quantum”. O valor médio $\bar{\varepsilon}$ será dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} \\ &= \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}, \text{ sendo } \beta = 1/(kT)\end{aligned}$$

Recorde-se que: $S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}$ para $q < 1$ da soma de uma série geométrica, quando $n \rightarrow \infty$. Sendo a_1 , 1º elemento da série e q , razão da série.

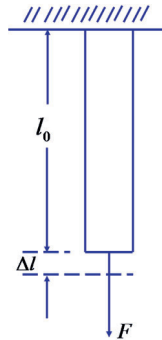
Resulta: $uf = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/(kT)} - 1}$, fazemos: $\varepsilon_0 = hf$ ⁽³¹⁾

Isto é, energia “quantizada”, esse foi o início da Física quântica, embora Planck não tivesse consciência disso. Somente em 1905, quando Einstein demonstrou o efeito fotoelétrico, considerando a energia composta de partículas, depois denominadas “fótons”, ficou estabelecido, pois Planck ainda acreditava que a irradiação fosse fenômeno ondulatório e que a demonstração acima fosse um artifício.

Em dezembro de 1900, Planck deduziu por probabilidade a fórmula acima.

³¹ Esse é um trecho de nosso artigo “Irradiação térmica” a ser publicado. Apenas colocamos aqui uma explicação da constante de Planck h .

A7.1 RESILIÊNCIA



A7.1.1 Elasticidade

Tensão é a relação entre força F e a secção A onde a força é aplicada. Pode ser de tração ou compressão.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Deformação é a relação entre a variação no comprimento e o comprimento inicial quando o corpo é sujeito a uma força F .

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

Módulo de elasticidade é a relação entre a tensão e a deformação.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta \ell / \ell_0}$$

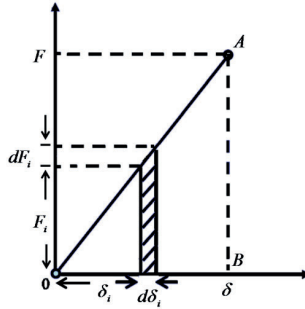
A7.1.2 Explicitando F

$$F = \frac{EA}{\ell_0} \Delta \ell \quad \therefore F = kx \quad (1)$$

Essa é a Lei de Hooke em que k é a constante elástica, ver Capítulo 3, Equação 1.

Isto é, a força aplicada F é proporcional à deformação ocasionada $\Delta \ell$ ou x .

A7.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO



$$W = \int F_i d\delta_i \text{ mas } F_i = \frac{EA}{\ell_0} \delta_i \text{ (1a)} \quad \therefore W = \frac{EA}{\ell_0} \int_0^\delta \delta_i d\delta_i = \left[\frac{EA}{\ell_0} \frac{\delta_i^2}{2} \right]_0^\delta$$

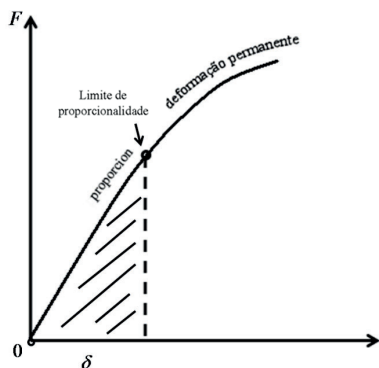
δ_i é a posição genérica F_i é o esforço genérico (conforme Figura e Equação 2)

Quando F_i atinge a carga total F , se obtém:

$$\delta_i = \delta \quad \text{e} \quad F = \frac{EA}{\ell_0} \delta$$

$$\text{e} \quad W = \frac{EA}{\ell_0} \delta \frac{\delta}{2} = F \frac{\delta}{2}$$

Também se obtém graficamente, ver Figura, pois a energia total W é igual à área do triângulo OAB .



A7.2.1 Resiliência

É a capacidade de um corpo armazenar energia sem deformação permanente, ou seja, dentro da Lei de Hooke.¹

Além desse ponto, quando a carga é retirada, o corpo não volta à situação inicial (a deformação é permanente, conforme Figura e texto 1b).

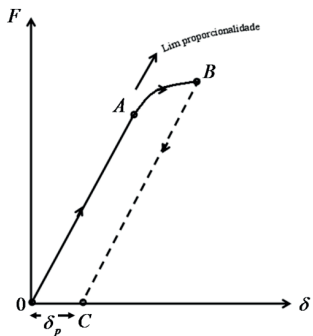
Também a natureza tem resiliência. Isto é, pode-se voltar à situação inicial até certo limite (limite de proporcionalidade). Até esse limite a natureza se regenera, além dele, não haverá regeneração, e sim, degeneração. Por exemplo: o homem ultrapassou os limites de proporcionalidade em: poluição dos rios, como Tietê e Pinheiros da cidade de São Paulo; extinção de várias espécies animais: pássaro gigante Moa, da Nova Zelândia; quase extinção do búfalo americano, que atualmente só existe na reserva de Yellowstone, e do Peixe-Boi; aquecimento global, ocasionando modificações climáticas desastrosas como derretimento das geleiras, chuvas excessivas, furacões inesperados, entre outros, principalmente por intermédio do efeito *El Niño* (aquecimento dos oceanos), causando efeitos como furacão no Estado de Santa Catarina, nunca ocorrido até então; possível extinção do mamute, pelo homem primitivo ajudado pelo homem de Neanderthal, espécie paralela de hominídeo que conviveu com o *Homo sapiens*; extinção ou assimilação (ainda se discute) do homem de Neanderthal pelo *Homo sapiens*.²

Isto é, se não tomarmos cuidado desde já, não será o planeta que estará ameaçado, mas sim, nós os seres humanos.

Referência: S. Timoshenko, v. 1, Strength of Materials
Evaristo Valladares Costa, v. 2, Curso de Resistência dos Materiais
Fritz Kahn, O Livro da Natureza

¹ Conceito mais fisiológico (biológico) do que físico: é a capacidade de suportar estresse (“stress”).

² Diversas contaminações ambientais causadas pelo homem em rios e mares: vazamentos de barragens de rejeitos de minérios, contaminação por mercúrio de garimpos, vazamentos de oleodutos, lançamentos de esgoto, lançamento de produtos plásticos.

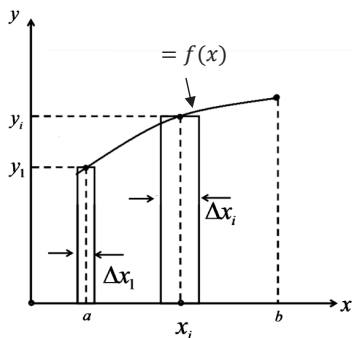


Fazemos o esforço ir de 0 até A , o limite de proporcionalidade. Ultrapassamos esse limite até B , e em seguida aliviamos o esforço até atingir $F = 0$ e chegar ao ponto C . Temos, então, uma deformação permanente δ_p , que não é o estado inicial, portanto, não houve regeneração, e sim degeneração do corpo sujeito à deformação. (1b)

A7.3 ADENDO MATEMÁTICO

A7.3.1 Observação: integração

Recordemos o “Teorema fundamental do cálculo integral”, ver Anexo 2, isto é, Integração como um Processo de soma.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

porém, $y = f(x)$, então $y_i = f(x_i)$

$$\therefore \int_a^b y dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i$$

Em nosso caso: $y = F$ $y_i = F_i$ $a = 0$ $b = \delta$ ver figura e nomenclatura na Secção A7.2

Então, a energia de deformação é: $W = \int_0^\delta F_i d\delta_i$

Como: $F_i = \frac{EA}{\ell_0} \delta_i$ (2) (ver Equação 1a) e $F_i = f(\delta_i)$

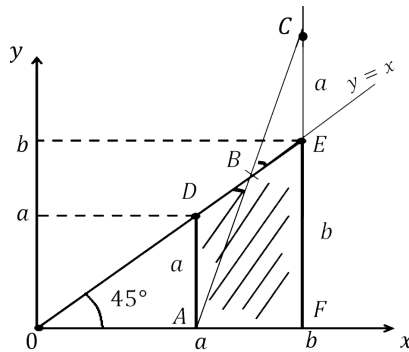
$$\therefore W = \frac{EA}{\ell_0} \int_0^\delta \delta_i d\delta_i = \frac{EA}{\ell_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta \delta_i = \left[\frac{EA}{\ell_0} \frac{\delta_i^2}{2} \right]_0^\delta = \frac{EA}{\ell_0} \left(\frac{\delta^2}{2} - 0 \right) = \frac{EA}{\ell_0} \delta \frac{\delta}{2} = F \frac{\delta}{2}$$

Pois:
 $F = \frac{EA}{\ell_0} \delta$ (ver

Elasticidade, Capítulo 3, Equação 0; ver também Equação 1a)

Verifiquemos: $\int_a^b x dx$

É a área do trapézio assinalado na Figura.³



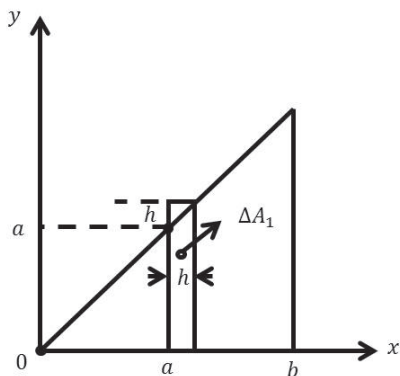
$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Usando o processo limite da integral como soma, fazendo: $h = \frac{b-a}{n}$

Calculemos a área ΔA_1 :

³ Traça-se uma reta AC passando pelo ponto médio B do trapézio. Os ângulos opostos em B são iguais. Os ângulos agudos em A e C são iguais (originados por reta cortando 2 paralelas). Os lados BD e BE são iguais (metade DE). Os triângulos ABD e BCE serão, portanto, iguais. Logo: área do trapézio: $A = (b - a) (a + b)/2$ (Área do triângulo ACF).

$$\Delta A_1 = h \left(a + \frac{1}{2} h \right)$$



Da mesma forma, ΔA_2 :

$$\Delta A_2 = h \left(a + h + \frac{1}{2} h \right)$$

Idem para ΔA_3 : $\Delta A_3 = h \left(a + 2h + \frac{1}{2} h \right)$

Para $\Delta A_n = h \left[a + (n-1)h + \frac{1}{2} h \right]$

Área total:

$$\sum_{i=1}^n \Delta A_i = h \left[na + \frac{n}{2} h + h(1+2+\dots+n-1) \right]$$

Como a soma de uma progressão aritmética é: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ⁴

$$\text{E } a_1 = 0, a_n = n - 1$$

$$\text{Teremos: } 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n}{2}(0 + n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (0)$$

$$\text{Então: } \sum_{i=1}^n \Delta A_i = nh \left[a + h \left(\frac{1}{2} + \frac{1+2+\dots+n-1}{n} \right) \right] =$$

⁴ Há uma demonstração interessante, devida a Gauss, no fim deste Anexo.

$$= (b-a) \left[a + h \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \right) \right] = (b-a) \left[a + h \left(\frac{n}{2} \right) \right] = (b-a) \left[a + \frac{(b-a)(n)}{2n} \right]$$

$$\text{Teremos: } (b-a) \left[a + \frac{1}{2}(b-a) \right] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\text{Logo: } \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

c.q.d. (como queríamos demonstrar).

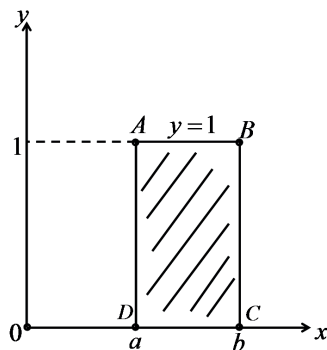
Observação

Vimos que $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, ou seja: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + cte$ (1) Integral indefinida

Podemos generalizar a fórmula. De fato, se fizermos em $y = x^n = x$, em que $n = 1$

Se $n=0$, teremos $x^n = 1$ e $\int_a^b dx = b - a$ ou seja: $\int dx = x + cte$

Graficamente: $\int_a^b y dx = \int_a^b dx = 1(b - a)$



Isto é, a integral será a área $ABCD$ da Figura.

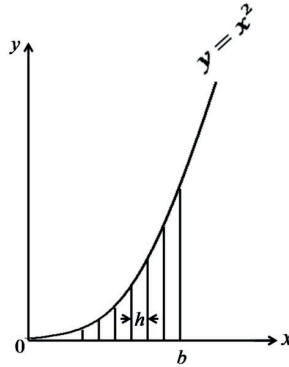
Por outro lado, se $n = 2$, teremos $y = x^2$.

Calculemos a integral $\int_0^b x^2 dx$

Dividindo o intervalo $b-0$ em n partes iguais: $h = \frac{b}{n}$

A área será dada por:

$$h(h^2 + 2^2 h^2 + 3^2 h^2 + \dots + n^2 h^2) = h^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$



A soma dos termos será:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(ver Equação 2)

Substituindo e reescrevendo a fórmula:

$$\frac{b^3}{6n} n \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ logo: $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$ ou $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + cte$

Então, genericamente, teremos: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte$, como Integral indefinida.

Válida para números inteiros, exceto $n = -1$, pois nesse caso teríamos:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} + cte$$

Prova-se nesse caso:

$$\int \frac{dx}{x} = \ell nx + cte$$

Pois: $d(\ell nx) = \frac{dx}{x}$, integrando, obtemos a equação anterior.⁵

Também podemos estender para n racional e irracional (COURANT,1951).

Vimos na Equação 0 que a soma dos n primeiros inteiros é: $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, é uma função de n . Da mesma forma, a soma dos n primeiros quadrados: $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ é também uma função do inteiro n . Observe que temos $n + 1$ termos, sendo o primeiro: $a_1 = 0$, e o último: $a_{n+1} = n$.

Partindo da fórmula: $(\psi + 1)^3 = \psi^3 + 3\psi^2 + 3\psi + 1$

$$\therefore (\psi + 1)^3 - \psi^3 = 3\psi^2 + 3\psi + 1$$

Para $\psi = 0$: ~~1^3~~ = 1

Para $\psi = 1$: ~~$2^3 - 1^3$~~ = $3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

Para $\psi = 2$: ~~$3^3 - 2^3$~~ = $3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

Para $\psi = 3$: ~~$4^3 - 3^3$~~ = $3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$

Etc. até

Para $\psi = n$: ~~$(n+1)^3 - n^3$~~ = $3n^2 + 3n + 1$

Somando todas essas expressões: $(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1$ e substituindo

$$S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

⁵ $y = \ell nx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ell n \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \ell ne$

$$\Delta y = \ell n(x + \Delta x) - \ell nx = \ell n \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0, \rightarrow n = \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \infty \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \ell ne = 1$, a base de ℓn é "e", $e^1 = e$

$\therefore dy = d(\ell nx) = \frac{dx}{x}$ **recorde - se $\ell n = \log_e$, o índice e indica a base.**

Desenvolvendo pelo binômio de Newton: $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1^n + n1^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \dots =$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots$, fazendo $n \rightarrow \infty$ temos: (1a)

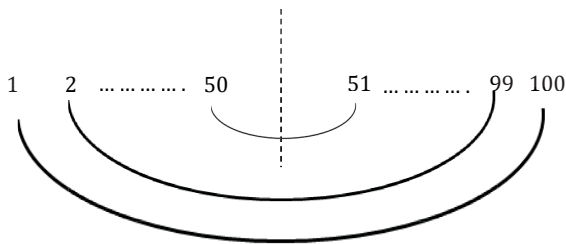
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots = 2,718281 \dots = e$, assim denominado em homenagem a Leonard Euler (1707-1783).

$$\begin{aligned}
\therefore 3S_2 &= (n+1) \left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n \right] = (n+1) \left(n^2 + \frac{1}{2}n \right) = \\
&= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) = \\
&= (n+1) \left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1 \right] = \\
&= (n+1) \left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1 \right) = \\
&= (n+1) \left(n^2 + \frac{1}{2}n \right) = \\
&= (n+1) \left[n \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] = \\
&= (n+1) \left[n \left(\frac{2n+1}{2} \right) \right] \\
\therefore S_2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (2)
\end{aligned}$$

c.q.d.

A história conta que Carl Friedrich Gauss⁶, conhecido como o Príncipe da Matemática, defrontou-se com o seguinte problema: quando o professor de Matemática perguntou à classe, “quanto é a soma dos cem primeiros números naturais diferentes de zero?” Gauss, quase imediatamente, respondeu, 5.050. Como ele chegou a esse resultado?

Veja a Figura a seguir:



Temos uma progressão aritmética em que o 1º termo é $a_1 = 1$, e a razão $r = 1$.

A soma dos elementos equidistantes é constante.

⁶ Ele tinha 10 anos na época.

Somando os pares, $50 + 51 = 101$ e multiplicando pelo número total dos pares, 50, concluímos que a soma é 5050.

Observe:

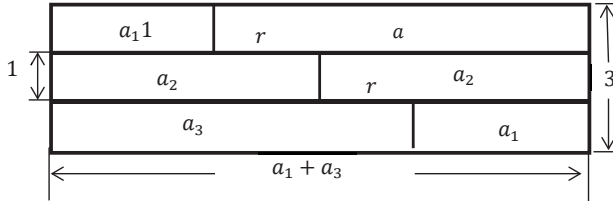
$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & & & a_n \\
 S = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) \dots \dots \dots [a_1 + (n - 1)r] \\
 S = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + (a_n - 3r) \dots \dots \dots [a_n - (n - 1)r] \quad (7)
 \end{array}$$

Somando, obtemos:

$$\begin{aligned}
 2S &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots \dots \dots (a_1 + a_n) \\
 \therefore 2S &= (a_1 + a_n)n \Rightarrow S = \frac{a_1 + a_n}{2} n
 \end{aligned}$$

Veja que r desaparece, \therefore a fórmula vale para qualquer que seja r .

Graficamente, por exemplo, para $n = 3$:



A área do retângulo maior é o dobro da soma S :

$$2S = (a_1 + a_3)3 \Rightarrow S = \frac{a_1 + a_3}{2} 3$$

O que confirma a fórmula anterior.

Ref.: Sistema de Consulta Interativa

Definição de resiliência: mais fisiológica do que física, é a capacidade de resistir ao stress.

⁷ Se n for ímpar, por exemplo, 99, multiplicamos $(1 + 99)$ por 49 pares e meio: $(1 + 99) 49,5 = 4950$

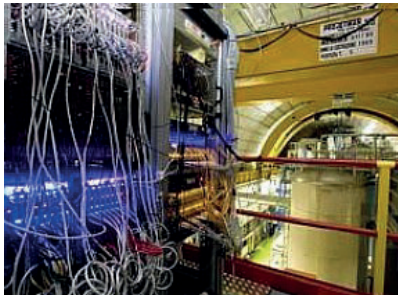
Repasso, sem comentários, por ser autocompreensível.

A8.1 CERN CONFIRMA QUE NEUTRINOS NÃO VIAJAM MAIS RÁPIDO QUE A LUZ

Em 2011, estudo mostrou que partículas chegariam 60 nano segundos antes da luz, o que contrariaria Einstein.

Jamil Chade, correspondente/Genebra

Entre uma máquina milionária e Einstein, venceu Einstein. Ontem, o Centro Europeu de Investigação Nuclear (Cern) confirmou que as partículas elementares, conhecidas como neutrinos, não viajam a uma velocidade superior à da luz e, portanto, não têm condições de questionar a teoria da relatividade do cientista.



Ho/Reuters

Vista geral do detector Opera, no laboratório Gran Sasso, na Itália, responsável pela 1ª experiência.

Em setembro do ano passado, uma pesquisa causou uma pequena revolução no mundo científico. Ou pelo menos acreditava que tinha causado. Neutrinos foram lançados por baixo da terra a partir da sede do Cern, em Genebra, até um laboratório na Itália, por 730 quilômetros. O resultado aparentemente mostrava que as partículas chegariam 60 nano segundos antes da luz. Se confirmado, isso contradiria pilares da física, baseada na teoria da relatividade de Einstein.

Mas tudo não passou de um grande erro, e, em dezembro do ano passado, o físico italiano Antonio Ereditato, porta-voz do experimento, se demitiu.

Ontem, o diretor de pesquisas do Cern, Sergio Bertolucci, afirmou que os neutrinos “respeitam o limite de velocidade cósmica”. O anúncio foi feito na Conferência Internacional sobre Física e Astrofísica dos Neutrinos em Kyoto. Segundo ele, os experimentos situados na Itália - Borexino, Icarus, LVD e Opera – indicaram que a velocidade dos neutrinos se equipara à da luz.

O erro, segundo ele, teria vindo de um problema “no sistema de medição do sistema de fibra ótica do experimento”. Foi descoberta uma má conexão entre os cabos óticos e uma sincronização errada dos cronômetros.

O Cern se defendeu, alegando que desde o início havia reagido com cautela ao suposto descobrimento e havia solicitado uma nova bateria de exames. Mas comemorou ontem o fato de que o interesse público tenha sido tão elevado. “É assim que a ciência avança”, declarou.

“A história atraiu o imaginário popular”, disse. “Mas o resultado, ao final, era o que todos esperávamos”, admitiu o cientista. Ou seja, Einstein prevaleceu.

A9.1 LEI DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Em 1684, Christopher Wren (1632-1723), matemático e arquiteto, um dos fundadores do Royal Society, propôs a Edmond Halley (1656-1752; astrônomo descobridor do cometa que leva seu nome) e a Robert Hooke, o mais brilhante experimentador do Royal Society, um prêmio de um livro de 40 xelins¹ a quem comprovasse sua opinião de que uma força dirigida do planeta ao Sol, cuja intensidade fosse proporcional ao inverso do quadrado da distância, bastava para explicar a trajetória dos planetas. O prazo era de 2 meses.

Na época, vivia em Cambridge o titular da cadeira Lucasiana de matemática, Isaac Newton (1642-1727), “que não se importava de se dar a conhecer”, tendo feito apenas uma conferência pública em 1672 sobre uma estranha teoria da natureza da luz, sustentando que a luz branca era composta de todas as cores do arco-íris. Halley estava persuadido que Newton tinha um método poderoso para resolver os problemas mais complexos sobre curvas, apesar de ser uma pessoa de difícil acesso.

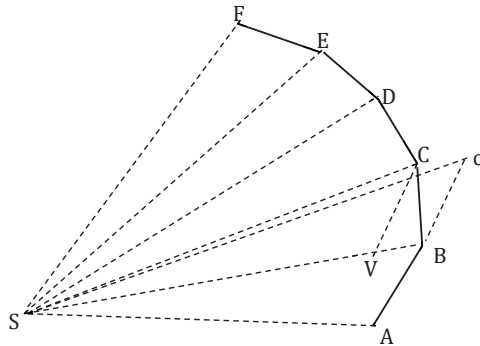
Dirigiu-se ao Trinity College e encontrou Newton de bom humor. Comunicou-lhe que a questão lhe era familiar, e que achava que uma força dirigida ao Sol e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao planeta era necessária para explicar o sistema dos planetas. Newton explicou que havia guardado as anotações em uma gaveta e se comprometeu a transmitir-lhe assim que encontrasse a folha.

Halley esperou alguns meses. Em novembro de 1684, Newton confiou ao colega Edward Paget, membro do Trinity College, bom matemático, mas também bom de bebida, a missão de entregar a Halley um curto manuscrito, páginas que continham a resposta à pergunta formulada.

¹ Xelim: *shilling*, moeda de prata inglesa equivalente a 12 pence. 20 *shillings* equivalem a 1 libra esterlina. Na época aproximadamente a metade do lucro mensal de um comerciante rico!

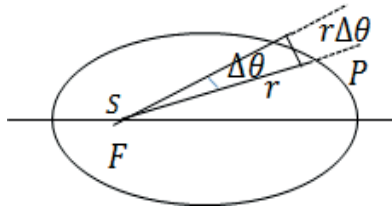
A9.1.1 Demonstração elegante

Prova geométrica:



Para demonstrar a lei das áreas (a segunda lei de Kepler), Newton se baseia nesse esquema, em que o corpo em movimento descreve uma trajetória ABCDEF. Considera-se que a força central dirigida a S age instantaneamente e a intervalos de tempo regulares para fazer o objeto “cair” em direção a S: entre duas ações, o objeto se desloca em linha reta e em velocidade constante.

O raio vetor SP varre as áreas SAB, SBC, SCD etc. (ver Figura)² em intervalos de tempo iguais, $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ etc.



Observação: será visto na Seção A9.4 “Momento angular”, Equações 1a e 2, que, levando ao lim o elemento de área:

$\frac{1}{2} r \cdot r \Delta \theta$, isto é, quando o planeta efetua uma elipse, fazemos o que os gregos chamavam de processo de “exaustão”, Newton “fluxions” e Leibniz, “derivada”.

Ou seja:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} r \cdot r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} L/m. \quad (0)$$

² E também a Figura indicada por 0 em Problema da força central, Seção A9.2.

Em que L é o momento angular do planeta.

Trata-se de uma demonstração algébrica, na secção A9.4 “Momento angular”, Equações 1a e 2, daremos uma demonstração vetorial e, como veremos, L é constante, isto é, é conservado.

Lógico, fazendo os Δt_i iguais, quando $\Delta t \rightarrow 0$, isto é, levando ao lim, as correspondentes áreas, SAB, SBC, SCD etc. se tornarão também iguais, pois no lim, a poligonal A, B, C, D, ... se torna uma elipse, de vez que $dA/dt = \text{cte}$, então, o raio vetor SP varre áreas iguais em tempos iguais (conforme a 2ª Lei de Kepler).³

Demonstração:

Se não houvesse força centrípeta, o planeta continuaria por inércia até c' , $Cc' \parallel VB$, $AB = Bc'$, pois $\Delta t_1 = \Delta t_2$.

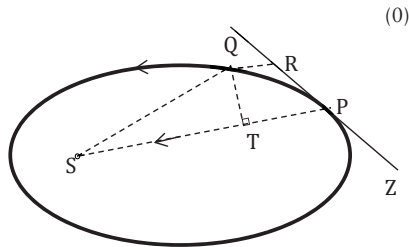
Área $SAB = Sbc'$, pois base AB igual à base Bc' e altura dos triângulos SAB e Sbc' são iguais (perpendicular de S sobre o prolongamento de AB).

De B até C atua a força centrípeta que faz o planeta em lugar de ir a c' , dirigir-se a C.

Os triângulos SBC e Sbc' têm áreas iguais, pois a base SB é comum aos dois e ambos têm a mesma altura, já que Cc' é paralelo a VB. Então, os triângulos SAB e SBC têm a mesma superfície.

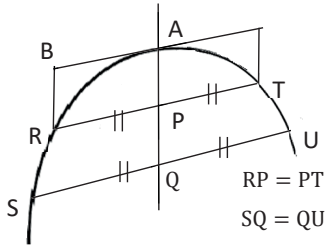
O mesmo vale para os outros pontos da poligonal. A seguir, diminuimos os lados AB, BC, CD e, proporcionalmente, os intervalos Δt . Levando ao limite, obtemos a 2ª lei de Kepler: varre áreas iguais em tempos iguais.

A9.2 O PROBLEMA DA FORÇA CENTRAL



³ Veremos que a 2ª lei de Kepler equivale à conservação da quantidade de movimento angular L .

A9.2.1 Propriedade da parábola

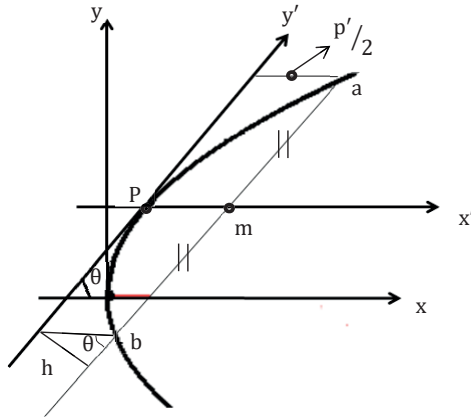


$$\frac{AP}{AQ} = \frac{RP^2}{SQ^2} = \text{cte} \Rightarrow \frac{AB^2}{SQ^2} = \frac{BR}{AQ}$$

APQ é um diâmetro que divide a parábola ao meio, cortando ao meio as cordas RT e SU. RP e SQ são semicordas.

Referência: Arquimedes

Para um sistema de coordenadas quaisquer (x' y'):



$$\frac{y^2}{x} = 2p = \text{cte} \text{ e } \frac{y'^2}{x'} = 2p' = \text{cte}$$

$$\text{sen } \theta = 2 \frac{h}{p'}$$

$$\frac{y'^2}{x'} = 2 \left(\frac{p}{\text{sen}^2 \theta} \right) = \text{cte} \Rightarrow p' = \frac{p}{\text{sen}^2 \theta}^4$$

⁴ Quando $\theta = 90^\circ$, $p' = p$, $y' = y$ e $x' = x$.

$$\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{y_2^2}{x_2} \therefore \frac{y'^2}{x'} = \text{cte}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3}$$

(HÜTTE, 1958)

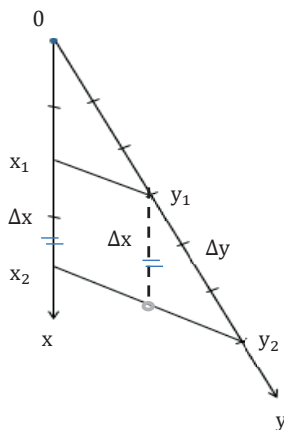
A9.2.2 Propriedade das proporções

$\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = \frac{y^2}{x} \therefore$ A variação Δy^2 está para a variação Δx , assim como y^2 está para x . (2)

$$\frac{2}{3} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{4}{6} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_i}{y_i} = \text{cte}$$

$$\frac{4-2}{6-3} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_i}{y_i} = \text{cte} = K$$

Pois: $x_2 = x_1 + \Delta x$



$$\therefore x_2 - x_1 = x_1 + \Delta x - x_1 = \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = y_1 + \Delta y - y_1 = \Delta y$$

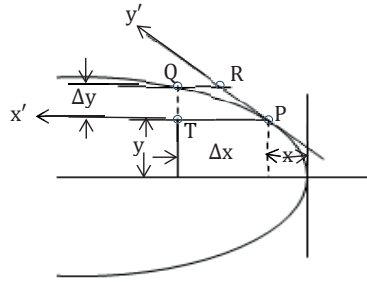
$$x_2 - x_1 = K\Delta y = \Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{K\Delta y}{\Delta y} = K = \text{cte}$$

Com base em triângulos semelhantes, têm seus lados correspondentes proporcionais. (ver CASTRUCCI, GIOVANNI)

Voltando à equação da parábola: $y^2/x = 2p = \text{cte}$, podemos deduzir que:

$$\frac{x}{\Delta x} = \frac{y^2}{\Delta y^2} = \text{cte, pois } \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_1}{y_1^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y^2} = \text{cte} = \frac{1}{2p}$$



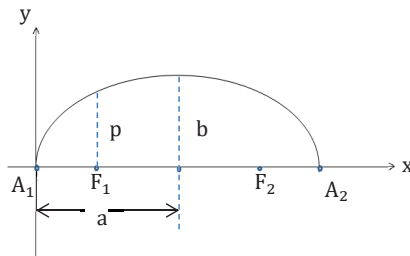
Segundo Newton:

$\frac{QR}{QT^2}$ trata-se da variação da proporção: $\Delta y^2 / \Delta x$

No lim quando $Q \rightarrow P$, $\frac{QR}{QT^2} \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta y^2}$ ⁵

Compare as duas figuras, são semelhantes.⁶

$\frac{RP^2}{PT} = \frac{y'^2}{x'} = \frac{QT^2}{QR} = \text{cte}$, por semelhança de triângulos.



⁵ Pois: $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{QR}{QT^2} = \frac{\Delta x}{\Delta y^2} = \frac{x}{y^2} = \frac{1}{2p} \Rightarrow y^2 = 2px$ Ver equações 1 e 2 acima, Secção A9.2 e A9.2.2.

⁶ Ver Figura anterior em Arquimedes. Inicialmente, QP é um segmento de elipse e $\therefore QR/QT^2$ não é exato. Quando $Q \rightarrow P$, chega-se a um segmento QP que se torna parabólico, então, QR/QT^2 se torna exato e constante.

Observação:

Equação da elipse referida ao vértice:

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \quad 7$$

Quando $a \rightarrow \infty$, a elipse se torna uma parábola, como visto anteriormente, e a equação se torna $y^2 = 2px$, equação de uma parábola, o que confirma o procedimento.

Quando Newton leva ao limite Δx e $\Delta y \rightarrow 0$, corresponde a levar $a \rightarrow \infty$, tornando a elipse tão grande que um pequeno trecho seu se confunde com uma parábola, que é uma elipse em que um dos focos e, portanto a, tende para o infinito.

Aliás, pelo cálculo diferencial, que foi uma descoberta de Newton, compartilhada com Leibniz:

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(y^2)}{\Delta x} = \frac{2y}{1} = \frac{d(2px)}{dx} = \frac{2p}{1}$$

Como p é constante, $\frac{d(2px)}{dx}$ será constante.

Logo, no limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{QT^2}{QR} = \frac{\Delta(y^2)}{\Delta x}$ tende a uma constante: $2p$

q.e.d.

3ª etapa: Newton avalia geometricamente a intensidade da força central, ver fig na secção A9.2, Problema da Força Central.

Se não houvesse força, o corpo se deslocaria de P segundo a tangente PR . Por efeito da força, se desvia por uma distância RQ , conforme Galileu. Sabe-se que um corpo sujeito a uma força constante desloca-se com o quadrado do tempo, obedecendo à fórmula: $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2 / 2$

O 1º termo leva em conta o movimento inercial e o 2º, o efeito da força fazendo a trajetória resultante ser PQ (8). Logo, a intensidade da força será proporcional ao limite da relação $QR/(QT)^2$, quando Q tende a P (ver Figura assinalada em (0) da figura na secção A9.2).

Expressando Δt em termos geométricos:

Como visto, o tempo é proporcional à área varrida pelo vetor SP . Portanto, Δt é proporcional à área SPQ . Logo, com boa aproximação: $SP \times QT / 2$ (ver Figura assinalada com (0), mencionada fig, secção A9.3).

Recorde-se que espaço: $e = (1/2)at^2 \Rightarrow$ aceleração $a = 2e/t^2$, como $F = ma \Rightarrow F = 2me/t^2$, logo, a força F é proporcional ao inverso do quadrado do tempo t .

7 $p = \frac{b^2}{a}$, ver Equação 1 em "Observação: cônicas", secção A9.3.1.2.

8 Como se vê, é uma soma vetorial de um movimento uniforme pela inércia e um movimento acelerado, pela aceleração centrípeta, resultando uma trajetória parabólica, como o movimento de um projétil.

Ref.: Hal-Resn v1 e A1. Finn v1.

Quando Q tende a P, torna-se exata. Então Δt é proporcional a $SP \times QT$. Logo, a intensidade da força central será proporcional ao limite da relação $QR/(SP \times QT)^2$ quando Q tende a P.

4ª etapa: o que vimos aplica-se a uma elipse. Pela 1ª etapa, a força central é dirigida para S. Pela 3ª etapa, a intensidade é proporcional ao produto de $1/SP^2$ pelo limite da relação QR/QT^2 quando Q tende a P. A 2ª etapa nos diz que essa relação tende a uma constante. Conclusão: F é proporcional a $1/SP^2$, isto é, a intensidade da força é proporcional ao inverso do quadrado da distância SP.

Ref: Scientific American

c.q.d ou q.e.d. (*quod erat demonstrandum*)

Referindo-se a Salmeron, (1954):

Grandezas diretamente proporcionais:

Se a for proporcional a b:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots \dots \dots \frac{a_n}{b_n} = c \text{ (constante)}$$

Em geral: $\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = c \cdot b$ c é constante de proporcionalidade.

Grandezas inversamente proporcionais:

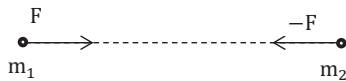
$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \dots \dots \dots \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = c \text{ (constante)}$$

Em geral,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = c \Rightarrow ab = c$$

Teorema: quando uma grandeza a é proporcional a duas outras b e c, será proporcional ao produto dessas outras (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 1996).

A interação entre duas partículas de massas m_1 e m_2 como uma força de atração, formam um par ação-reação de valores F e $-F$, conforme a 3ª lei de Newton.



Pela 2ª lei, a força de atração será proporcional às massas envolvidas no sistema m_1 e m_2 , mas como estão afastadas de uma distância r a influência na força F será como o inverso do quadrado desse afastamento. Quanto maior a distância, menor a força, e a variação é, como vimos, com o quadrado da distância.

$$\text{Logo: } \frac{F}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)} = G \text{ (constante gravitacional)} \quad \therefore F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

⁹ A força é proporcional ao quadrado do tempo e, portanto, com o quadrado da área.

Recordemos a “regra de três composta”:

Quando existem mais de duas grandezas relacionadas, a “regra de três” é chamada de composta. Para a compreensão do teorema mencionado, a regra de três composta é perfeitamente adequada. Vejamos um exemplo para prová-lo: uma torneira enche um tanque de 200 l em 20 min. Quanto tempo duas torneiras levariam para encher um tanque de 300 l?

Tempo t	Volume V	Quantidade Q
20	200	1
X	300	2

Analisemos as grandezas de duas em duas. Se as torneiras enchem 200 l em 20 min, 300 l vão demorar mais tempo, portanto, as grandezas tempo e volume são diretamente proporcionais. Se uma torneira enche em 20 min, duas gastarão menos tempo, portanto, são inversamente proporcionais. Nesse caso, será preciso inverter a grandeza quantidade a fim de montar a proporção. Confira: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \Leftrightarrow \frac{t_2}{V_2 \cdot Q_1} = \frac{t_1}{V_1 \cdot Q_2} = \text{cte}$

$$\text{Substituindo: } \frac{t_2}{300 \cdot 1} = \frac{20}{200 \cdot 2} = \text{cte} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Ou seja: } \frac{t_2}{V_2 \left(\frac{1}{Q_2}\right)} = \frac{t_1}{V_1 \left(\frac{1}{Q_1}\right)} = \frac{t}{V \left(\frac{1}{Q}\right)} = \text{cte}$$

$$\text{Compare com a fórmula: } \frac{F}{m_1 m_2 \left(\frac{1}{r^2}\right)} = G, \text{ uma constante.}$$

c.q.d.

O que comprova o teorema.

$$\text{Voltando ao problema: } t_2 = \frac{1}{20} 300 \cdot 1 = 15 \text{ min}$$

A9.3 2ª LEI E GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Newton não expressou a 2ª lei como equação: uma mudança no movimento é proporcional à força motriz e se dá ao longo da linha reta na qual a força é impressa (Crease, 2011).

$$\text{Notação moderna: } F \propto \Delta(mv) \quad (2)$$

Isto é, a força é proporcional à variação da quantidade de movimento mv , variação supostamente no tempo. Desde que a mudança na velocidade seja a aceleração: $F = ma$. A primeira pessoa a expressar essa noção como equação foi Leonhard Euler, quase um século mais tarde.

De fato, na proposição nº 24 do 2º livro dos *Principia Mathematica* de Newton, se explica:

“A velocidade que uma dada força pode produzir em uma dada matéria, em um tempo dado, é diretamente proporcional ao tempo, e essa velocidade é proporcional à força e inversamente proporcional à quantidade de matéria.”

Se substituirmos “velocidade que uma dada força pode produzir” por dv , “força” por F , “matéria” por m e “tempo dado” por dt , teríamos: $F = m \frac{dv}{dt} = ma$.

Esclarecemos: Newton deduziu os *Principia* em linguagem geométrica. Não utilizou o cálculo das “fluxões” (que chamamos hoje de derivadas), pelo qual se poderia escrever: $F = ma$, levando em conta o nível de conhecimento dos leitores aos quais se dirige. O estilo geométrico correspondia à expectativa dos filósofos da Natureza do fim do século XVII. A Física, como ciência independente ainda não existia, era uma parte da Filosofia.

Porém, o enunciado da 2ª lei do movimento é surpreendente.

A força aparece como proporcional à mudança de movimento. Não se faz referência ao tempo. Não se sabe se convém transcrever $F = ma$ (força proporcional à aceleração) ou $F = m\Delta v$ (força proporcional à variação da velocidade Δv , da velocidade v).

Ref.: Scientific American, Genios da Ciencia nº 7, Isaac Newton.
The Mathematical Principles of Natural Philosophy

Isaac Newton, 1729 (SCIENTIFIC AMERICAN; NEWTON)

Newton expressou a gravitação universal como: a gravidade “existe em todos os corpos, universalmente”, e sua intensidade entre dois corpos depende da massa desses corpos e “será inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros” (Crease, 2011).

Combinando a força gravitacional com a 2ª lei de Newton: $F = G \frac{Mm}{r^2} = mg$, em que g é a aceleração da gravidade.

$$\text{Daqui obtemos: } g = \frac{GM}{r^2}$$

Em 1798, Henry Cavendish, utilizando uma balança de torção semelhante à utilizada por Coulomb para determinar a força devida a cargas elétricas, obteve:

$G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ dinacm}^2/\text{g}^2$ ou $6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ ¹⁰ considerando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, ao nível do mar e à latitude de 40°N.

Com isso, é possível calcular a massa da Terra:

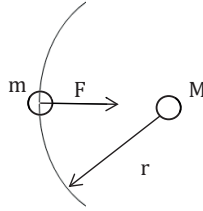
$$980 = \frac{6,67 \times 10^{-8} \times M}{(6,38 \times 10^8)^2} \quad \text{considerando que a Terra atrai 1 g com força de 980 dinas e raio da Terra } 6.380 \text{ km ou } 6,38 \times 10^8 \text{ cm} \quad \therefore M = 5,98 \times 10^{27} \text{ g} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{Volume da Terra } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 108,8 \times 10^{25} \text{ cm}^3$$

¹⁰ Também: $G = 6,67 \times 10^{-8} (\text{gcm/s}^2) (\text{cm}^2)/\text{g}^2 = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2$.

Massa específica média: $\frac{600 \times 10^{25}}{108,8 \times 10^{25}} = 5,5 \text{ g/cm}^3$.

Também podemos calcular a massa do Sol:



$F = G \frac{Mm}{r^2} \therefore G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$, (força centrípeta, ver Seção 2.1.3, Equação 3a 1, sobre MHS).¹¹

$$\therefore \omega^2 = G \frac{M}{r^3}, (1)$$

Logo, a velocidade angular independe da massa do planeta, dependendo da massa do Sol e do raio da órbita planetária. Considerando a órbita da Terra, suposta circular:

150 milhões de km e tempo de revolução de 365 dias, ω em rad/seg.

$$\therefore \omega = 2\pi/365\text{d} = 2\pi/3,1536 \times 10^7 \text{ seg}$$

$$\therefore M = \left(\frac{2\pi}{3,1536 \times 10^7} \right)^2 \frac{(1,5 \times 10^{11})^3}{6,67 \times 10^{-11}} = \frac{(1,9924)^2}{10^{14}} \frac{3,375 \times 10^{33}}{6,67 \times 10^{-11}} =$$

$$= 2,0086 \times 10^{30} \text{ kg} = 2,0086 \times 10^{27} \text{ ton} = 3,3612 \times 10^5 \text{ da Terra}$$

$$\cong 340\,000 \text{ da Terra.}$$

A9.3.1 Resolução moderna

A9.3.1.1 Introdução

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} \right) = \vec{A} \times \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{A} \times \frac{d^2\vec{A}}{dt^2}, \text{ pois } \frac{d\vec{A}}{dt} \times \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \text{ sen } \alpha = 0.¹²$$

$$\therefore \int \vec{A} \times \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \cdot dt = \int \frac{d}{dt} \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} \right) dt = \vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{c} \quad \vec{c} \text{ constante}$$

Equação do movimento de uma partícula P de massa m:

¹¹ Obtida multiplicando a massa m pela aceleração radial ou centrípeta.

¹² $\frac{d\vec{A}}{dt} \times \frac{d\vec{A}}{dt} = \left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| \left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| \text{ sen } \alpha$, α ângulo entre $\frac{d\vec{A}}{dt}$ e $\frac{d\vec{A}}{dt}$ $\therefore \alpha = 0$

m $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\vec{r}_1$ ¹³ \vec{r} vetor posição de P com relação à origem O,

\vec{r}_1 vetor unitário na direção \vec{r} , $f(r)$ função da distância de P a O (força).

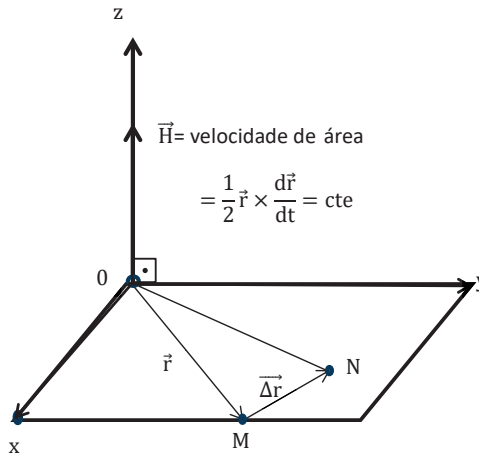
a) Achando o produto vetorial por \vec{r} : $m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\vec{r} \times \vec{r}_1 = 0$, pois r e r_1 são colineares

$$\therefore \vec{r} \times \vec{r}_1 = 0, \text{ logo: } \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0$$

Integrando: $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c}$, ver Introdução.

Recordemos: a derivada de uma constante é nula.



b) Se $f(r) < 0$, a aceleração $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ tem sentido oposto a r_1 , a força é dirigida para 0 e a partícula P é sempre atraída para 0 (força atrativa).

Se $f(r) > 0$, a força se afasta e a partícula P é repelida (força repulsiva).

A força dirigida para o ponto 0, fixo: atrativa ou repulsiva, dependendo somente da distância r de 0. Chama-se “Força central”.

c) No tempo Δt a partícula se move de M para N. Área varrida, é aproximadamente $\frac{1}{2}$ da área do paralelogramo formado por \vec{r} e $\vec{\Delta r}$:

$$\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{\Delta r} \text{ (ver produto vetorial, cujo valor é o da área do paralelogramo).}$$

\therefore Área varrida pelo raio vetor na unidade de tempo:

¹³ Massa \times aceleração = força, função do raio.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad \vec{v} \text{ velocidade instantânea}$$

A grandeza $\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$, chama-se “velocidade de área” (1)

Pelo item a): $\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \text{constante}$

Como $\vec{r} \cdot \vec{H} = 0$, o movimento é realizado no plano xy perpendicular a \vec{H} ¹⁴

Veremos adiante, em “Momento angular”, equações 1 e 2, sendo: $\vec{H} = \frac{\vec{L}}{m} = \frac{1}{m} \vec{r} \times \vec{p}$, \vec{H} é \perp , isto é, perpendicular, a \vec{r} e a $\vec{p} = m\vec{v}_\theta$, portanto \perp ao plano xy , \vec{v}_θ está no plano xy .

Lembrar que o resultado do produto vetorial: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor \perp ao plano formado pelos vetores \vec{A} e \vec{B} .

$\therefore \vec{r}$ e \vec{H} são perpendiculares pois: $\vec{r} \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{r} \parallel \vec{r}$, $\text{sen}(\hat{r}\hat{r}) = 0$

O triplo produto vetorial será nulo quando 2 dos 3 vetores forem paralelos pois nesse caso o volume do paralelepípedo formado pelos 3 vetores será nulo.

d) Um planeta é atraído pelo Sol. Conforme a lei da gravitação de Newton:

$$F = GMm/r^2, G \text{ constante universal.}$$

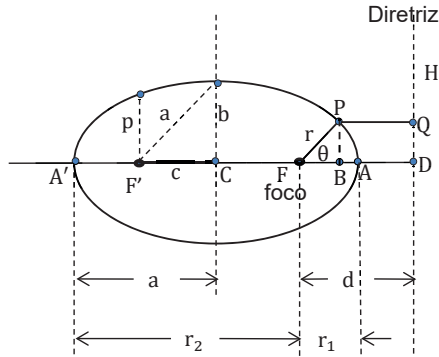
$$\therefore m d^2\vec{r}/dt^2 = -\frac{GMm}{r^2} \iff d^2\vec{r}/dt^2 = -\frac{GM}{r^2}, \text{ considerando desprezível a influência dos outros planetas.}$$

Conforme item c, o planeta se move com raio vetor varrendo áreas iguais em tempos iguais. Essa é a 2ª lei de Kepler, deduzida empiricamente com dados compilados por Tycho Brahe. Possibilitou a Newton a formulação da sua lei da gravitação.

Ref: Spiegel

¹⁴ Recorde que: $rH \cos 90^\circ = 0$, de vez que $\cos 90^\circ = 0$. Veremos adiante em “Momento angular”, equ1 e 2, que, sendo $\vec{H} = \frac{\vec{L}}{m} = \frac{1}{m} \vec{r} \times \vec{p}$, \vec{H} é perpendicular a \vec{r} e a $\vec{p} = m\vec{v}_\theta$, portanto \perp ao plano xy . Lembrar que o resultado do produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é um vetor \perp ao plano formado pelos vetores \vec{A} e \vec{B} .

A9.3.1.2 Observação: cônicas



$$\text{Excentricidade } \varepsilon = \frac{PF}{PQ}$$

$$PF = r \quad FD = d$$

$$PQ = FD - FB = d - r \cos \theta$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{r}{(d - r \cos \theta)} \iff \varepsilon d - \varepsilon r \cos \theta = r \implies \frac{\varepsilon d}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon r \cos \theta + r = \varepsilon d \implies r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

No caso de uma elipse, que é uma curva fechada, o ponto A corresponde a $\theta = 0$ e A' , $\theta = \pi$.

De acordo com a equação polar, teremos: $r_1 = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon}$ para $\theta = 0$ e $r_2 = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon}$ para $\theta = \pi$

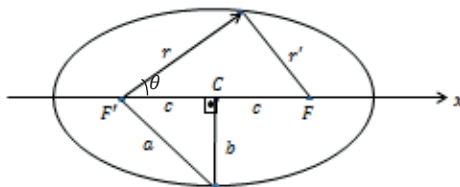
$$r_1 + r_2 = 2a \iff a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}$$

Fazendo excentricidade: $e = c/a = CF/CA$, obtemos:

$b = a\sqrt{1 - e^2}$, pois: $b^2 = a^2(1 - c^2/a^2)$ $e: a^2 = b^2 + c^2$ Área da elipse: $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, ver eq. 8a em “Dedução da 3ª Lei de Kepler”, secção A9.5, para excentricidade $e = \frac{c}{a}$

Círculo, elipse especial em que a excentricidade sendo $e = \frac{CF}{CA}$, quando $e = 0$

A equação polar da elipse quando C está no eixo x e o polo O no foco F' será (ver fig.):



$$c = ae$$

$$r + r' = 2a$$

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}, \text{ deduzida pela Lei dos cossenos: } r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta$$

$$= r^2 + 4a^2e^2 - 4rae \cos \theta$$

Substituindo: $r' = 2a - r$, cancelando r'^2 de ambos os lados e dividindo por $4a$, temos:

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4rae \cos \theta \Rightarrow a(1 - e^2) = r(1 - e \cos \theta) = p$$

$r(1 - e \cos \theta) = a(1 - e^2) = p \therefore r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ (ver eq.1 ao pé da pag. de “Momento angular” secção A9.4)

Referência: Arfken-Weber

$$p \text{ igual ordenada no foco: } p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \quad (1) \text{ (Ver Malavasi)}^{15}$$

$$r' = a - cx, r = a + cx, r + r' = 2a$$

$$x = r \cos \theta$$

Raio máximo: $F'A = a + c$, raio mínimo: $F'A' = a - c$ (ver 1ª figura) ⁽¹⁶⁾

Ref.: Alonso Finn

Nesse caso: Elipse $e < 1$
 Parábola $e = 1$ (Ver Tabelas Spiegel)
 Hipérbole $e > 1$

A9.4 MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ onde } \vec{r} = \text{raio vetor, } \vec{p} = \text{quantidade de movimento} = m\vec{v} = m\vec{r} \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

¹⁵ De fato: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, equação da elipse $\Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow p = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$ mas: $b^2 = a^2 - c^2$ (ver fig), logo $p = \frac{b}{a} b = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) = a(1 - e^2)$

¹⁶ Quando $\theta = 0^\circ$, $x = r$, quando $\theta = 180^\circ$, $x = -r = r'$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Componentes do vetor unitário } \vec{u} \\ \longrightarrow \text{Módulos das componentes do vetor } \vec{r} \\ \longrightarrow \text{Componentes do vetor } \vec{p} \end{array}$$

Quando a força é central, o momento angular relativo ao centro é constante.

Retornando ao item c da “Resolução Moderna” secção A9.3.1.1, equação de “velocidade de área” equação 1:

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{cte}$$

Como se pode ver da fig. no item b da “Resolução moderna”, \vec{r} é perpendicular a $d\vec{r}$, então $H = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \text{sen } 90^\circ$, \vec{r} e $d\vec{r}$ estão no plano xy , logo \vec{H} será \perp ao plano xy , pois quando:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \text{ é } \perp \text{ ao plano } \vec{A}\vec{B}.$$

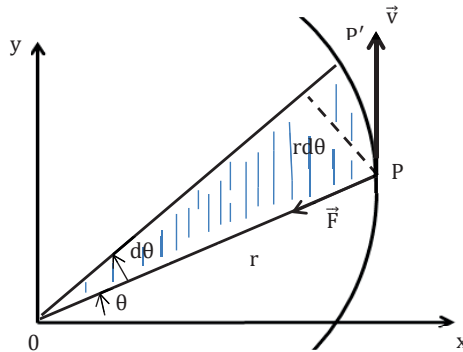
$$\therefore H = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt}. \text{ Também temos que } \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r} = d\theta \text{ da definição de ang. em rad.}^{17}$$

$$\text{Logo: } H = \frac{1}{2} r^2 \frac{dr}{r dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}, \text{ mas velocidade angular: } \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

$$\therefore H = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

$\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r$, onde \vec{v}_θ velocidade tangencial e \vec{v}_r , velocidade radial. Como \vec{v}_r é colinear com \vec{r} , $\vec{r} \times \vec{v}_r = 0$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v}_\theta + \vec{v}_r) = \vec{r} \times \vec{v}_\theta$$



$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} = r^2 \omega$$

¹⁷ No nosso caso, seria ângulo elementar $d\theta$. Ângulo é a relação entre o arco e o raio. Quando $\Delta r \rightarrow 0$, a secante Δr , se torna tangente dr , confundindo-se com o arco elementar.

r varre na unidade de tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte (ver fig.) (1a), veja também equação 0, em "Demonstração elegante", secção A9.1.1.}$$

É a 2ª Lei de Kepler: área varrida no tempo é constante.¹⁸

$$\vec{L} = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt}, \text{ pois } \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}_\theta \quad (2) \quad e \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad L = m r^2 \omega \quad (2a)$$

$\vec{e}_\theta =$ vetor unitário

$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad \vec{e}_r =$ vetor unitário \perp a $\vec{e}_\theta \quad \therefore \vec{e}_\theta \times \vec{e}_r = 1$, componente radial:

$$\vec{L}_r = m v_r \vec{e}_r \times r \vec{e}_r = 0 \quad \therefore \text{nula.}$$

Exemplo: Estimar o momento angular da Terra relativo ao Sol e o de um elétron relativo ao núcleo de um átomo de hidrogênio, no raio mínimo da órbita eletrônica.

Massa da Terra: $5,98 \times 10^{24} \text{kg}$

Distância média do Sol: $1,49 \times 10^{11} \text{m}$

Período de revolução da Terra em torno do Sol é: $3,16 \times 10^7 \text{seg}$ (1 ano)

Velocidade angular média da Terra: $\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{3,16 \times 10^7 \text{seg}} = 1,98 \times 10^{-7} \text{seg}^{-1}$

Momento angular da Terra relativo ao Sol:

$$\begin{aligned} L &= m r^2 \omega = (5,98 \times 10^{24} \text{kg})(1,49 \times 10^{11} \text{m})^2 (1,98 \times 10^{-7} \text{seg}^{-1}) \\ &= 2,67 \times 10^{40} \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} \end{aligned}$$

Momento angular do elétron no átomo de hidrogênio:

$$\begin{aligned} L &= m r^2 \omega = (9,11 \times 10^{-31} \text{kg})(5,29 \times 10^{-11} \text{m})^2 (4,13 \times 10^{16} \text{s}^{-1}) \\ &= 1,05 \times 10^{-34} \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} \end{aligned}$$

Multiplicando por 2π , obtemos a constante de Planck h:

$$h = 2\pi \times 1,05 \times 10^{-34} = 6,62 \times 10^{-34} \text{kg m}^2/\text{s} = 6,62 \times 10^{-27} \text{erg seg}$$

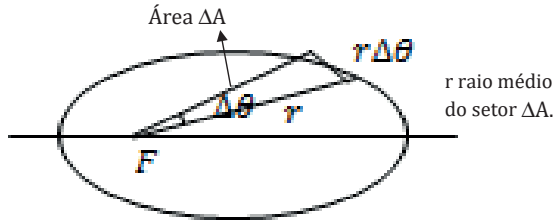
Calculado para o raio mínimo da órbita eletrônica.

O valor de L do elétron no átomo de hidrogênio é chamado de \hbar (agá cortado)¹⁹

$$L = n \hbar = n \frac{h}{2\pi} \quad (3)$$

¹⁸ O planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

¹⁹ Recordar nas equações 0a e 0b da "Teoria atômica de Bohr," secção A6.3. Quando falamos de quantidade de movimento angular $L = n \hbar / 2\pi$, relacionado com a constante de Planck; \hbar com $n = 1$, é o menor valor possível de energia, chamado "estado fundamental".



r é o raio da menor órbita possível para o Hidrogênio.

$h = 2\pi \hbar$ constante de Planck

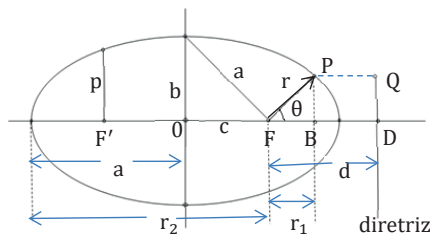
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ Momento angular é conservado

2ª Lei de Kepler é equivalente à lei da conservação do momento angular.

Momento angular é constante: $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ ou $r^2 d\theta = \frac{L}{m} dt$

A9.5 DEDUÇÃO ALGÉBRICA DA 3ª LEI DE KEPLER



Excentricidade: $\varepsilon = \frac{PF}{PQ}$

$PF = r$, raio vetor, distância ao foco F

$FD = d$, distancia do foco F à diretriz

$PQ = FD - FB$, como $FB = r \cos \theta$

$$\therefore \varepsilon = r / (d - r \cos \theta) \Rightarrow \varepsilon d - \varepsilon r \cos \theta = r$$

$$\varepsilon r \cos \theta + r = \varepsilon d \Rightarrow \frac{\varepsilon d}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (1)$$

$$\text{Quando } \theta = 90^\circ, \cos 90^\circ = 0 \quad \therefore \varepsilon d = r = p \Rightarrow \varepsilon d = p \quad (2)$$

$$\text{Quando } \theta = 0^\circ, \cos 0^\circ = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon} \text{ e quando } \theta = \pi, \cos \pi = -1 \Rightarrow r_2 = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}$$

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = \frac{\varepsilon d}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} \Rightarrow a = \frac{\varepsilon d}{(1-\varepsilon^2)} \quad (3)$$

$$c = a - r_1 = \frac{\varepsilon d}{(1-\varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon d}{(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon d(1-1+\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} \Rightarrow c = \frac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}, \text{ introduzindo 3: } c = \varepsilon a \quad (3a)$$

A Energia conservada, isto é, é constante, e igual à energia cinética mais energia potencial:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r), \text{ a energia potencial é função de } r.$$

A velocidade se compõe de uma componente radial e outra, tangencial, a tangencial é:

$$v_\theta = \omega r, \text{ onde } \omega, \text{ velocidade angular.}$$

$$\therefore \text{utilizando o teorema de Pitágoras: } v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

A quantidade de movimento angular é constante:

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \Rightarrow r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{(m r)^2} \quad (4)$$

$$\therefore v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{(m r)^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r) \Rightarrow E - E_p(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2}$$

$$\text{Como: } \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2} = \omega = \text{velocidade angular} \Rightarrow \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\theta}\right)\right]^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \frac{2}{m} \left\{E - E_p(r) - \frac{L^2}{2 m r^2}\right\}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left\{\frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}\right\} \quad (5)$$

$$\text{Derivando 1 em } \theta: -\frac{\varepsilon d}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sin \theta \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{d^2}, \text{ substituindo em 5:}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{d^2 m^2}{L^2} \left\{\frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}\right\} \quad (6) \quad \text{Da equação 1: } \cos \theta = d/r - 1/\varepsilon$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2}, \text{ substituindo em 6, resulta:}$$

$1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{2d^2 m E}{L^2} - \frac{2d^2 m E_p(r)}{L^2} - \frac{d^2}{r^2}$. Eliminando $\frac{d^2}{r^2}$, igualando os termos constantes e os que dependem de r , E é conservado, não depende de r , mas $E_p(r)$ varia, depende de r . Separando os termos constantes dos variáveis, se obtém:

$$\frac{2d^2 m E}{L^2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow E = \frac{L^2}{2d^2 m} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad (6a)$$

$$-\frac{2d^2mE_p(r)}{L^2} = \frac{2d}{\epsilon r} \Rightarrow E_p(r) = -\frac{L^2}{m\epsilon r} \quad (7)$$

Da secção 4.7, Energia Potencial Gravitacional, equação 2: $E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$, substituindo em 7: $\frac{L^2}{m\epsilon r} = \gamma \frac{mm'}{r} \Rightarrow L^2 = \gamma m^2 m' \epsilon d$, introduzindo a equação 3: $\epsilon d = a(1 - \epsilon^2)$, obtemos:

$L^2 = \gamma m^2 m' a(1 - \epsilon^2)$ (7a). Retomando a equação 4: $r^2 d\theta = \frac{L}{m} dt$. Da equação 1b do Momento angular secção A9.4, verificamos que: $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ é a área elementar do Setor da elipse, ver figura, integrando entre 0 e 2π , encontramos a área da elipse:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{L}{2m} \int_0^P dt = \frac{LP}{2m} \quad (8), P \text{ é o período.}$$

Observando a figura acima, da elipse, vemos como resolução de um triângulo retângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2, \text{ introduzindo a equação 3a:}$$

$b^2 = a^2 - a^2 \epsilon^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) \Rightarrow$ Recorde-se: $b^2/a = p$, equação 1 da secção A9.4, Momento angular.

Sabemos da Geometria que a Área da elipse é: $S = \pi ab$ ²⁰ (8a)

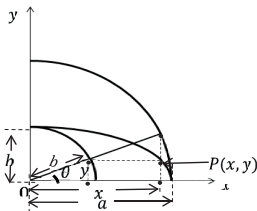
$$\therefore S = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (9)$$

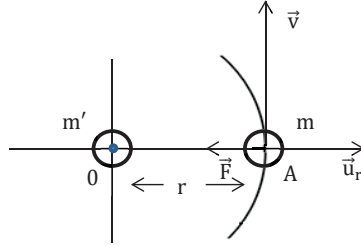
Igualando 8 com 9: $\pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = L^2 P^2 / 4m^2$, introduzindo 7a: $\pi^2 a^3 = \frac{1}{4} \gamma m' P^2$

$\therefore P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} a^3$ (10), 3ª Lei de Kepler: O quadrado do Período é proporcional ao cubo do eixo maior. Essa fórmula concorda com a da órbita circular, deduzida na secção 4.6, equação 1.

²⁰ Também em Cálculo integral: $x = a \cos \phi, y = b \sin \phi, dx = -a \sin \phi d\phi$.

Quando $x = 0, \phi = 1/2 \pi$ e $x = a, \phi = 0, \overset{\text{área}/4}{=} = \int_0^a y dx = -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \phi d\phi, \int \sin^2 \phi d\phi = 1/2 (\phi - 1/2 \sin 2\phi) + C$
 $= -[1/2 (\phi - \sin \phi \cos \phi)]_{\pi/2}^0 ab = \left[\frac{1 \pi}{2} \right] ab = \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow \text{Área} = \pi ab$





Ref.: Alonso – Finn

Os quadrados dos períodos de revolução são proporcionais aos cubos das distâncias médias do Sol aos planetas: $P^2 = kr_{med}^3$ onde k é uma constante de proporcionalidade.

Há uma maneira mais fácil de deduzir a fórmula:

Da 2ª Lei e Gravitação Universal secção A9.3, no cálculo da massa do Sol, equação 1, temos: $\omega^2 = G \frac{M}{r^3}$

Em nosso caso $\omega =$ velocidade angular: $\omega = \frac{2\pi}{P}$, equação 3c da secção 2.1.3, MHS.

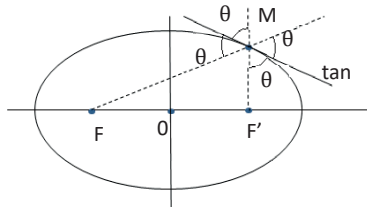
G é γ , constante gravitacional: $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ dina.cm}^2/\text{g}^2$

M é m': massa do Sol

r, raio médio proporcional a “a”.

Substituindo: $\frac{(2\pi)^2}{P^2} = G \frac{M}{r^3} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$, semelhante à fórmula acima.²¹

Como vimos na eq.2, Secção.4.6, Newton testou a validade da lei da gravidade aplicando-a na Lua orbitando a Terra.



²¹ A fórmula $P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} a^3$ é mais geral, pois foi deduzida levando em conta a área da elipse. A fórmula $P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} r^3$ se adapta melhor quando a órbita for praticamente circular como, por exemplo, a da Terra e a da Lua.

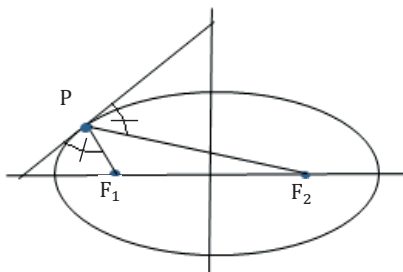
Complementando as características da Elipse: a tangente é a bissetriz das duas semirretas MF e MF'

\therefore os 4 ângulos θ são iguais.

A tangente é uma bissetriz, isto é, divide o ângulo em 2 partes iguais.

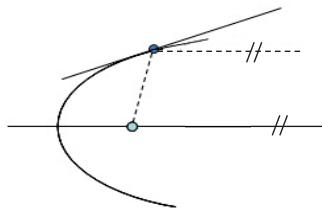
Ref.: Larousse e FIC

Em consequência, um raio de luz partindo do foco F , refletindo-se na tangente, atingirá o foco F' e vice versa.



“Na Casa Branca, existe o famoso salão oval, que tem a forma de uma elipse. Em salões assim, se você coloca uma pessoa num dos focos da elipse e outra no outro foco, as duas se ouvem mesmo que falem em voz baixa. Isso se deve a uma propriedade das elipses”. Essa propriedade funciona assim: caso se trace uma linha reta de um dos focos da elipse até um dos pontos na curva da elipse, meça o ângulo entre essa linha e a reta tangente, a linha refletida passará pelo outro foco, como mostra a figura. “A catedral metropolitana de Brasília também é assim”. Para quem não sabe matemática, a ampliação da voz talvez pareça sobrenatural. Para quem sabe, o mecanismo se revela visível – as ondas sonoras emitidas num dos focos viajam em todas as direções, mas batem nas paredes e vão para o outro foco.

Também, como consequência, sabendo que a parábola, sendo um caso particular de elipse na qual um dos focos vai para o infinito, nesse caso, para que o raio de luz atinja o outro foco, ele se torna paralelo ao eixo da parábola. Essa propriedade é utilizada, por exemplo, nos faróis de automóvel para refletir os raios de luz da lâmpada colocada no foco, dirigindo a luz paralelamente ao eixo do refletor parabólico.



Ref.: FIC e Sist Consulta Interativa

Recorde-se a definição de 2 retas paralelas: São aquelas que não têm ponto em comum (Euclides). Modernamente diríamos que são aquelas que se encontram no infinito (Gauss e Riemann).

A esse propósito devemos dizer que a ideia de infinito se deve ao matemático hindu Bhaskara (nascido em 1114) que descobriu considerando uma laranja, dividindo-a ao meio, temos 2 pedaços, depois em 3 e etc... Dividindo-a indefinidamente, obtemos infinitos pedaços. Portanto, qualquer número dividido por 0 dá, ∞ , exceto o $\frac{0}{0}$ que é indeterminado.

Aliás, a ideia do zero, isto é, vazio, está vinculada à teologia hindu que a venera.

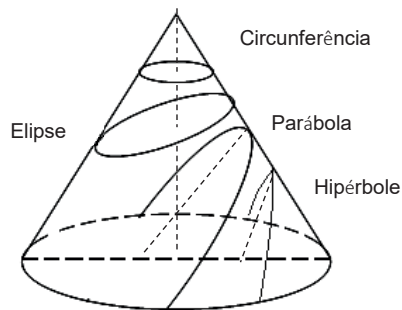
Os hindus foram os primeiros a simbolizar o vazio, adicionando aos números chamados hindus - arábicos. Nem gregos, egípcios ou mesopotâmicos tinham um símbolo para o vazio. Quanto menor o pedaço de laranja mais se aproxima de nenhuma laranja. Bhaskara descobriu a resolução da equação de 2º grau.

A9.6 UMA PEQUENA ETIMOLOGIA E FILOGIA DAS CÔNICAS

Antes um breve histórico. O primeiro a tratar da questão foi Menecmo (meados do séc. 4º a. C.). Considerou as curvas que se obtêm cortando um cone circular reto com um plano perpendicular à geratriz. Conforme a abertura do cone se obtêm três tipos de curvas: se o ângulo no vértice do cone for reto, a secção será uma “parábola”, cujo significado em grego é superposição, ou seja, igual ao plano paralelo à geratriz; se o ângulo for agudo, se obtêm uma “elipse”, que significa plano “aquém de”; e se o ângulo for obtuso, será uma “hipérbole”, significando que o plano situa-se “além de”, isto é, com relação ao plano perpendicular à geratriz.

No início do séc. 3º a. C., Aristeu e Euclides sistematizaram as cônicas, embora a hipérbole de 2 ramos ainda não tivesse sido reconhecida.

A seguir Arquimedes (287 a 212 a. C.), após Euclides é uma referência importante, antes de Apolônio de Perga (262 a 190 a. C.).



Apolônio escreveu oito livros intitulados “Cônicas”, dos quais os 4 primeiros se tornariam referência. As inovações de Apolônio condenaram ao esquecimento os escritos anteriores.

Apolônio fez importantes alterações. Em lugar de variar a abertura do ângulo do cone, determinou como fazemos hoje em dia, as curvas que se obtém modificando o ângulo do plano secante a um cone reto. Quando o plano for perpendicular ao eixo do cone, obtemos um círculo. Quando for paralelo à geratriz, parábola. Se o plano for entre o da circunferência e o da parábola, se obtém elipse; e se for entre o da geratriz e o eixo do cone, hipérbole. Ver fig. Anexa. No caso da hipérbole, o plano corta as 2 folhas do cone. Ou melhor: \perp ao eixo, circunferência; inclinado, mas entre o eixo e a geratriz, aquém da geratriz, Elipse; // à geratriz, Parábola e além da geratriz, Hipérbole.²²

Ref.: Scientific American, Sist de consulta interativa, FIC.

A9.7 GÊNESE DA FORÇA

Partindo do conceito de energia

A energia de um sistema pode ser representada como a soma de 2 parcelas: energia cinética, que depende da velocidade e energia potencial²³, que depende das coordenadas, ou seja, da posição.

$$E = E_k + E_p \quad E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad E_p = f(x, y, z) = m\phi$$

Ref.: Landau em Mecânica

Expressando a gravitação²⁴ \vec{g} como: $\vec{g} = -grad\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \vec{e}_i$ (1), onde ϕ é o potencial gravitacional, que é a energia potencial E_p por unidade de massa. (ver Observação na página seguinte)

Verificamos semelhanças formais com o Campo eletromagnético:

Tomando-se ρ como densidade de carga elétrica e \vec{E} , campo elétrico: $\vec{E} = -grad\phi$, onde ϕ é o potencial elétrico escalar. No campo eletromagnético se obtém: $\phi = \int \frac{\rho dV}{r}$ ²⁵ onde r é a distância do elemento de volume dV ao ponto de observação do Campo.

Por semelhança teremos no Campo gravitacional: $\phi = \gamma \int \frac{\rho dV}{r}$

Ou para massa m : $\phi = \gamma \frac{m}{r}$ (ver seção 5.15, Ex. ilustrativo, Secção 4a: $u = k \frac{m}{r}$, potencial)

Como $\vec{g} = -grad\phi$, teremos: $F = m' \frac{\partial\phi}{\partial r}$, pela 2ª lei de Newton: $F = ma$, desde que $g = a$ e m' é a massa onde a gravitação está agindo.

Daqui obtemos: $F = -\gamma \frac{mm'}{r^2}$, que é a lei da gravitação de Newton.

²² Isto é, função da posição em relação à geratriz e ao eixo do cone.

²³ Ver secção 4.7, equação 2a, secção 4.8, eq. 1 e anexo 3, eq.1

²⁴ Aceleração gravitacional

²⁵ Ver secção 5.17.1, eq. 1 onde o potencial é $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ e $\vec{E} = -gradV$ secção 5.17.1, eq. 1a $dQ = \rho dV$ carga elementar, $4\pi\epsilon_0$ é a constante de proporcionalidade utilizada no sistema MKS.

Para mais informações, ver secção 4.6, eq.0.

Ref.: Landau em Teoria do Campo, Jun' ichi, Max Born, Rainich

Para simplificar, notamos da secção 4.8, eq. 0 que se: $\vec{F} = -grad E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r$

Então se tomarmos: $E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$, da secção 4.7, eq. 2 obtemos: $F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$

Outras semelhanças que podemos verificar:

A lei de Coulomb: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}$ é também uma lei do inverso do quadrado de r e em lugar da massa m , temos a carga eléctrica Q .

Acima está no Sistema MKS, no Sistema cgs seria: $F = \frac{QQ'}{r^2}$

O Campo eléctrico: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{F}{Q'}$ compare com: $g = \frac{F}{m}$

O Potencial: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$,²⁶ compare com: $\varphi = \gamma \frac{m}{r}$

Equação de Poisson: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, compare com: $\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho$, onde: $\Delta\varphi$ é o laplaciano de φ : $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

A9.7.1 Observação

Tomando o potencial: $\varphi = \gamma \frac{m}{r}$ e derivando, obtemos: $g = -\gamma \frac{m}{r^2} = \frac{F}{m'}$ pois $F = -\gamma \frac{mm'}{r^2}$

$$\therefore \vec{g} = -grad \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{u}_r$$

O potencial gravitacional: $\varphi = \frac{E_p}{m}$ é energia potencial por unidade de massa.

Do anexo A 3, eq. 1a podemos tirar:

Tomando a equação diferencial: $dE = Fdx$

Daqui concluímos: $F = \frac{dE}{dx}$ que é o gradiente da Energia E , na direcção x .

Tomando-se: $mgh_2 - mgh_1 = -\Delta E_p$, conforme anexo 3, eq.1, variação da energia potencial, $E_p = mgh$, dividindo por m , obtemos o potencial: $\varphi = -\frac{E_p}{m} = -gh$ e dividindo por h , obtemos: $g = -\frac{\varphi}{h}$, pois $grad \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_x$

De fato: $\Delta E_p = -\Delta(mgh) \Leftrightarrow \frac{\Delta E_p}{m} = -\Delta(gh) \Leftrightarrow \Delta\varphi = -\Delta(gh)$ ²⁷

²⁶ Ver secção 5.17a, eq. 1

²⁷ Note bem: Como $\Delta E_p = -\Delta(mgh) \Leftrightarrow -\frac{\Delta\varphi}{\Delta(gh)} = 1$, logo: $-\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial h} = 1 \quad \therefore g \times 1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial h}$
 $\Delta\varphi = \Delta E_p / m$

$$\therefore \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta(gh)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial h}$$

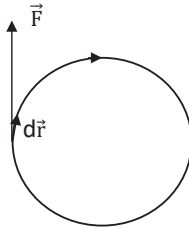
pois g é constante, pontualmente falando, isto é, para uma determinada altura h (g depende de h).

Logo:

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} \vec{u}_h, \text{ confirmando o que dissemos inicialmente, pois nesse caso, } h = x.$$

Observe que: m , massa, $F = mg$, conforme 2ª lei de Newton e $W = -mgh$, trabalho para produzir a energia potencial $E_p = -W$. (ver anexo 3).

A9.8 CIRCULAÇÃO, TRABALHO, ENERGIA POTENCIAL, GRADIENTE DE E_p , FUNÇÃO PRIMITIVA DE \vec{F}



Seja um processo realizado por um ciclo fechado, que volta ao estado inicial. O trabalho W , realizado durante o ciclo será expresso como (ver anexo A4, indicação 2a, em “Energia Interna”):

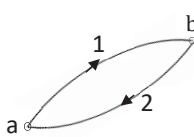
$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esse trabalho está relacionado com a energia potencial:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

A integral é denominada Circulação e denotada: $\Gamma = W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Nesse caso como vimos no anexo A4, eq.2b:



$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b dE_p = -(E_{pb} - E_{pa}) = E_{pa} - E_{pb}$$

Como:

$$W = \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \therefore \int_1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Então o trabalho entre “a” e “b” não depende do caminho percorrido. A diferencial dE_p é denominada “diferencial exata”.

Também, da integral acima, obtemos:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i} \vec{e}_i = -\text{grad}E_p, \text{ pois } dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Matematicamente podemos dizer da integral:

$$E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}, E_p \text{ será denominada função primitiva de } \vec{F}.^{28}$$

Ref.: Alonso – Finn, Shames, Courant.

Também temos: $\int p dx = S + C$, logo a ação S é uma função primitiva da quantidade de movimento p , ver anexo A 3.

Mas: $dp = mdv = Fdt$, ver anexo 3, integrando: $p = \int mdv + C_1 = \int Fdt + C_2$, logo a quantidade de movimento p é uma função primitiva, seja da massa m , como também da força F . Sabemos da Relatividade que a massa m pode ser determinada em função da velocidade v como: $m = \gamma m_0$, onde $m_0 =$ massa de repouso, isto é, quando $v = 0$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sendo $\beta = v/c$ e $c =$ velocidade da luz, ver par 7.4.

Por outro lado, derivando a expressão acima em t , obtemos: $F = \frac{dp}{dt}$, concordando com a 2ª Lei de Newton, ver par. 4.3.

Exemplos de Ciclos fechados: órbitas planetárias, órbitas de cometas, Ciclos de vapor, Otto e Diesel. Somente ressaltamos que esses ciclos não sendo reversíveis não obedecem exatamente o que vimos acima. Os ciclos astronômicos não são idealmente fechados de vez que o periélio avança, como veremos no livro 2 e os ciclos termodinâmicos têm perdas que devem ser consideradas como vimos nas equações 1 e 2 do anexo 5, seção A5.1.6.

Além disso, o Sol não está parado, mas em translação pela Galáxia da Via Láctea, fazendo que as órbitas dos planetas e cometas não sejam fechadas, mas sim helicoidais. Também os ciclos termodinâmicos têm perdas e para torna-las fechadas é necessário reposição de energia das perdas fazendo que a entropia desses sistemas cresça sempre (ver equações 1 e 2 do anexo 5). (Desigualdade de Clausius), seção A5.1.6

A9.8.1 Exemplo de aplicação da fórmula

$$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3, \text{ 3ª lei de Kepler.}$$

O cometa de Halley tem um período P de 76 anos e em 1986 teve uma distância de máxima proximidade ao Sol, chamada “periélio R_p ” de $8,9 \times 10^{10}m$. Esta distância está entre as órbitas de Mercúrio e Vênus.

- a) Qual é o valor de R_a , maior distância do cometa ao Sol, chamada “afélio”?

$$G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 / kg s^2$$

²⁸ Ou melhor, levando em conta a integral indefinida: $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p + C$, cuja derivada em relação à \vec{r} é: $\frac{d}{d\vec{r}}(E_p + C) = \vec{F}(\vec{r})$, sendo C uma constante.

Solução: semieixo maior da órbita $a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30} \times 2,4^2 \times 10^{18}}{4 \times 3,1416^2}\right)^{1/3}$

Massa do Sol: $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, período: $76 \text{ anos} = 2,4 \times 10^9 \text{ s}$

Se deduz: $a = 2,69 \times 10^{12} \text{ m}$

Como: $e = \frac{c}{a}$, $R_p = a - ae$, $R_a = a + ae$

Somando, obtemos:

$$R_a = 2a - R_p = (2)(2,69 \times 10^{12} \text{ m}) - 8,9 \times 10^{10} \text{ m} = 5,3 \times 10^{12} \text{ m}$$

É ligeiramente menos que o semieixo maior da órbita de Plutão.

b) Qual a excentricidade e da órbita?

Solução: Subtraindo R_a e R_p

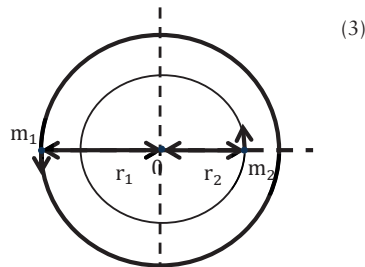
$$e = \frac{R_a - R_p}{2a} = \frac{5,3 \times 10^{12} \text{ m} - 8,9 \times 10^{10} \text{ m}}{(2)(2,7 \times 10^{12} \text{ m})} = 0,976, \text{ o Periélio fica próximo do Sol e o Afélio muito afastado.}$$

Excentricidade próxima da unidade. É uma elipse bastante alongada.

Referência: Halliday, Resnick e Walker, v.2

A9.8.2 Outro exemplo

Observando-se a luz de uma estrela houve indícios de se tratar de um sistema binário (de 2 estrelas). A estrela visível tem uma velocidade orbital de $v = 270 \text{ km/s}$, período orbital $P = 1,7 \text{ dias}$ e massa $m_1 = 6M_S$,²⁹ onde M_S é a massa do Sol: $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$. Supondo que a estrela visível e sua companheira, que é escura, estejam em órbitas circulares, determine a massa aproximada m_2 da estrela escura.



²⁹ A massa pode ser calculada pelo efeito Doppler de sua radiação. Vide Landau, $\Delta \omega = \omega(\varphi_1 - \varphi_2)/c^2$, $\omega = \text{frequência angular} = 2\pi/P$ e $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$, $\dot{\varphi} = \text{grad } \varphi$, $\varphi = \text{potencial gravitacional}$, $\varphi = -km/r$. Onde $k = G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{gs}^2)$, constante gravitacional. Ver secção 2.1, MHS, eq. 3c $\omega = 2\pi\dot{\varphi}$ $\dot{\varphi} = \text{frequência}$ φ_1 e φ_2 são os potenciais gravitacionais respectivamente no ponto de emissão e no ponto de observação do espectro. É o fenômeno denominado “Desvio para o Vermelho” (“Red Shift”).

Solução: O centro de massa das 2 estrelas está na linha que conecta os seus centros (ver figura 3). Sendo $r = r_1 + r_2$, a separação máxima entre as estrelas.

Força gravitacional ocasionada pela companheira escura sobre a estrela visível: $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

Pela 2ª lei de Newton: $F = ma$, se obtém $\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2r_1)$ (3a), sendo ω a velocidade angular da estrela visível e ω^2r_1 , sua aceleração centrípeta na direção de O . Ver equação 3a1, seção 2.1.

Obtemos outra equação para calcular a posição do centro de massa O , ver equação 3a1 Seção 2.1.

$$r_1 = \frac{m_2r}{m_1+m_2} \quad ^{30}, \text{ vide em: par. 4.7, Observações sobre massa reduzida, o que implica em: } r = r_1 \frac{m_1+m_2}{m_2}$$

Introduzindo r na equação (3a) e o valor de $\omega = 2\pi/P$, ficamos com:

$$\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GP^2} r_1^3 \quad (3b)$$

Sobram 2 incógnitas, m_2 e r_1 . Tomando-se o período orbital P e relacionando com o movimento orbital da estrela visível: $P = \frac{2\pi r_1}{v}$

$$\therefore r_1 = \frac{Pv}{2\pi}$$

substituindo $m_1 = 6M_S$ em (3b), resulta:

$$\frac{m_2^3}{(6M_S+m_2)^2} = \frac{Pv^3}{2\pi G} = \frac{(2,7 \times 10^5 \text{ m/s})^3 (1,7 \text{ dias})^{(86400 \text{ s/dia})}}{(2\pi)(6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2)} = 6,9 \times 10^{30} \text{ kg} \quad \text{ou}$$

$\frac{m_2^3}{(6M_S+m_2)^2} = 3,47 M_S$ (3c), podemos resolver a equação de 3º grau em m_2 , mas como estamos trabalhando com massas aproximadas, podemos substituir por múltiplos inteiros de M_S para m_2 , encontrando: $m_2 \cong 9M_S$.

Para maior exatidão, procedemos como a seguir:

Tomando a equação 3c, organizamos a tabela abaixo:

$m_2 = nM_S$ n	$\frac{m_2^3}{(6M_S+m_2)^2} = pM_S$	$3,47/p$	Erro %
9,00	3,24 M_S	1,07	7
10,00	3,91 M_S	$1/1,13$	-13
9,30	3,44 M_S	1,01	1
9,40	3,50 M_S	$1/1,01$	-1
9,35	3,47 M_S	1,00	0

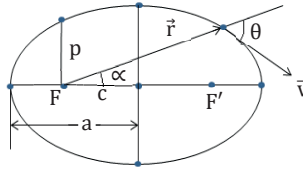
Logo, um valor mais preciso, seria: $m_2 = 9,35M_S$

³⁰ Aplica-se a fórmula: $x = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$, que é uma média ponderada de x_1 e x_2 , onde os pesos são representados pelas massas.

Fazendo, a origem do sistema de coordenadas, passar por m_1 , teremos: $x_1 = 0$, $x_2 = r_1 + r_2 = r$ e $x = r_1$, obtemos: $r_1 = \frac{m_1(0)+m_2(r)}{m_1+m_2} = \frac{m_2r}{m_1+m_2}$.

Pergunta-se: como se obteve a velocidade orbital v e o período P ?

Como explicado pelo efeito Doppler que foi dado no rodapé da página inicial desse exemplo, quando se suspeita que a estrela tem uma companheira, observa-se que a estrela tem uma variação cíclica (que se repete em tempos iguais) no seu espectro característico, significando que determinada frequência se repete ciclicamente. Isto significa que a estrela está orbitando em torno de um centro comum de uma companheira com um período P . Conhecendo P e a massa m da estrela, determina-se o semieixo a da órbita elíptica ou raio r , se for circular, com a 3ª Lei de Kepler: $P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$, a seguir calculamos a velocidade tangencial \vec{v} da órbita da estrela. Se a velocidade for constante em toda a trajetória: temos uma órbita circular, se houver dois trechos mais rápidos entremeados com dois trechos mais lentos, conclui-se que a órbita é elíptica. Para calcular a velocidade \vec{v} , empregamos a 2ª Lei de Kepler:



O Astro descreve Áreas iguais em tempos iguais.

$$\frac{dA}{dt} = cte, \text{ isto é, a velocidade de área}$$

$$\vec{H} = 1/2 \vec{r} \times d\vec{r}/dt \quad 31$$

$$\vec{H} = 1/2 \vec{r} \times \vec{v} = 1/2 rv \text{ sen}\theta, \text{ onde } \theta = \text{ângulo entre } \vec{r} \text{ e } \vec{v}.$$

$$\vec{H} \text{ é cte} \quad \therefore v = \frac{2cte}{r \text{ sen}\theta}, \text{ para órbita circular:}$$

$$v = 2\pi r/P.$$

Veja Tyson e Goldsmith em Origens, livro editado recentemente.

$$\text{Equação polar da elipse: } r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos\alpha} = \frac{p}{1-e \cos\alpha}, \quad e = \frac{c}{a} \text{ excentricidade}$$

Os dados se referem ao Sistema LMCX - 3 da Grande Nuvem de Magalhães. Com outros dados, sabemos que a estrela escura é muito compacta. Pode ser uma estrela que colapsou por sua própria atração gravitacional, tornando-se uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Como uma estrela de nêutrons não pode ter massa maior do que cerca de $2M_S$, o resultado $m_2 \cong 9M_S$ sugere que o objeto escuro deve ser um buraco negro.

³¹ $dA/dt = |\vec{H}| = \pi ab/P = cte$, $A = \pi ab$, Área da elipse e $P =$ período.

A9.9 LEI DE TITUS – BODE

Relação empírica que fornece aproximadamente as distâncias médias dos principais planetas ao Sol. Descoberta em 1741 pelo astrônomo alemão Wolf, retomada por D. Titius e publicada por Bode em 1772. Tomando como unidade a distância da Terra ao Sol, as outras distâncias são obtidas com a série geométrica: 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 ... (razão $q = 2$), soma-se 4 a cada termo e se divide por 10: $0 + 4$; $3 + 4$; $6 + 4$; $12 + 4$; $24 + 4$; $48 + 4$; $96 + 4$; $192 + 4$...³². Havia uma lacuna em $24 + 4$, entre Marte e Júpiter e Bode previu a existência de planeta nessa região, quando se descobriu o planetóide Ceres, para satisfação de Johann Elert Bode (1747-1826 foi diretor do Observatório de Berlim, autor de um catálogo de Estrelas em 1801).

De acordo com Fritz Kahn, temos diante de nós um “modelo atômico” com uma escala de Balmer, faltando um Bohr para decifrá-la e demonstrar que o Sistema solar é um átomo cósmico. Os planetas devem estar nos pontos, segundo a lei dos “quanta”, sendo nodos em que as massas vibrantes se condensam em planetas e luas, conforme a “lei estabelecida”.

Referência: Larousse, R. Thiel, F. Kahn.

³² Compare-se com: $3,9/7,2 / 10,0/15,2 / 26,5/52,0 / 95,4/192,0 / 307,0$; respectivamente: Mercúrio, Vênus, Terra, Planetóides, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno.

A10.1 TEOREMA DE ARQUIMEDES E SUPERFÍCIE DA ESFERA CONFORME ARQUIMEDES

A10.1.1 A Superfície da esfera conforme Arquimedes

A10.1.1.1 Histórico

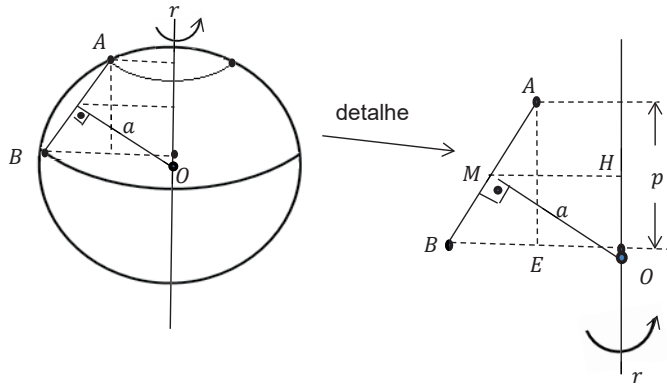
Devemos à Grécia antiga um legado cultural para a civilização ocidental que deu origem à ciência como a compreendemos hoje. A ciência se separou da religião. A astronomia marginalizou a Astrologia. O domínio era antes da razão que da intuição. As explicações acerca do funcionamento do mundo eram então apoiadas em evidências, não mais na religião, na superstição ou em contos de fadas. Introduziu-se a prova na matemática. Os teoremas substituíram o procedimento habitual. As regras e as leis eram derivadas do estudo dos fenômenos naturais.

O teorema de Pitágoras tem o seu nome porque ele foi o primeiro a “prová-lo”. Os gregos continuavam a acreditar nos deuses, mas, desse ponto em diante, o comportamento divino passou a estar sujeito aos limites da razão. Pitágoras foi além declarando que o mundo fatalmente se comportaria segundo um modelo matemático. Ele foi o primeiro a dizê-lo no séc. VI a.C. e nós ainda cremos em sua afirmação. Pitágoras pode ter instituído a visão matemática do mundo, mas a visão científica grega foi estabelecida pelo filósofo Aristóteles. Essas personalidades foram consideradas filósofos em sua época. A ciência era parte da filosofia, que em grego antigo significa “amor à sabedoria”. Posteriormente a ciência veio a ser conhecida como filosofia da natureza. A palavra matemática, usada pela 1ª vez por Pitágoras, veio do grego “mathema”, que queria dizer “aquilo que se aprende” ou ciência. Somente no milênio seguinte, as palavras filosofia, matemática e ciência gradualmente desenvolveram os significados independentes que hoje possuem.

Pitágoras (565 a. C. – 490 a. C.) é considerado Pioneiro da Matemática pela sua grande e valiosa contribuição a essa ciência.

Referência: Strathern em Arquimedes

Arquimedes (287-212 a.C.) pode ser considerado pioneiro em Física por seu princípio: todo corpo imerso em água sofre um empuxo de baixo para cima igual ao peso da água deslocada. O princípio é válido para qualquer fluido, inclusive para ar, por exemplo, com balões flutuando no ar. É um princípio básico em hidrostática muito utilizado em navios e submarinos. Também são importantes os desenvolvimentos em alavancas e roldanas.



O segmento AB gira em torno do eixo r gerando um tronco de cone. A superfície gerada é a superfície lateral do tronco do cone:

$$S = 2\pi R_m(AB)$$

$$R_m = \text{raio médio} = HM$$

Os triângulos ABE e OHM são semelhantes, logo: $\frac{AB}{MO} = \frac{p}{R_m} \quad \therefore (AB)R_m = p(MO)$

$MO = a = \text{apótema} \quad \therefore S = 2\pi a p$, é o Teorema de Arquimedes.

Se subdividirmos a circunferência em diversas cordas, tornando AB tão pequeno a ponto de se confundir com a tangente, o apótema a se torna o raio R da circunferência:

$\therefore S = 2\pi R p$. Quando $p = 2R$, temos o diâmetro, e a superfície se torna a da esfera:

$$S = 2\pi R \times 2R \Rightarrow S = 4\pi R^2$$

Referência: Bezerra e F.I.C.

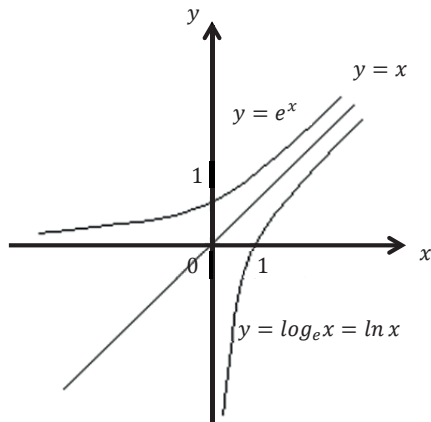
Conhecendo a superfície da esfera, podemos calcular seu volume, integrando S com relação a r , entre 0 e R :⁽¹⁾

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S dr = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

¹ Como se fossem "camadas de uma cebola", cuja superfície S seria: $S = 4\pi r^2$, com espessura dr .

Para traçar a função inversa, achamos o espelho dessa função em relação à reta $y = x$.

Por exemplo: função exponencial e sua inversa função logarítmica.



Referência: Aulas de Cálculo Matemática Superior da Univesp, Univ. Virtual do Estado de SP

A11.1 O PAPEL DA TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE NA FÍSICA ATÔMICA E NUCLEAR

A segunda grande teoria da Física do século XX, indispensável ao desenvolvimento da Física atômica e nuclear, é a Teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein em 1905.

A11.1.1 Fracasso da Física clássica para descrever os fenômenos atômicos

Em 1913, já se sabia que o átomo consistia de um núcleo carregado positivamente com raio de cerca de 10^{-12} cm, rodeado por elétrons distribuídos em um volume de aproximadamente 10^{-8} cm de raio. A carga é Z , e sendo Z um inteiro positivo e “ e ” a grandeza da carga eletrônica. O número de elétrons também é Z , e o átomo é eletricamente neutro sob condições normais. O número Z também é o número atômico, que representa a posição do elemento no sistema periódico. Os elementos estão ordenados de acordo com suas propriedades, de forma que estas estão diretamente relacionadas com a carga nuclear e o número de elétrons no átomo. Para descrever isso, um modelo mais detalhado seria necessário e deveria descrever como os elétrons estão dispostos no átomo.

Muitas tentativas foram feitas a fim de construir um modelo atômico teórico com base na Física clássica, isto é, com mecânica newtoniana, eletromagnetismo maxwelliano e termodinâmica, todavia, não foram capazes de explicar ou descrever os fenômenos atômicos.

Exemplo: consideremos um átomo com 2 cargas elementares positivas e 2 elétrons fora do núcleo. Os elétrons estão a uma distância a do núcleo e $2a$ entre si. A força eletrostática repulsiva entre os elétrons é $e^2/4a^2$. Cada elétron seria atraído ao núcleo por uma força igual a $2e^2/a^2$, oito vezes maior que a força repulsiva. Os elétrons cairiam no núcleo. Conclusão: trata-se de um exemplo de que as cargas elétricas não podem estar em equilíbrio, em repouso, sob a ação somente das forças elétricas; o exemplo pode ser estendido a qualquer átomo.

Outro exemplo: considere o átomo de H que tem um elétron e um núcleo com carga positiva. Suponha que o elétron revolva em torno do núcleo em uma órbita de raio a , e que a velocidade do elétron é tal que a força atrativa entre o elétron e o núcleo é contrabalançada pela força centrífuga desenvolvida na translação circular da órbita. O sistema núcleo-elétron seria mecanicamente estável. O elétron, conforme a teoria eletromagnética, sujeito a uma constante aceleração na direção do núcleo, deve irradiar energia. A energia do sistema deve decrescer; o elétron deve descer gradualmente em direção ao núcleo, emitindo irradiação de frequência constantemente crescente e, por fim, cair no núcleo.

Essas previsões da Física clássica estão em desacordo com os fatos experimentais. Sabe-se que os átomos de H, por exemplo, se passar uma descarga elétrica através do gás, a luz resultante (irradiação) emitida pelo elemento é dispersa em um prisma, dando um espectro com linha característica de H, outra para o He, outra para Na etc. Isso não está de acordo com o exemplo acima. A teoria clássica também falha. Mesmo quando consideramos os raios X, também vemos que há desacordo.

Após muitas tentativas, tornou-se aparente que os fenômenos atômicos necessitavam de uma nova espécie de teoria física, que os descrevesse em conceitos não clássicos. A teoria quântica de Bohr da estrutura atômica (desenvolvida em artigos memoráveis escritos entre 1913 e 1915) foi a primeira tentativa bem-sucedida de atender a essas necessidades e, embora se descobrisse que, no fim, fosse insatisfatória, ela preparou o caminho para a teoria da mecânica quântica moderna e bem-sucedida.

A teoria de Bohr foi baseada na teoria quântica de Planck, de 1901, aplicada à luz por Einstein em 1905.

A teoria de Bohr situa-se nos fundamentos das ideias atuais sobre átomos e núcleos. Devemos inicialmente fornecer alguma compreensão das ideias básicas dessa teoria.

A teoria quântica realmente surgiu do fracasso da Física clássica em explicar alguns dos fatos experimentais da radiação térmica. Em particular, a Física clássica não pôde explicar a dependência da intensidade da energia irradiante emitida por uma cavidade¹ no comprimento de onda da radiação. Para explicar esse fenômeno, era necessário desenvolver uma teoria para a emissão de radiação com base em um conceito inteiramente oposto às ideias da Física clássica. O novo conceito, ou seja, o dos *quanta*, os corpúsculos discretos de energia, devem ser aplicados a todos os problemas envolvendo a emissão e absorção de radiação eletromagnética; esses também são problemas da Física atômica e nuclear, e a razão da importância da teoria quântica nesses campos.

As primeiras aplicações da teoria da relatividade encontradas na Física atômica e molecular dependem de duas ideias estreitamente relacionadas. Uma delas é a variação da massa de uma partícula com sua velocidade; a segunda é a da proporcionalidade entre massa e energia. Essa última relação, expressa pela equação $E = mc^2$, atingiu certo grau de notoriedade nos anos recentes, inclusive com proeminência na mídia impressa.

A equação massa-energia é utilizada com frequência na física nuclear, e o seu uso deve ser acompanhado pelo conhecimento da sua origem e significado. Um verdadeiro entendimento da relação somente pode vir com um cuidadoso estudo da teoria da relatividade; isso não impede que alguma familiaridade com as ideias envolvidas na equação massa-energia possam ser obtidas por uma breve discussão dos antecedentes de experiências e teorias que conduziram à relatividade. Essa discussão deve dissipar possíveis “auras mágicas” que envolvam a Teoria da relatividade, e mesmo suas aplicações mais simples devem nos permitir a utilização da massa e energia como quantidades intercambiáveis, sem nos sentirmos desconfortáveis.

¹ Sujeita a uma determinada temperatura. Cavidade denominada “corpo negro”, que não é muito feliz.

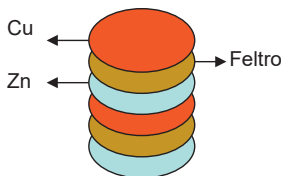
A11.2 EVOLUÇÃO DAS IDEIAS

A hipótese de Planck da quantização da energia deu início à mecânica quântica. No entanto, é necessário afirmar que, com relação à eletricidade, Hermann von Helmholtz (1891-1894, prêmio Nobel em 1903), em palestra sobre as pesquisas de Faraday, afirmou que se aceitarmos a hipótese de que as substâncias elementares são compostas por átomos, não podemos deixar de concluir que também a eletricidade está dividida em porções elementares, as quais se comportam como átomos de eletricidade.

Todas as descobertas que, em geral, levam o nome de um único indivíduo, são o resultado do trabalho de muitas pessoas. Inclusive, das que construíram a história das descobertas praticamente no anonimato. A história da eletrólise é um bom exemplo disso. Vejamos seus antecedentes.

A11.2.1 Pilha de Volta

Em 1800, Alessandro Volta inventou a pilha elétrica. É formada por um disco de Cu (cobre), sobre este um disco de feltro embebido em ácido sulfúrico diluído e após um disco de Zn (zinco), sobre este outro disco de feltro embebido em ácido sulfúrico diluído, depois outro disco de Cu , e assim sucessivamente, formando uma pilha, daí seu nome.



Sabemos que os metais são bons condutores. E quanto à água? Se fizermos passar uma corrente elétrica através de duas placas condutoras imersas na água, obtemos o seguinte resultado: se a água for pura (destilada), sua resistência é tão grande que pode ser considerada isolante. Se dissolvermos um ácido inorgânico, sal ou base na água, esta se torna condutora. Nesta condição, chamamos à solução formada de eletrólito.

Como o feltro da pilha está embebido em ácido sulfúrico, este se torna condutor.

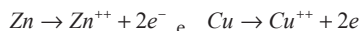
Na época, não se conheciam os fenômenos de ionização e dissociação eletrolítica que explicam os fenômenos apresentados, pois só se conheciam os resultados das experiências. As teorias só começaram a ser formuladas com Helmholtz em 1880 e, depois, com Svante Arrhenius, que as concluiu em 1887.

Muitos metais quando submersos em água liberam íons nessa água.

Assim, o Zn libera íons bivalentes positivos, Zn^{++} . Os dois elétrons de Zn ficam retidos na lâmina de Zn , que fica com excesso de elétrons.

Da mesma forma, o cobre ficará com excesso de elétrons e liberará, na solução de feltro, íons bivalentes Cu^{++} .

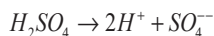
Equações químicas:



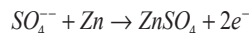
Porém, os metais não têm todos a mesma facilidade para soltar íons. O cobre solta menos que o Zn. Dessa forma, o Zn fica com mais elétrons que o cobre, o que provoca uma diferença de potencial entre ambos. Se conectarmos a extremidade de cobre da pilha com a extremidade de zinco, com um condutor, haverá a passagem de corrente de elétrons do Zn para o Cu.

Se os feltros forem embebidos com água, haverá um momento em que o excesso de elétrons no Zn deixará de existir e, nesse caso, a diferença de potencial entre os terminais de Zn e cobre se anulará, e a corrente no circuito deixará de existir.

Porém, como os feltros estão embebidos em uma solução de ácido sulfúrico, H_2SO_4 , em consequência, as moléculas de H_2SO_4 se dissociam na solução nos íons: H^+ e SO_4^{--} , conforme a equação química:



O íon sulfato, SO_4^{--} , se dirige para o Zn, reagindo e formando sulfato de zinco segundo a equação:



Os elétrons ficam retidos no Zn, e o terminal do Zn os encaminha para o condutor. Essa reação química é a fonte de elétrons para o Zn, e é o que a pilha fornece para a corrente no circuito externo.

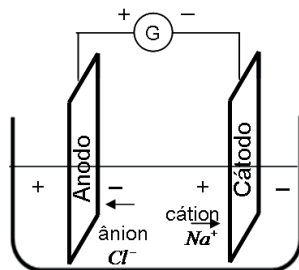
Os íons H^+ se encaminham para o cobre, recebem elétrons e se transformam em moléculas de hidrogênio H_2 na forma de gás, as quais se desprendem junto ao cobre. A equação química é: $2\text{H}^+ + 2e^- \rightarrow \text{H}_2$.

Agora podemos compreender o que significa a expressão “a pilha transforma energia química em energia elétrica”. A reação química libera dois elétrons para o condutor externo.

Depois de algum tempo, o Zn desaparece e a pilha deixa de funcionar, necessitando repor o Zn.

A11.2.2 Eletrólise

Em 1833, Michael Faraday (1791-1867) iniciou suas pesquisas sobre o que ele denominou eletrólise, utilizando inicialmente uma pilha de Volta, semelhante à descrita anteriormente. Por eletrólise, entende-se a decomposição química por meio de uma corrente elétrica. A intenção não era gerar energia elétrica, mas sim, inverter o processo e decompor a substância dissolvida no eletrólito, para em vez de consumir o metal do eletrodo negativo, depositá-lo ou liberar H_2 no eletrodo negativo, passando uma corrente elétrica no eletrólito.

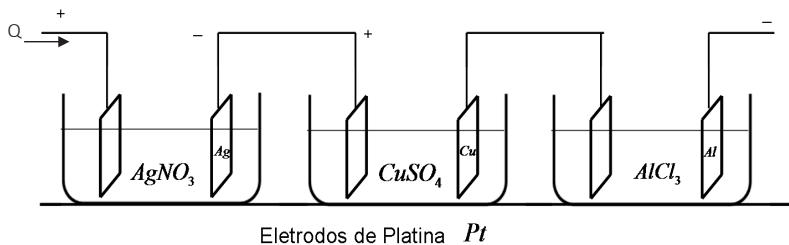


Ao fazer passar uma corrente elétrica pelo “eletrólito”, Faraday notou que os sais metálicos dissolvidos se dissociaram em íons, sendo cátion o positivo e ânion o negativo, os quais se dirigem, respectivamente, aos eletrodos cátodo e ânodo, sendo que os metais se depositam no eletrodo negativo, cátodo.

Se em vez de sais, usarmos ácidos, teremos desprendimento de H_2 em vez de metal no cátodo.

Todos esses termos foram cunhados por Faraday, que deduziu duas leis que levam o seu nome.

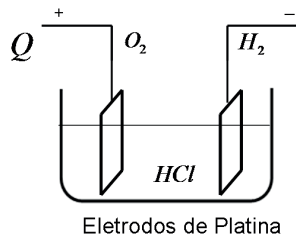
Para demonstrar as leis da eletrólise, consideremos as três soluções: nitrato de prata, $AgNO_3$, sulfato de cobre, $CuSO_4$ e cloreto de alumínio, $AlCl_3$.



No caso do Al , trata-se do processo industrial utilizado para sua extração, utilizando como eletrólito o minério criolita, Na_3AlF_6 , fundido dissolvido em óxido de alumínio, Al_2O_3 .² Também se utiliza na purificação ou revestimento de (ou com) cobre, ouro, prata e platina.

É possível realizar a eletrólise da água, utilizando um eletrólito de ácido clorídrico, HCl , ou ácido sulfúrico, H_2SO_4 .

² Obtido a partir da bauxita: óxido de alumínio hidratado, $Al_2O_3 \cdot H_2O$.



Fazendo passar uma corrente elétrica i no tempo t , resulta a carga elétrica $Q = it$. Faraday notou que as massas de metal ou hidrogênio, H , eram depositadas ou dissipadas no eletrodo negativo (cátodo). As massas depositadas M_{Ag} , M_{Cu} , M_{Al} e M_H são proporcionais à carga que passa nas soluções Q . Essa é a expressão da 1ª lei de Faraday.

Ele também notou que as massas eram proporcionais aos equivalentes químicos $a = \frac{A}{z}$, sendo A a massa atômica do elemento e z , sua valência. É a 2ª lei de Faraday.

Então, teremos as seguintes proporções:

$$\frac{M_{Ag}}{107,88} = \frac{M_{Cu}}{31,785} = \frac{M_{Cl}}{35,46} = \frac{M_{Ox}}{8,00} = \frac{M_H}{1,008} = \frac{M}{a}$$

Por outro lado, $\frac{M}{Q}$.

Faraday deduziu a seguinte fórmula: $M = \frac{aQ}{F} \implies F = \frac{aQ}{M}$ ³

Sendo M_{Ox} a massa do oxigênio liberada no anodo.

$\therefore F = \frac{A}{z} \frac{Q}{M}$ É a expressão que engloba as duas leis de Faraday.

A constante F , chamada Faraday é $F = 96485,309 \text{ coul}$ em 1986.

Sendo $\text{coul} = \text{coulombs}$

³ Recorde-se a regra de três composta: Carga Equival. Quim. Massa Depos.

$$\begin{array}{l} Q_1 \rightarrow a_1 \rightarrow \\ Q_2 \rightarrow a_2 \rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} \frac{Q_1 a_1}{M_1} = \frac{Q_2 a_2}{M_2} = F \text{ (constante de proporcionalidade)}$$

Se Q aumenta, M aumenta e se a aumenta, M aumenta também.

É interessante apresentar como Faraday deduziu a fórmula.

A quantidade de eletricidade necessária para liberar um equivalente químico de uma substância, digamos, 107,88 g de prata, 1,008 g de hidrogênio ou 35,46 g de cloro. Essa quantidade é o “Faraday” (F).

Faraday inferiu dos resultados experimentais que a mesma quantidade de eletricidade está associada no processo da eletrólise com um átomo de cada um desses elementos. Ele pensou que essa carga estava associada ao átomo, ou, em alguns casos, a um grupo de átomos, isto é, os radicais com sua carga, negativa ou positiva, e os chamou de “íons”.

Os resultados de Faraday implicam que existe uma unidade elementar, ou átomo, de eletricidade. Essa ideia, entretanto, não parecia se ajustar a outros fenômenos, como a condução metálica, então Faraday e Maxwell hesitaram em aceitar a ideia da natureza atômica da eletricidade.

A11.3 DA IMPORTÂNCIA DE ALGUÉM QUE ANDOU MEIO ESQUECIDO

George Johnstone Stoney (1826-1911) foi um físico, matemático e astrônomo irlandês. De um popular jornal de notícias, o *Daily Express*, em 6 de julho de 1911:

Na reunião de Belfast da “British Association”, em 1874, Stoney mostrou que o verdadeiro significado das leis de Faraday da eletrólise é que a eletricidade, como a matéria, consiste em última análise de partículas iguais indivisíveis ou átomos, e sugeriu o nome de “elétron” para esses átomos; nome esse universalmente usado, mas cujo fato marcante é que foi frequentemente assumido de ter sido exibido pela 1ª vez por Von Helmholtz, que deu praticamente a mesma explicação das leis da eletrólise alguns anos após em sua palestra sobre Faraday em 1881.

A constante de Avogadro, N_a , é definida como a quantidade de partículas constituintes, sejam átomos ou moléculas, N , em uma amostra para cada mol (molécula-grama ou átomo-grama), por meio da relação: $N_a = \frac{N}{n}$, sendo n o número de mol s da amostra. Atualmente, chamamos de constante, e não número, pois não se trata de um número puro. Hoje em dia, seu valor é: $N_a = 6,02214179(30) \times 10^{23} mol^{-1}$ (valor recomendado pela CODATA em 2006)⁴ ou melhor, partículas por mol.

O valor da constante de Avogadro foi primeiro indicado por Johann Joseph Loschmidt (1821-1895), físico austríaco, que em 1865 estimou o diâmetro médio das moléculas do ar pelo método equivalente a calcular o número de partículas em um dado volume de gás. Este valor, a densidade numérica do número de partículas em um gás ideal, é agora chamado “constante de Loschmidt”, aproximadamente proporcional à de Avogadro.

As primeiras experiências sobre o ar resultaram em leis que hoje são adotadas como definidoras do gás perfeito. Da combinação da lei de Boyle-Mariotte: $pV = cte_1$, com a lei de Gay-Lussac: $\frac{T}{V} = cte_2$, resulta a equação de estado de um gás perfeito: $pV = nRT$.

⁴ Ver explicação a diante.

Retomando a definição da constante de Avogadro: $N_a = N/n$

Portanto: $n = N/N_a$, a quantidade de *mol*s é igual à quantidade de átomos ou moléculas dividida pela constante de Avogadro N_a .

Pela definição da constante de Loschmidt n_0 , temos: $n_0 = N/V$, quantidade de átomos ou moléculas por unidade do volume ocupado pelas mesmas, V .

Portanto: $V = N/n_0$.

Introduzindo as duas relações na equação de estado dos gases perfeitos:

$p_0 N/n_0 = \left(N/N_a \right) RT_0 \implies n_0 = \frac{p_0 N_a}{RT_0} (1)$, em que p_0 e T_0 são pressão e temperatura absoluta, em condições normais, *CNTP*, $p_0 = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$, $T_0 = 273^\circ \text{ K} = t_0 + 273$ $T_0 = 0^\circ \text{ C}$, valor recomendado pela CODATA⁽⁵⁾ em 2006: $2,6867774(47) \times 10^{25}$ por m^3 a 0° C e 1 atm .

Loschmidt foi o primeiro a estimar o tamanho das moléculas, em 1865.

Observação: valor da constante de Avogadro, quantidade de moléculas ou átomos por *mol*, não depende das condições *CNTP*, porém, a constante de Loschmidt, quantidade de moléculas ou átomos por unidade de volume, depende das *CNTP*, isto é, para 0° C e 760 mmHg .

Chamamos à relação: $k_B = \frac{R}{N_a}$, de constante de Boltzmann.

Como a constante do gás perfeito R é definida com as unidades: $\text{J}/(\text{mol}^\circ \text{ K})$ e N_a , com as unidades átomos ou moléculas por *mol*.

Resulta para a constante de Boltzmann:

$$k_B = \frac{\text{J}/\text{mol}^\circ \text{ K}}{\text{molec}_{\text{ou at}}/\text{mol}} \implies \text{J}/^\circ \text{ K} \text{ ou } \text{erg}/^\circ \text{ C} \text{ (sistema cgs)}$$

Introduzindo a constante de Boltzmann na expressão da constante de Loschmidt: $n_0 = \frac{p_0}{k_B T_0}$

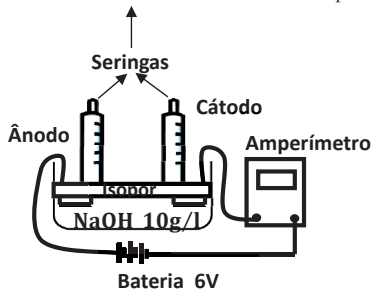
⁵ CODATA: Committee on Data for Science and Technology.

A11.4 DESMISTIFICANDO A CONSTANTE DE AVOGADRO

A maioria das publicações falha em fornecer aos alunos uma ideia real de como é feita a determinação da constante, com frequência passando a ideia de que se trata de um número mágico que surge ninguém se sabe de onde. Como exceção temos: unidades modulares de química de Ambrogi-Versolato, que apresenta uma descrição rápida da forma de calcular a constante, determinando-se a carga que passa por um circuito no qual é depositado uma quantidade de sódio metálico em um dos eletrodos. Porém, por exigir tratamento cuidadoso, não é de fácil realização para uma turma de ensino médio.

Para essa finalidade, relataremos uma experiência simples, a eletrólise da água, que pode ser realizada com materiais de fácil obtenção: eletrodos de fio de cobre $\phi 2,5mm$, seringas de injeção $5ml$, isopor para suporte das seringas, solução $NaOH\ 10g/l$, bateria de $6V$, recipiente de plástico (fundo de garrafa de refrigerante de $2l$), cronômetro ou relógio marcando segundos, amperímetro 0 a $250mA$ e fios de ligação.

(Fechadas nas extremidades com silicone ou parafina.)



Reações:



Exemplo de cálculo: $pV = n_{H_2} RT$

$$n_{H_2} = \frac{pV}{RT} = \frac{663mmHg \times \frac{101325Pa}{760mmHg} \times 5,0ml \times \frac{1l}{1000ml} \times \frac{1m^3}{1000l}}{8,3145J/mol \times 300^0K}$$

$$n_{H_2} = 1,77 \times 10^{-4} molPa m^3/J = 1,77 \times 10^{-4} molH_2 \text{ quantidade de moléculas } H_2 \text{ por } mol$$

$$n_{e^-} = 1,77 \times 10^{-4} \text{ mol } H_2 \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } H_2} = 3,54 \times 10^{-4} \text{ mols } e^-, \text{ quantidade de } e^- \text{ por mol}$$

$$Q = i \times t = 0,070 \text{ A} \times 501 \text{ s} \times \frac{1 \text{ coul}}{1 \text{ As}} = 35,07 \text{ coul}, \text{ carga que passa no circuito}$$

$$N_e = \frac{Q}{e} = 35,1 \text{ coul} \times \frac{1 e^-}{1,6 \times 10^{-19} \text{ coul}} = 21,92 \times 10^{19} e^-, \text{ quantidade de elétrons}$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, \text{ carga de um elétron.}$$

$$N_e = N_A \times n_{e^-} \implies N_A = \frac{N_e}{n_{e^-}} = \frac{21,9 \times 10^{19} e^-}{3,54 \times 10^{-4} \text{ mols } e^-} \implies N_A = 6,2 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Nº de Avogadro⁶

Sendo: $R = 8,3145 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, temperatura em $^{\circ}K$, corrente em A , tempo em s , pressão em Pa , volume em m^3 e carga de elétron em Coulombs $\therefore N_A = \frac{RTit}{2pVe} \text{ mol}^{-1}$

Resultados obtidos em duas turmas de escolas de nível médio: média e desvio padrão: $6,6 \pm 0,3 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ e $5,9 \pm 0,9 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Referência: G. de S. Mól, G. A. L. Ferreira, R.R. da Silva e H. F. Laranja.

O método mais antigo para medir a constante de Avogadro foi baseada na coulometria. Mede-se a constante de Faraday $F = 96485 \text{ coul}$, que é a carga transportada por um mol de elétrons, e divide-se pela carga elementar do elétron, e , para obter a constante de Avogadro:

$$N_A = \frac{F}{e} = \frac{96485,304 \text{ coul/mol}}{1,60217738 \times 10^{-19} \text{ coul}} = 6,022136201 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Explicação:

Calcula-se a quantidade de moléculas de H_2 por molécula-grama, mol, n_{H_2} , com a fórmula dos gases perfeitos: $n_{H_2} = \frac{pV}{RT}$, conhecendo a pressão atmosférica $p = 663 \text{ mmHg}$ e o volume da seringa no cátodo, $V = 5 \text{ mL}$.

⁶ Valor recomendado pela CODATA (Committee on data for Science and Technology) 2014: $N_A = 6,022140857(074) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, os algarismos entre parênteses significam: + sobre \pm 0,000000074.

Erro cometido: $\frac{6,2}{6,022} = 1,0296 \implies$ erro de $\approx 3\%$.

Calcula-se a quantidade de elétrons por mol, n_{e^-} , sabendo-se que 1 molécula de H_2 contém 2 elétrons.

Calcula-se a carga que passa pela solução, Q , medindo-se a corrente $i = 0,07A$, no amperímetro, durante o tempo $t = 501$ s.

Calcula-se a quantidade de elétrons contidos na carga Q , $N_e = Q/e$, sabendo-se que a carga de um elétron é: $e = 1,6 \times 10^{-19}C$ (Coulomb).

Sabendo-se que o número de elétrons em 1 mol é $N_e = N_A \times n_{e^-}$ calcula-se a constante de Avogadro: $N_A = N_e/n_{e^-}$.

A11.5 SOBRE A CONSTANTE DE LOSCHMIDT

Loschmidt não chegou a calcular o valor de sua constante em 1865, na publicação *Zur Grösse der Luftmoleküle*, com relação ao tamanho das moléculas do ar. Porém, é uma simples questão lógica dos resultados publicados, como James Clerk Maxwell mostrou em uma palestra em público realizada oito anos mais tarde: *Molecules*, na publicação *Nature* 8.

A11.5.1 Observações pertinentes

Resumindo: em 1811, Amedeo Avogadro enunciou, “*Volumi equali di gas nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione contengono lo stesso numero di molecole*”, isto é, volumes iguais de gases nas mesmas condições de temperatura e pressão contém o mesmo número de moléculas.

John Dalton, em 1803, conceitua que o elemento mais leve, o hidrogênio, serve como unidade para os outros elementos, e imaginou que os átomos se prendem para formar moléculas.

Avogadro declarou, em seu artigo de 1811, “*Essay on Determining the Relative Masses of the Elementary Molecules of Bodies*” (*Journal de Physique*, 73, 58-76), que a menor partícula de um gás não é necessariamente um único átomo, mas uma combinação de vários átomos unidos por forças atrativas a fim de formar uma única molécula.

Ohm estabeleceu, em 1827, a lei que leva seu nome. Ele assemelhava a corrente elétrica ao movimento de um líquido em canalizações, comparando a diferença de potencial à diferença de nível. A lei de Ohm postula que, para o mesmo trecho do condutor, mantido à temperatura constante, a relação entre a diferença de potencial entre os extremos e a intensidade da corrente é constante e igual à resistência.

Pouco tempo depois de se descobrir a corrente elétrica, alguns físicos observaram que certas soluções são condutoras. Somente depois dos trabalhos de vários pesquisadores, Faraday, em 1833, postulou as leis que levam seu nome.

A equação que sintetiza essas leis é: $M = \frac{1}{F} aQ$ em que a massa M depositada em um dos eletrodos é proporcional à carga Q , que passa pela solução (1ª lei), e essa massa M também é proporcional ao equivalente químico do elemento depositado, a , sendo $a = \frac{A}{z}$, A , massa atômica e z , valência do elemento.

Assim, vemos que, apesar de Faraday saber sobre a dissociação da molécula dissolvida no eletrólito em íons que se depositam ou se desprendem em cada eletrodo, ele desconhecia a existência do elétron, cuja conceituação por Stoney só seria sugerida em 1874 e, portanto, não poderia utilizar a simples fórmula $F = Ne$. O e é a carga do elétron, e F é a constante de Faraday, que ele mesmo havia obtido, por *mol* de substância: $F = 96 \cdot 520 \text{ coul} / \text{mol g}$ e N , a constante de Avogadro, que só seria conceituada por Perrin em 1909, cujo valor ele obteve por intermédio de experiências com movimento browniano de partículas de resina em suspensão em um líquido com a fórmula: $n = n_0 \exp\left[-\frac{N_0}{RT} V(\rho - \rho')gh\right]$ (1)⁷ em que ρ' é a densidade do líquido, ρ a densidade das partículas e V o volume de uma partícula, h altura do líquido e g a gravitação.

$N = 6,0 \times 10^{23} \text{ part/mol}$, valor hoje admitido:

$N = 6,02214179(30) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (recomendações International Union of Pure and Applied Chemistry, IUPAC de 1966)

Apesar de Loschmidt ter tentado obter em 1865 o valor de $\text{molec}/\text{unidade de volume}$ que Maxwell justificou 8 anos após por uma palestra sobre Faraday, ambos se baseando na teoria dos gases, os valores obtidos não tiveram a mesma precisão obtida por Perrin.

Valores obtidos:

Por Loschmidt, estimado para ar, $n = 1,81 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$

Por Maxwell, $n = 1,9 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$

Valor recomendado pela CODATA em 2006: $n = 2,6867774(47) \times 10^{25} / \text{m}^3$ (2) de partículas (átomos ou moléculas) de um gás ideal a 0°C e 1 atm .

Sabia-se que no eletrólito havia correntes de íons, os positivos dirigindo-se para o eletrodo negativo e os íons negativos, dirigindo-se para o eletrodo positivo. Ao unir-se os eletrodos positivos e negativos com um condutor metálico, haverá passagem de corrente elétrica pelo condutor.⁸ Pensava-se que a corrente fosse constituída de partículas positivas, pois ainda não se conheciam os elétrons, que são negativos. Por isso, pensava-se que a corrente fosse na direção contrária ao que hoje sabemos ser a corrente de elétrons (as partículas negativas).

Não resta dúvida de que o método mais preciso é o da eletrólise. A teoria cinética dos gases foi utilizada pela falta de conhecimento da eletrólise. O método do movimento browniano fornece uma melhor precisão que o da teoria cinética dos gases, porém, não tão satisfatório como o da eletrólise. O movimento browniano, como declarou Einstein em seu artigo, serviu para comprovar a existência efetiva

⁷ Variação do número de partículas por unidade de volume com a altura h (*molec/unvol*).

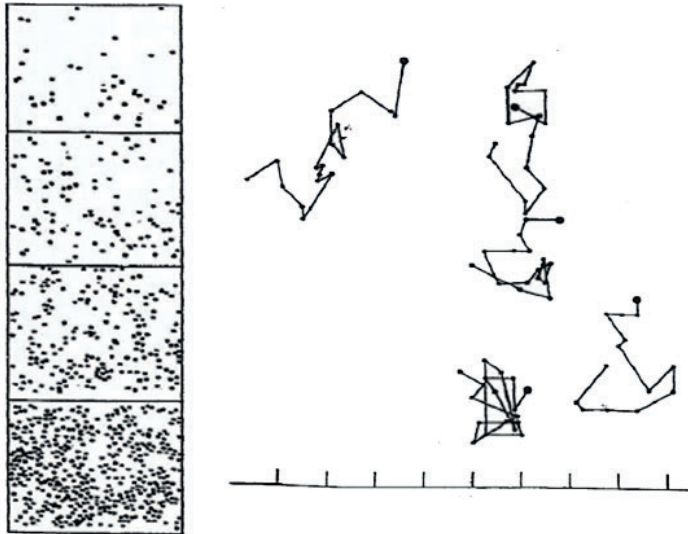
⁸ Fora do eletrólito.

das moléculas e, em consequência, dos átomos, cujos movimentos provocam, por transmissão da energia cinética, o movimento das partículas na suspensão.

A teoria do movimento browniano foi publicada na mesma edição nos “Annalen der Physik” que continha seu famoso artigo sobre a teoria da relatividade restrita e seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico, pelo qual recebeu o prêmio Nobel em 1921.

A hipótese básica de Einstein era que as partículas suspensas em um líquido ou gás participam do movimento térmico do meio, e que em média a energia cinética de translação de cada partícula é de $(3/2)kT$, de acordo com o princípio da equipartição da energia. Por esse ponto de vista, o movimento browniano resulta do impacto das moléculas do fluido com as partículas suspensas, que adquirem a mesma energia cinética que as moléculas.

O movimento browniano proporciona uma importante verificação experimental das hipóteses da teoria cinética, com isso, então, podemos obter o número de Avogrado.



Em 1909, Perrin realizou uma experiência com resina em suspensão em um recipiente. Inicialmente, a distribuição das partículas é uniforme, mas, depois, a distribuição se torna uma espécie de atmosfera em miniatura, isto é, mais denso embaixo, e essa densidade diminuindo com a altura.

A força por unidade de área, entre os níveis z e $z + dz$ é $nmgdz$ ⁹, que deve ser igual à diferença de pressão entre z e $z + dz$: $nmgdz = -dp$ (3)

⁹ Em que m é a massa de uma molécula. Recorde-se $\frac{[F]}{[L^3]} \times [L] = \frac{[F]}{[L^2]}$ = pressão, e ainda: n é o número de moléculas por unidade de volume V e peso = $F = mg$.

O sinal negativo indica decréscimo de p com aumento de z .

Isso é justamente a constante de Loschmidt, vista na Equação 2 das Observações pertinentes, como também na Equação 1 em Da importância de alguém que andou meio esquecido, em que deduzimos a equação: $n = \frac{pN_0}{RT}$, que concorda com a teoria cinética dos gases, no sentido de n ser proporcional a p . Onde: n é o número de moléculas ou átomos por unidade de volume.

Obviamente, visualizar moléculas é impossível, mas é possível observar moléculas grama, ou seus múltiplos, quando nos referirmos à Equação 4 desta Seção, número de mols:

$$\mu = nV/N_0, \text{ porque } V \text{ e } N_0 \text{ são constantes, logo } \mu \text{ será apenas função de } n.$$

Como vimos, a constante de Avogadro tem uma importância fundamental por unir o mundo microscópico ao macroscópico.

Como $pV = \mu RT$, μ , número de mols: $\mu = nV/N_0$ (4), $N_0 = R/k$ $k = \text{constante de Boltzmann}$, obtemos: $p = nkT$ (5), combinando 3 e 5: (*)

Resulta em: $\frac{dp}{p} = \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dz$, como a temperatura é constante, integrando, temos: $n = n_0 e^{-mgz/kT} \Rightarrow \ell n(n/n_0) = -mgz/kT$.

A massa $m = (\rho - \rho')V$, ρVg é o peso da partícula e $\rho'Vg$ é o empuxo para cima devido ao volume do fluido deslocado pela partícula (Princípio de Arquimedes), em que ρ , densidade das partículas, ρ' , densidade do líquido, fazemos $z = h$ e n_0 , número de partículas no fundo, quando $z = 0$, e lembrando que $k = \frac{R}{N_0}$, teremos: $n = n_0 \exp\left[-\frac{N_0}{RT} V(\rho - \rho')gh\right]$ que é a fórmula de Perrin da Equação 1.

Explicitando N_0 :

$\ell n(n/n_0) = -V(\rho - \rho')gh \frac{N_0}{RT} \Rightarrow N_0 = -RT \ell n(n/n_0)/V(\rho - \rho')gh$, que é o número de Avogadro. A contagem das partículas é feita por unidade de área da figura vista ao microscópio. Utilizou-se de um microscópio munido de câmara cinematográfica, registrando 20 imagens por segundo.

$$\begin{aligned} (*) pV &= \left(\frac{nV}{N_0}\right)RT \Rightarrow p = nRT \frac{k}{R} \Rightarrow p = nkT \\ n &= \frac{pN_0}{RT} = \frac{p}{kT} \Rightarrow p = nkT \Rightarrow dp = kTdn \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dn}{n} \\ nmgdz &= -dp = -kTdn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dz \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dz \\ \text{Integrando: } \int_{n_0}^n \frac{dn}{n} &= \ell n \frac{n}{n_0} = -\frac{mg}{kT} \int_0^h dz \Rightarrow \ell n \frac{n}{n_0} = -\frac{mg}{kT} (h-0) \\ \therefore \frac{n}{n_0} &= e^{-mg h / (kT)} \Rightarrow n = n_0 e^{-mg h / (kT)} \\ m &= (\rho - \rho')V \quad k = R/N_0 \end{aligned}$$