Uma prática de resolução de equação do primeiro grau com uma turma de licenciatura em uma Universidade Federal

Almeida, M. S. L.[1], Nascimento, J. O. do [2]

1 PPGECM/IEMCI, Universidade Federal do Para - UFPA, Belém/PA, Brasil.
2 Departamento de Modelagem Computacional, CIMATEC, Salvador/BA,

* e-mail: maysa.almeida@escola.seduc.pa.gov.br; jeffersonascimento@gmail.com

Resumo

O ensino da matemática na Educação Básica tem ocorrido recorrentemente, por limitações, em que o professor realiza procedimentos transcritos na íntegra de materiais instrucionais prontos e acabados e os estudantes devem reproduzi-los ao realizar as tarefas. O objetivo deste trabalho é apresentarmos uma proposta de ensino cujo foco é tornar essa prática inteligível, focando em equações polinomiais. Como percurso metodológico foram escolhidos elementos teóricos que fazem parte da ecologia escolar, permitindo ao discente que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma a ser explicado, descrito, planejado e realizado com base em um conjunto de regras matemáticas que possam ser organizadas em um discurso tecnológico-teórico compatível com a Álgebra Elementar. As atividades foram elaboradas a partir de um Modelo Epistemológico de Referência (MER). Um MER pode ser utilizado para analisar ou questionar uma organização de ensino ou, como neste caso, proporcionar a construção de um sistema de tarefas para reconstruir a técnica para a tarefa em questão. Por fim, a metodologia proposta para a resolução de equações polinomiais redutíveis ao primeiro grau apresentou resultados satisfatórios, com indícios de aprendizagem pelos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática, Equações Polinomiais, Modelo Epistemológico de Referência.

Abstract

The teaching of math in elementary School and high school from Brazil has been recurring, due to limitations, in which the teacher performs procedures transcribed in full of ready and finished instructional materials and students must reproduce them when performing the tasks. The objective of this work is to present a teaching proposal whose focus is to make this practice intelligible, focusing on polynomial equations. As a methodological path, theoretical elements that are part of school ecology were chosen, allowing the student that the teaching and learning process occurs in order to be explained, described, planned and carried out based on a set of mathematical rules that can be organized in a technological-theoretical discourse compatible with Elementary Algebra. The activities were developed based on an Epistemological Reference Model (ERM). A ERM can be used to analyze or question a teaching organization or, as in this case, provide the construction of a task system to reconstruct the technique for the task in question. Finally, the proposed methodology for solving polynomial equations reducible to the first degree showed satisfactory results, with evidence of learning by students.

Keywords: Math Education, Polynomial equations, Epistemological Reference Model.

1. Introdução

As problemáticas relativas ao ensino de matemática, de modo geral, são discutidas em termos de metologias e condições relativas aos níveis de codeterminação externos à escola. Gascón [1] nos chama atenção para o fato de que a maioria das pesquisas que abordam o problema da formação de professores, se concentram ora em aspectos pessoais, como concepções e crenças dos professores, ora sobre a gestão dos processos de ensino tal como o conhecimento pedagógico do conteúdo e as competências profissionais do professor, e, além disso, que muitos trabalhos nessa mesma área assumem a organização da matemática tal como proposta pela escola sem contestá-la de nenhuma forma.

Entendemos que é essencial questionar o que ensinamos em sala de aula, como exercício necessário à reconstrução das nossas práticas. Um dos motivos para isso é o que Chevallard [2] postula como o envelhecimento do saber, este autor descreve o desgaste "moral" sofrido pelo saber escolar como um processo natural de banalização que pode levar à obsolescência dos objetos de ensino. Para possibilitar o questionamento e a reconstrução das organizações matemático-didáticas em torno da resolução da equação do primeiro grau, situamos esta discussão no quadro teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e da Transposição Didática (TD).

Ao considerarmos o professor, em sua atividade profissional, identificamos entre suas tarefas planejar o ensino, ou ainda, reorganizar o saber, que Chevallard [3] descreve como o problema praxeológico do professor de "como desenvolver, em determinada classe, uma determinada organização de saber "matemático"? [3]. Ora, este problema não é assumido nem pelos professores e nem pela pedagogia, pois, nos dois casos, acredita-se que, por exemplo, construir sequências didáticas é uma tarefa rotineira que pode ser realizada com o auxílio de livros didáticos.

Noção central no âmbito da TAD, praxeologia ou modelo praxeológico é o modelo único que rege toda atividade humana que é regularmente realizada. De modo mais específico, Chevallard [3] considera que:

> [...] em última instância, toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t de certo tipo T, por meio de uma certa técnica τ, justificada por uma tecnologia θ que ao mesmo tempo possibilita pensar nela ou mesmo produzi-la, e por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Em resumo, qualquer atividade humana implementa uma organização que pode ser denotada por [T / τ / θ / Θ] e que chamamos praxeologia, ou organização praxeológica [3]. Tradução nossa).

Uma praxeologia pode ser compreendida a partir de seus dois blocos complementares e inseparáveis: o primeiro, formado por ao menos um tipo de tarefa (T) e sua respectiva técnica (τ), chamado prático-técnico, e o bloco tecnológico-teórico que contém o discurso que explica, justifica e fundamenta o primeiro. Toda atividade prática possui um discurso, ainda que em nível precário, que descreve e justifica sua realização em uma dada instituição. Chevallard [4] deixa claro que o saber-fazer não é obtido da natureza, mas são "artefatos", "obras", construções humanas institucionais que são dotadas de sentido por meio das situações que lhes dão uma razão de ser.

Tomamos aqui a tarefa "resolver uma equação polinomial do primeiro grau", uma tarefa que pertence à matemática escolar e deveria ser enfrentada sob um conjunto de condições matemáticas, como por exemplo, as estruturas algébricas que preconizam as regras da prática algébrica. Tais regras permitem encontrar sua solução, ou soluções, independentemente do sujeito que irá produzi-la. No entanto, na escola, esta tarefa é realizada por meio da metáfora do uso da balança de dois pratos, por operações inversas, e técnicas outras como a "passagem de termos de um membro a outro da igualdade para isolar a incógnita", por exemplo. Como crítica a essas técnicas citamos o alcance limitado, e por serem justificadas em si mesmas, revelando uma ausência de elementos da teoria algébrica em seu discurso tecnológico.

2. Metodologia

De forma breve o MER pode ser assim enunciado: consideramos uma partição do conjunto $\mathbb{Z}$, o conjunto denotado por $\mathbb{Z}_n$ e formado pelas n classes de congruência módulo n, em que n é um número primo. O conjunto $\mathbb{Z}_n$, munido das operações de adição e multiplicação, no qual, assim como no corpo dos números reais, são válidos os axiomas A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 e D, será nosso conjunto universo. Essa estrutura permite a construção de tarefas de resolução de equações semelhantes às tarefas em torno deste objeto, mas que para serem enfrentadas exigem tomar tais axiomas como regras a serem executadas de maneira funcional. Dito isto, apresentamos os axiomas que serão assumidos neste modelo, como regras operatórias, para a resolução das equações do primeiro grau.

A1 - associatividade da adição: $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;
A2 - comutatividade da adição: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;
A3 - existência de um único elemento neutro na adição: $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}$;
A4 - existência do elemento simétrico: $\bar{a}+(\overline{-a})=\bar{0}$;
M1 - associatividade da multiplicação: $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})=(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$;
M2 - comutatividade da multiplicação: $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}$;
M3 - existência de um único elemento neutro da multiplicação: $\bar{a}\cdot\bar{1}=\bar{1}\cdot\bar{a}$;
M4 - existência do elemento simétrico: $\bar{a}\cdot\overline{a^{-1}}=\bar{1}$ $(\bar{a}\neq\bar{0})$;
D - distributividade da multiplicação em relação à adição: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$.

No modelo que deu origem às tarefas, concretamente, utilizamos o conjunto $\mathbb{Z}_n$, onde n = 7 e, portanto, $\mathbb{Z}_7=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$ e os quadros das operações para este conjunto, como mostraremos, serão as ferramentas para a resolução de equações do primeiro grau. A seguir, observam-se que os quadros trazem os resultados possíveis para as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_7$. Além das somas e produtos, é possível deduzir algumas regularidades e padrões que ocorrem no universo de $\mathbb{Z}_7$, tal como o fechamento das operações adição e multiplicação. De modo que para uma equação do primeiro grau determinada, na variável x, x pertencerá ao universo $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Tabela 1: Tabela para adição.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Fonte: Adaptado de Monteiro [5] e Queysanne e Delachet [6].

Tabela 2: Tabela para multiplicação.

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Fonte: Adaptado de Monteiro [5] e Queysanne e Delachet [6].

O quadro **A** dispõe a adição entre os elementos de $\mathbb{Z}_7$, onde é possível visualizar que o elemento neutro para esta operação é $\bar{0}$ e que para cada elemento $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ existe outro elemento desse mesmo conjunto, de tal maneira que a soma deles produz o elemento neutro, a esse par denomina-se opostos (A4 – existência do elemento simétrico: $\bar{a} + (\overline{-a}) = \bar{0}$). Bem como, se pode observar a comutatividade. Temos a seguir, alguns exemplos, que podem ser deduzidos dos quadros e utilizados para recriar tarefas:

a) O elemento oposto de $\bar{3}$ é $\bar{4}$, pois $\bar{3} + \bar{4} = \bar{0}$. E que, pela comutatividade, $\bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$, ou seja, o oposto de $\bar{4}$ é $\bar{3}$. Em resumo, $\bar{3} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$.

b) O elemento oposto de $\bar{6}$ é o $\bar{1}$, pois $\bar{6} + \bar{1} = \bar{0}$. E ainda que, $\bar{1} + \bar{6} = \bar{0}$, ou seja, o oposto de $\bar{1}$ é o 6, portanto, $\bar{6} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{6} = \bar{0}$.

c) Para uma soma ordinária entre dois elementos, que não sejam opostos entre si, a soma será sempre diferente de zero, assim, $\bar{5} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{5} = \bar{1}$.

d) A adição de três ou mais termos funciona com as mesmas regras, bastando para isso associá-las duas a duas, como a seguir: $\bar{3} + \bar{6} + \bar{2} = (\bar{3} + \bar{6}) + \bar{2} = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$, ou ainda, $\bar{3} + (\bar{6} + \bar{2}) = \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}$.

Com estas regras definidas podemos pensar na resolução de equações polinomiais do primeiro grau, no universo acima mencionado, a tarefa “encontrar o valor de x na equação $\bar{2} \cdot x + \bar{6} = \bar{0}$” com auxílio dos quadros pode ser realizada da seguinte maneira: $\bar{2} \cdot x + \bar{6} = \bar{0}$ (Para anular o $\bar{6}$ deve-se adicionar a ele $\bar{1}$, mas pela propriedade aditiva, para manter a igualdade devemos somá-lo aos dois membros, então escrevemos):

$$(\bar{2} \cdot x + \bar{6}) + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1}$$

$$\bar{2} \cdot x + (\bar{6} + \bar{1}) = \bar{0} + \bar{1}$$

$$\bar{2} \cdot x + \bar{0} = \bar{1}$$

$$\bar{2} \cdot x = \bar{1}$$

$$(\bar{2} \cdot x) \cdot \bar{4} = \bar{1} \cdot \bar{4}$$

$$(x \cdot \bar{2}) \cdot \bar{4} = \bar{4}$$

$$x \cdot (\bar{2} \cdot \bar{4}) = \bar{4}$$

$$x \cdot \bar{1} = \bar{4}$$

$$x = \bar{4}.$$

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que tem sido usado como diretriz para a reconstrução dos documentos curriculares das redes estaduais, a noção de equação polinomial do primeiro grau tem seu momento de institucionalização no sétimo ano.

Entretanto nesse mesmo documento, o estudo da álgebra, nos anos iniciais, inclui as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, com olhar especial para a equivalência [7]. Assim, achamos relevante levar a proposta para uma turma do curso de licenciatura integrada que habilita professores para os anos iniciais (1º ao 5º ano) do ensino fundamental.

3. Discussão dos resultados

A atividade ocorreu com a turma de licenciatura em dois dias, no horário de suas aulas. Os discentes receberam materiais impressos com uma lista de tarefas e com os quadros das operações. As primeiras tarefas visavam a ambientação e a discussão das operações contidas nos quadros. Embora tenham estranhado o conjunto escolhido, aceitaram a proposta, tal como se aceita entrar em um jogo.

Decidimos introduzir as atividades com adições simples e ao mesmo tempo que possibilitassem discutir algumas regras da adição, o que foi feito à medida que as tarefas eram resolvidas. A primeira tarefa era realizar algumas adições utilizando o respectivo quadro, por exemplo: $\bar{3}+\bar{2}$ e em seguida, $\bar{2}+\bar{3}$, onde a comutatividade foi identificada sem problemas. A segunda, envolvia adições com $\bar{0}$, e mais uma vez, sem dificuldades, os estudantes identificaram a existência do elemento neutro; na terceira, que envolvia adição entre opostos, o professor precisou intervir, pois a nomenclatura não foi lembrada.

Ao final destas tarefas, questionamos sobre o estudo dessas noções e a maioria respondeu que lembrava de ter tido contato com as “propriedades das operações” nos primeiros anos da escola, mesmo assim, nem todos conseguiram identificar e enunciar as propriedades de forma correta. A associatividade também foi contemplada ao final, e, de modo geral, as atividades com os quadros ocorreram naturalmente.
Sobre o quadro da multiplicação, foram feitas as seguintes questões abertas:

I. O que acontece quando realizamos operações com dois elementos e depois invertemos suas ordens?
II. Existe algum elemento, que ao ser multiplicado por qualquer outro, produz como resultado o segundo?
III. Tomando-se dois elementos e a multiplicação entre eles, é possível obter o elemento neutro? Quais são os pares de elementos que apresentam esta relação?
IV. Dados dois elementos a operação de multiplicação entre eles, o que se pode dizer dos resultados obtidos?

Os estudantes foram incentivados a responder com suas palavras explicando suas conclusões a partir do quadro da multiplicação. A Figura 1 traz um recorte com respostas obtidas:

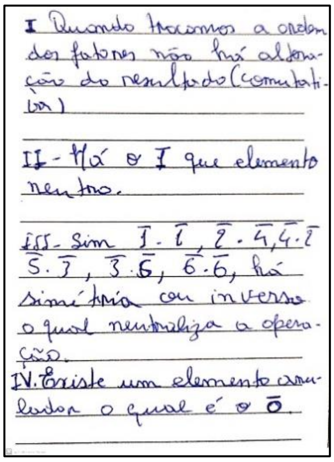

Figura 1: Respostas dos discentes obtidas durante a pesquisas. Fonte: Dados da pesquisa.

As demais tarefas exploravam o cálculo de produtos, com dois e depois, três e mais fatores, em que a associatividade foi exercitada. Por fim, uma tarefa para verificar a regra de distributividade em relação à adição. Nesta última, foi necessário usar de forma combinada os quadros da adição e da multiplicação. Para o segundo dia ficaram reservadas as tarefas de resolução das equações, propriamente. Para introduzir este tipo de tarefa, preferimos as mais simples: por exemplo: $\bar{6}+\bar{x}=\bar{0}$ e $\overline{3x}=\bar{2}$, estas, inclusive podiam ser respondidas recorrendo-se diretamente aos quadros. Depois seguiram as equações do tipo $\overline{6x}+\overline{6x}=\bar{4}+\bar{3}$, $\overline{3x}+\bar{5}=\bar{0}$ e $\bar{5}+\bar{6}=\bar{x}+\bar{3}$, para as quais era necessário combinar várias regras (distributividade, associatividade, elemento neutro).

Algumas dificuldades começaram a surgir devido ao estranhamento do conjunto universo, em alguns casos os alunos utilizaram $-\bar{3}$ na tentativa de neutralizar $\bar{3}$, o que era compreensível naquele contexto, e foi sendo superado ao longo das outras tarefas. Algumas operações para esses estudantes já se naturalizaram dentro do conjunto dos números reais, mas pudemos dialogar sobre como as regras independem do sistema simbólico, e que, na verdade, são elas que regem o funcionamento de cada estrutura.

4. Considerações finais

Consideramos que para o momento que a pesquisa ocorreu, conseguimos apresentar com êxito a proposta de uma organização de ensino baseada em um MER que buscava a álgebra como essência do discurso tecnológico-teórico. Todas as tarefas propostas foram plenamente resolvidas por meio das propriedades das operações adição e multiplicação, que discutimos em forma de regras operatórias. Com isto, atingimos o objetivo de mostrar que é possível recriar as técnicas de resolução de uma equação polinomial do primeiro grau sem o uso da balança de dois pratos, bem como superar a visão da equação meramente como uma sentença matemática onde a incógnita deve ser encontrada por meio de técnicas aritméticas.

As atividades realizadas por meio do sistema de tarefas apresentado, nos permitiram discutir noções presentes no ensino da álgebra com futuros professores dos anos iniciais, mas também proporcionaram uma revisão sobres noções matemáticas que eles, enquanto alunos, ainda apresentavam dúvidas.

Embora não fosse nosso objetivo falar da construção dos quadros da adição e multiplicação, muitos apresentaram curiosidade sobre sua origem, e isso nos levou a pensar sobre a necessidade de elaborar um outro sistema de tarefas em um conjunto diferente de $\mathbb{Z}_7$. Outra dúvida foi sobre como apresentar essa atividade nos anos iniciais o que completamente possível como se pode notar pelas tarefas apresentadas, assumindo-se uma dinâmica de jogo com os alunos, possibilitando sua aplicação neste nível de ensino.

Com o MER descrito nesta atividade, que teve como saber de origem as estruturas algébricas de grupos e corpos, foi possível criar uma articulação entre as noções: propriedades da igualdade, propriedades das operações em um dado conjunto, equivalência e equações equivalentes, que estão presentes de forma isolada nos materiais didáticos, o que acarretava uma perda de sentido para o seu ensino.

5. Referências

[1] GASCÓN, J. Los recorridos de estúdio y investigación para la formación del professorado. RDM, vol. 38, n. 1, pp. 79-117, 2018.

[2] CHEVALLARD, Y. **La transposión didática**: del saber sabio al saber ensenado. Buenos Aires: Aique, 2005.

[3] Chevallard, Y. Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In Dorier, J.–L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, r., Floris, R. (Eds.), Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 3–22). Grenoble, France: La Pensée Sauvage. 2002.

[4] CHEVALLARD, Y.*La TAD face au professeur de mathématiques.* UMR ADEF. Toulouse - França, 2009.

[5] MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro. Livro Técnico e Científico, 1978.

[6] QUEYSANNE, M; DELACHET, A. **A álgebra moderna**. São Paulo: Difusão europeia do livro, 1964.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018.