Modelo Cosmológico Quântico de Einstein-Aether com Fluido Perfeito de Vácuo

F. G. Alvarenga[1]
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil
G. A. Monerat[2], O. Godoni[3] e E. V. C. Silva[4],
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
G. de O. Neto[5]
Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil.
[1]flavio.alvarenga@ufes. [2]germano.monerat@pq.cnpq.br [3]otavio@iprj.uerj.br
[4]evasquez@uerj.br [5]gilneto@ufjf.br

Resumo

A Cosmologia Quântica é uma teoria de condições iniciais que permite descrever o nascimento do Universo sem a indesejábel singularidade inicial tipo big bang. Nesse sentido, propõe-se um modelo quântico de gravidade acoplada ao campo de éter, a chamada teoria de Einstein-Aether, com conteúdo material de fluido de vácuo. A trajetória correspondente ao fator de escala do Universo é obtida e interpretada segundo o esquema de de Broglie-Bohm.

1 O Modelo

Na teoria de Einstein-Aether [1, 2, 3], quantidades cinemáticas quadráticas de vetores unitários tipo-tempo são introduzidas na ação integral:

$$\mathscr{S} = \frac{1}{16\pi G}\left[\int_M d^4x\sqrt{-g}R + 2\int_{\partial M} d^3x\sqrt{h}K\right] + \frac{1}{16\pi G}\int_M d^4x\sqrt{-g}\left[\mathscr{K}^{ab}_{mn}\nabla_a u^m \nabla_b u^n + \lambda\left(u^a u_a - 1\right)\right]. \quad (1)$$

Acima R é o escalar de curvatura, K é o traço da curvatura extrínseca, λ é um multiplicador de Lagrange que assegura a a unitariedade do campo de éter u^n, e $\mathscr{K}^{mn}_{ab}$ é é o tensor

$$\mathscr{K}^{mn}_{ab} = c_1 g^{ab} g_{mn} + c_2 \delta^a_m \delta^b_n + c_3 \delta^a_n \delta^b_m + c_4 u^a u^b g_{mn}, \quad (2)$$

sendo c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes de acoplamento entre os campos de éter e gravitacional. Os novos termos quebram a simetria de Lorentz, pela seleção de um referencial privilegiado em cada ponto do espaço-tempo, mas preservando as equações de segunda ordem como na Relatividade Geral.

A constante G em (1) é definida como

$$G = G_N\sigma \; ; \; \sigma = \left(1 - \frac{c_1 + c_4}{2}\right). \quad (3)$$

Daqui pra frente assume-se $16\pi G_N = 1$.

A homogeneidade e isotropia do Universo é descrita pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker com seção espacial plana,

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)\left(dr^2 + r^2 d\Omega\right), \quad (4)$$

onde $N(t)$ é a função lapso, que corresponde à componente normal da quadri-velocidade, $a(t)$ é o fator de escala. A inserção da métrica reduz a ação (1) a forma

$$S_g = \int dt\left(-6\frac{\dot{a}^2 a}{N\sigma} - \frac{6\beta}{aN\sigma}\dot{a}^2\right), \quad (5)$$

onde $\beta = c_1 + 3c_2 + c_3$.

A matéria é introduzida pelo chamado formalismo de Schutz [4], no qual a pressão de um fluido de vácuo ($p = -\rho$) é expressa em termos de potencias de velocidade escalares ϕ, θ e S:

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (6)$$

cada um satisfazendo sua própria equação de movimento. Acima μ é a entalpia específica, S é a entropia específica. As variáveis ϕ e θ não têm significado físico claro.

A ação da matéria é especialmente simples:

$$S_f = \int d^4x\sqrt{-g}\,p. \quad (7)$$

Relações termodinâmicas [5] permitem que a ação da matéria reduzida seja escrita como

$$S_m = -\int dt \frac{a^3 N}{\sigma} e^S \quad (8)$$

Pelo formalismo canônico identifica-se a partir das Lagrangianas em (5) e (7) a super-Hamiltoniana do modelo Einstein-éter com fluido de vácuo:

$$\mathscr{H} = -\frac{\sigma {p_a}^2}{24a(1+\frac{\beta}{a^2})} + \frac{a^3}{\sigma}e^S, \quad (9)$$

a qual pode ser colocada numa forma mais sugestiva mediante a transformação canônica

$$T = -p_S e^{-S} \; ; \; p_T = e^S$$

resultando em

$$\mathscr{H} = -\frac{\sigma {p_a}^2}{24a(1+\frac{\beta}{a^2})} + a^3 p_T\,. \quad (10)$$

2 A Quantização

É conveniente introduzir uma nova parametrização da função lapso, escrevendo-a como $N\frac{a}{\sigma}(1+\frac{\beta}{a^2})$. A ação mantém a forma mas a super-Hamiltoniana é modificada para

$$\mathscr{H} = -\frac{{p_a}^2}{24} + \frac{a^4}{\sigma}(1+\frac{\beta}{a^2})p_T\,. \quad (11)$$

O procedimento de quantização consiste na aplicação dos operadores $\hat{p}_a \to -i\frac{\partial}{\partial a}$ e $\hat{p}_T \to -i\frac{\partial}{\partial T}$ em (11) de modo a impor a equação de Wheeler-DeWitt, $\hat{\mathscr{H}}\Psi = 0$, sobre a função de onda do Universo. Neste modelo, a equação assume a forma

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\Psi(a,\tau) + 24i\frac{\beta}{\sigma}a^2\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi(a,\tau) = 0. \quad (12)$$

Acima considerou-se $1 + \frac{\beta}{a^2} \approx \frac{\beta}{a^2}$, uma vez que estamos interessados nos momentos iniciais do Universo.

A interpretação da variável $\tau = -T$ como o tempo cósmico $(N = \sigma/\beta a^2)$ e da equação (12) como uma genuína equação de Schrödinger, requer que o correspondente operador

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{\sigma}{24\beta a^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2} \tag{13}$$

seja auto-adjunto. O fator de escala a está restrito ao domínio $a > 0$, tal que a quantização no minisuperespaço diz respeito somente as funções de onda definidas no semi-eixo $(0,\infty)$. Em tais circunstâncias deve-se impor certas condições de contorno sobre as funções de onda permitidas que garantam a auto-adjuntice de (13). Assim sendo, o produto interno requerido é

$$(\psi,\phi) = \int_0^\infty a^2\psi^*(a)\phi(a)da \ , \tag{14}$$

com domínio do operador restrito àquelas funções de onda que obdeçam à condição

$$\frac{\partial\Psi(a=0,\tau)}{\partial\tau} = 0\,. \tag{15}$$

Propondo soluções estacionárias da equação (12), ou seja, soluções do tipo

$$\Psi(a,\tau) = e^{-iE\,\tau}\psi(a)\,, \tag{16}$$

com E sendo um parâmetro real, $\psi(a)$ obedece

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + 24E\frac{\beta}{\sigma}a^2\,\psi = 0\,. \tag{17}$$

Uma solução da equação (17) é

$$\Psi_E(a) = \sqrt{a}CJ_{1/4}\left(\sqrt{\frac{6E\beta}{\sigma}}a^2\right), \tag{18}$$

A norma é infinita, o que pode ser contornado pela construção de um pacote de ondas:

$$\Psi(a,\tau) = \int_0^\infty C(E)\,e^{-iE\,\tau}\,\psi_E(a)\,. \tag{19}$$

A adequada escolha de $C(E)$ permite a construção do pacote

$$\Psi(a,\tau) = Da\frac{e^{\frac{-a^4}{4M}}}{(2M)^{\frac{5}{4}}}, \tag{20}$$

em que $M = g + \frac{i\sigma}{6\beta}\tau$, com g sendo uma constante arbitrária decorrente da escolha de $C(E)$.

3 A Interpretação de Bohm-de Broglie

Na interpretação de Bohm-de Broglie [6] um sistema físico individual compreende uma onda propagando-se no espaço e tempo juntamente com uma partícula que move-se continuamente guiada pela onda. A onda é matematicamente descrita por $\Psi(a,\tau) = R(a,\tau)\,e^{iS(a,\tau)}$, a qual é uma solução da equação (12).

A trajetória $a(\tau)$ é postulada por:

$$p_a = \frac{\partial S(a,\tau)}{\partial a}|_{a=a(\tau)}\,, \tag{21}$$

com o movimento dirigido pela equação de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{1}{24}a^2\frac{\sigma}{\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 + V + Q = 0, \tag{22}$$

onde Q é o chamado potencial quântico:

$$Q = -\frac{1}{24a^2R}\frac{\sigma}{\beta}\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\,. \tag{23}$$

Neste modelo sem termo de curvatura, o potencial clássico V é nulo.

A amplitude da onda $R(a,\tau)$ e a fase $S(a,\tau)$ são identificadas em (20):

$$R(a,\tau) = \frac{D}{2^{5/4}(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})^{-\frac{5}{8}}}$$

$$. \exp - \frac{ga^4}{4(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})}; \qquad (24)$$

$$S(a,\tau) = \frac{a^4\sigma^2\tau^2}{24\beta(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})}$$

$$-\frac{5}{2}\arctan\left(-\frac{\sigma\tau}{6g\beta}\right). \qquad (25)$$

A trajetória bohmiana $a(\tau)$ é obtida de $S(a,\tau)$ pela identificação de $\partial_a S$ com o momento canônico $|p_a|$:

$$12\frac{\beta}{\sigma}\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\sigma\tau}{6\beta(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})} \qquad (26)$$

e portanto

$$a(\tau) = a_0 \ (g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})^4 , \qquad (27)$$

onde a_0 é uma constante de integração arbitrária positiva. Esta solução é não singular, uma vez que o Universo tem um começo com tamanho finito em $\tau = 0$.

O potencial quântico, calculado inserindo (24) em (23), é dado por:

$$Q(a,\tau) = -\frac{\sigma g}{96\beta(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})^2}[(g^2+\frac{\sigma^2\tau^2}{36\beta^2})$$

$$-4ga^4]. \qquad (28)$$

Ao potencial quântico está associada uma força

$$F(a,\tau) = -\frac{\partial Q(a,\tau)}{\partial a}\bigg|_{a=a(\tau)} = \frac{g{a_0}^8\sigma}{6\beta a^5}, \qquad (29)$$

a qual possui um caráter repulsivo atuando de modo a evitar a singularidade acerca da região $a = 0$.

4 Considerações Finais

O modelo de Einstein-Aether que descreve a gravidade acoplada ao campo de éter ao ser quantizado com fluido-perfeito de vácuo revela um Universo não singular devido aos efeitos de um potencial quântico repulsivo. As figuras 1 e 2 ilustram respectivamente o fator de escala e o potencial quântico em função do tempo. O potencial quântico atinge o máximo quanto o fator escala é mínimo, e a partir daí os efeitos quânticos decrescem e a tendência é que a evolução temporal siga o previsto pelo Modelo Cosmológico Padrão. Já está em fase de conclusão a generalização do modelo para um fluido barotrópico arbitrário e a comparação com os modelos sem campo de éter [7] com indicativos de mudança na potência em τ da dependência do fator de escala.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem à comissão organizadora do XI Encontro Científico de Física Aplicada pela excelência do evento. G. A. Monerat agradece à FAPERJ pelo apoio financeiro (Proc. E-26/010.101230/2018).

Referências

[1] M. Campista, R. Chan, M. F. A. Silva, O. Goldoni, V.H. Satheeshkumar e J. F. V. Rocha. Canadian Journal of Physics, vol. 98, n. 10 (2020).

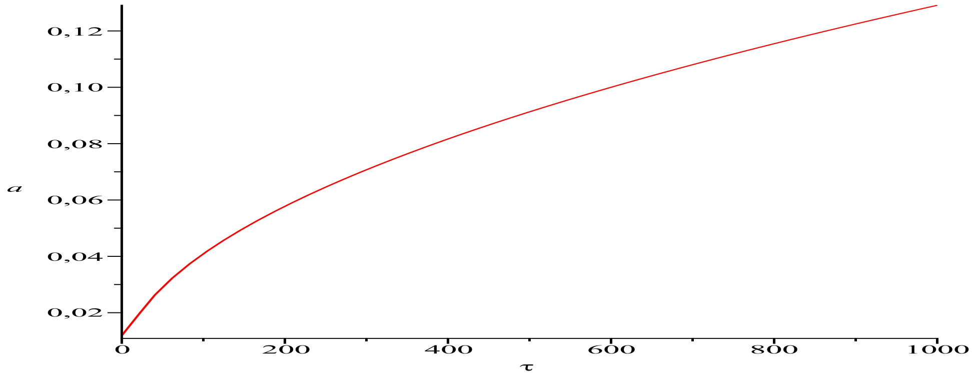

Figura 1: Fator de escala $a(\tau)$.

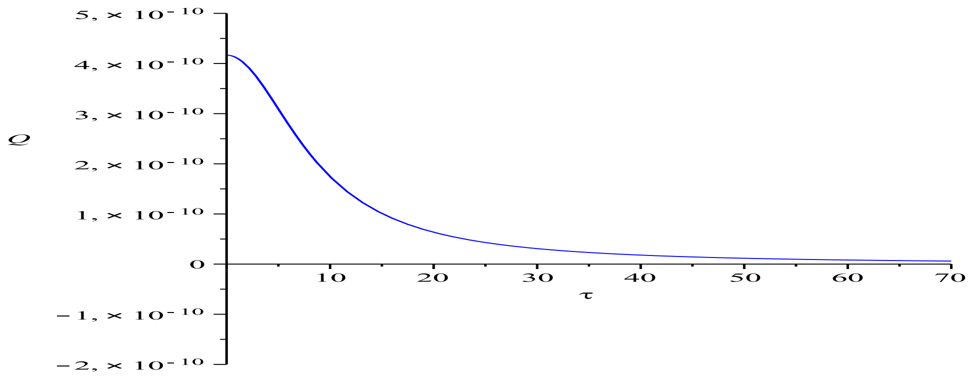

Figura 2: Potencial quântico $Q(\tau)$.

[2] N. Dimakis, T. Pailas, A. Paliathanasis, G. Leon, Petros A. Terzis e T. Christodoulakis *Quantization of Einstein-aether Scalar field Cosmology*. [arXiv:2008.00746v1 [gr-qc]].

[3] G. Leon, A. Paliathanasis e N. Dimakis. *Exact Kantowski-Sachs spacetimes in Einstein-Aether Scalar field theory*. [arXiv:2010.02775v2 [gr-qc]].

[4] F. G. Alvarenga, R. G. Furtado, R. Fracalossi e S. V. B. Gonçalves. Brazilian Journal of Physics, v. 47, p. 96 (2016).

[5] V. G. Lapchinskii e V. A. Rubakov. Theo. Math. Phys. **33**. 1076 (1977).

[6] N. Pinto Neto. Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica. São Paulo, Livraria da Física (2010).

[7] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, Gen. Rel. Grav. 34, 651 (2002).