

Solução do problema de autovalor associado à formulação autorregularizada do MEC com interpolação direta

Loeffler, C. F.^{1*}; Sirtoli, L.H.¹; Lara, L.O. C.¹

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: loefflercarlos@gmail.com

Resumo

Este trabalho dá continuidade a uma série de pesquisas que envolvem o desenvolvimento de formulações do Método dos Elementos de Contorno que usam funções de base radial para aproximar operadores diferenciais não auto-adjuntos. Assim, podem-se estabelecer sistemas algébricos de equações matriciais sem efetuar integrações no domínio expressando-os unicamente em termos de integrais de contorno. Diante dos bons resultados obtidos pelas formulações com funções radiais na solução de problemas governados pela equação de Helmholtz efetuando varredura de frequências, neste trabalho elabora-se um modelo bidimensional autorregularizado para calcular diretamente as frequências, que neste caso se apresentam na forma de um problema de autovalor de quarta ordem.

Abstract

This work carries out a series of researches that involve the development of formulations of the Boundary Elements Method that use radial basis functions to approach non-self-adjointing differential operators. Thus, algebraic systems of matrix equations can be established without performing integrations in the domain expressing them only in terms of boundary integrals. In view of the good results obtained by formulations with radial functions in the solution of frequency scanning problems governed by the Helmholtz equation, this work elaborates a self-regulated two-dimensional model to scan the frequencies, which are modeled in this case as a fourth-order eigenvalue problem.

Keywords: Boundary Element Method, Radial Basis Functions, Eigenvalue Problem.

1. Introdução

A equação de Helmholtz aparece em muitas áreas da engenharia, representando problemas de eletromagnetismo [1], vibração [2] e acústica [3], especialmente tratando a propagação, reflexão e dispersão de ondas no domínio da frequência. Assim, envolve-se nas tecnologias de aquisição de dados por radares, sonares e análises sismológicas. Pode ser entendida como uma simplificação da equação da onda acústica, ou seja, uma forma independente do tempo, na qual se procura encontrar as possíveis configurações do movimento gerado pela propagação de ondas a partir de uma excitação cuja frequência é conhecida.

Os problemas regidos pela equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos; problemas diretos, problemas de autovalor e problemas inversos.

Nos problemas diretos, o objetivo é determinar as amplitudes da onda $u(X)$ em função de um conjunto de

condições de contorno. Tais amplitudes são configurações de equilíbrio do sistema em face de uma excitação conhecida e aplicada permanentemente.

Nos problemas de autovalor, encontram-se as frequências naturais associadas a configurações do sistema em que forças de inércia e forças resistentes se autoequilibram, na ausência de ações externas. Este mesmo conceito aplica-se aos problemas de Helmholtz, que são casos escalares, mas englobam problemas mais simples da elasticidade como casos de torção, deflexão de membranas e vibração de barras.

Já nos problemas ditos inversos, as propriedades do meio constitutivo são determinadas em vista do conhecimento da resposta do sistema.

Diferentes metodologias ainda estão sendo pesquisadas na literatura especializada para gerar soluções numéricas cada vez mais eficientes para os problemas citados [4,5], pois ainda não há uma técnica dominante. Neste contexto, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é considerado um dos mais

efetivos na solução desses problemas, especialmente os problemas de espalhamento acústico [6] e de definição do campo de pressão sonora, difratado por barreiras [7]. Vários modelos recentes usando equações integrais são encontrados na literatura [8-10].

2. Formulação matemática

Considere a equação de Helmholtz em forma indicial:

$$u_{,ii}(X) = -\lambda u(X) \quad (1)$$

Nesta equação, o escalar λ está associado aos autovalores do sistema. O meio é constituído por um domínio espacial $\Omega(X)$, bidimensional e isotrópico, limitado por um contorno $\Gamma(X)$, onde $X = X(x_1, x_2)$.

A formulação do MEC se inicia com o estabelecimento de uma equação integral, na qual uma função auxiliar $b^*(\xi; X)$ é utilizada, em que ξ é um ponto particular dito ponto fonte. Assim sendo, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) b^*(\xi; X) d\Omega(X) = -\lambda \int_{\Omega} u(X) b^*(\xi; X) d\Omega(X) \quad (2)$$

Nesta proposta, $b^*(\xi; X)$ equivale à solução fundamental do problema de Laplace subtraída de uma função adicional $G^*(\xi; X)$, que corresponde ao Tensor de Galerkin associado ao mesmo problema [11]:

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X) \quad (3)$$

Os valores dessas funções são:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\xi; X)) \quad (4)$$

$$G^*(\xi; X) = -\frac{r^2(\xi; X)}{8\pi} [1 - \ln(r(\xi; X))] \quad (5)$$

Para se deduzir a forma integral inversa associada à Eq. (2), faz-se uso de uma série de procedimentos bem conhecidos e típicos do MEC [12], que incluem a integração por partes e aplicação do Teorema da Divergência. Após os devidos algebrismos, resulta:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma(X) \\ & - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma(X) \\ & + \lambda \left(- \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma(X) \right) = \\ & \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) \end{aligned} \quad (6)$$

Na Eq. (6) foram introduzidas duas novas funções:

$$q^*(\xi; X) = u_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} r_i(\xi; X)n_i(X) \quad (7)$$

$$S^*(\xi; X) = G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = -\frac{[2\ln(r(\xi; X))-1]}{8\pi} r_i(\xi; X)n_i(X) \quad (8)$$

Ainda assim persiste uma integral de domínio no lado direito da Eq. (6). Assim, é utilizado o Método de Elementos de Contorno de Interpolação Direta (MECID) para resolvê-la. Deste modo, o núcleo completo dessa integral de domínio é aproximado através de funções de base radial $F^j(X^j; X)$, cujo argumento é composto pela distância Euclidiana entre os pontos base X^j e os

pontos de domínio X . O MECID transforma a mencionada integral de domínio utilizando uma função de interpolação primitiva $\Psi_{,ii}^j(X; X^j)$, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) &= \xi^{\alpha^j} \int_{\Omega} F^j(X^j; X)d\Omega(X) = \\ \xi^{\alpha^j} \int_{\Omega} \Psi_{,ii}^j(X^j; X)d\Omega(X) &= \xi^{\alpha^j} \int_{\Gamma} \Psi_{,ii}^j(X^j; X)n_i d\Gamma(X) = \\ \xi^{\alpha^j} \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X)d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (9)$$

Para cada ponto fonte ξ dado pela Eq. (11), é feita uma leitura de todos os pontos base X^j em relação aos pontos do domínio X , ponderado pelos coeficientes ξ^{α^j} . O número de pontos base X^j deve ser igual ao número de nós no contorno. Após os procedimentos de discretização padrão do MEC, pode-se escrever uma equação matricial a partir da Eq. (6) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} \\ & + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} \\ & = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1^{\alpha^1} & \cdots & 1^{\alpha^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{\alpha^1} & \cdots & n^{\alpha^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

O vetor N_j resulta da integração da função radial auxiliar $\eta^j(X^j; X)$ ao longo do contorno. Os valores nodais do potencial $u(X)$ que estão armazenados no vetor A_j , devem ser explicitados. Assim, faz-se:

$$A_{\xi} = [N_1 \quad \cdots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi^{\alpha^1} \\ \vdots \\ \xi^{\alpha^m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os coeficientes ξ^{α^j} podem ser calculados resolvendo o seguinte sistema:

$$[\xi^{\alpha}] = [F]^{-1}[\xi\Lambda][F]\alpha = [F]^{-1}[\xi\Lambda][u] \quad (12)$$

Nesta formulação, a matriz diagonal $\xi\Lambda$ é composta pelo Tensor de Galerkin $G^*(\xi; X)$. Após alguns algebrismos matriciais, o sistema final é dado por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} \\ & + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \\ & - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & \cdots & M_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{ic} & \cdots & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

3. Organização do problema de autovalor

Fisicamente, um problema de autovalor consiste de um problema em que se procuram configurações autoequilibradas, sem ações externas, o que equivale a valores nulos para as condições de Neumann. Inicialmente, é interessante escrever o sistema do MEC usando submatrizes, nas quais os valores prescritos de u e q sejam claramente identificados, ou seja:

$$\begin{bmatrix} H_{uu} & H_{uq} \\ H_{qu} & H_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{uu} & G_{uq} \\ G_{qu} & G_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{uu} & W_{uq} \\ W_{qu} & W_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uq} \\ S_{qu} & S_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uq} \\ M_{qu} & M_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} \quad (14)$$

Na vibração livre, os valores prescritos de u e q são nulos, o que resulta nas duas equações acopladas:

$$\begin{cases} H_{uu}u - G_{uu}q + \lambda W_{uu}u - \lambda S_{uu}q = \lambda^2 M_{uu}u \\ H_{uq}u - G_{uq}q + \lambda W_{uq}u - \lambda S_{uq}q = \lambda^2 M_{uq}u \end{cases} \quad (15)$$

Seguindo os mesmos passos apresentados em trabalho anterior [9], isola-se o termo q das Eq. (15):

$$q = (G_{uu} + \lambda S_{uu})^{-1} (H_{uq}u + \lambda W_{uq}u - \lambda^2 M_{uq}u) \quad (16)$$

Encontra-se aqui uma séria dificuldade, cuja solução é fundamental para que o modelo proposto apresente resultados satisfatórios: a inversão da soma de duas matrizes, uma delas multiplicada pelo escalar λ , que precisa ser explicitado de forma apropriada.

Embora não seja um tema muito comum, há algumas propostas para solução da inversa da soma de duas matrizes. A primeira delas é a adaptação para a álgebra matricial da Identidade de Hua [13]:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (A + AB^{-1}A)^{-1} \quad (17)$$

A Identidade de Hua não elimina a necessidade de se calcular a inversa; sua utilização na literatura visa um melhor condicionamento das operações matriciais. No caso deste trabalho, a Identidade de Hua pode propiciar um melhor controle do coeficiente λ .

A Eq. (17) pode ser simplificada convenientemente, através de uma manipulação algébrica não trivial, apresentada por Schott [14]. Então:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1} \quad (18)$$

Considerando-se, por estratégia, que:

$$A = \lambda S_{uu} \quad \text{e} \quad B = G_{uu} \quad (19)$$

Usando-se a Eq. (18), tem-se:

$$(\lambda S_{uu} + G_{uu})^{-1} = \frac{1}{\lambda} S_{uu}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} S_{uu}^{-1} [G_{uu}] S_{uu}^{-1} \quad (20)$$

Sob as hipóteses de que para altas frequências o produto da matriz S pelo coeficiente λ se torna efetivamente pouco importante e que baixíssimas frequências não são cabíveis no modelo, nesta última expressão foi desprezado o termo mostrado a seguir:

$$\frac{1}{\lambda} S_{uu}^{-1} \approx 0 \quad (21)$$

De modo que se pode fazer:

$$K_{uu}^{-1} = (S_{uu}^{-1} G_{uu} S_{uu}^{-1}) \quad (22)$$

Logo:

$$(\lambda S_{uu} + G_{uu})^{-1} = \frac{1}{\lambda} [S_{uu}^{-1}] - \frac{1}{\lambda^2} [K_{uu}^{-1}] \quad (23)$$

Assim, definindo-se as expressões:

$$Z_{uq} = H_{uq} + \lambda W_{uq} - \lambda^2 M_{uq} \quad (24)$$

$$q = \left\{ \frac{1}{\lambda} [S_{uu}^{-1}] - \frac{1}{\lambda^2} [K_{uu}^{-1}] \right\} (Z_{uq}u) \quad (25)$$

Substituindo-as convenientemente, obtém-se:

$$H_{qq}u - (G_{qu} + \lambda S_{qu}) \left\{ \frac{1}{\lambda} [S_{uu}^{-1}] - \frac{1}{\lambda^2} [K_{uu}^{-1}] \right\} (Z_{uq}u) + \lambda W_{qq}u = \lambda^2 M_{qq}u \quad (26)$$

Para simplificar, definem-se as matrizes:

$$\begin{aligned} T_{qu} &= G_{qu} S_{uu}^{-1}; & V_{qu} &= G_{qu} K_{uu}^{-1}; \\ Y_{qu} &= S_{qu} S_{uu}^{-1}; & Z'_{qu} &= S_{qu} K_{uu}^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

Após os devidos algebrismos, que incluem a multiplicação de toda a equação por λ e isolando os termos afins, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 (H_{qq} - Y_{qu} H_{uq} + Z'_{qu} W_{uq} - V_{qu} M_{uq} - T_{qu} W_{uq})u \\ &+ \lambda (V_{qu} W_{uq} - T_{qu} H_{uq} + Z'_{qu} H_{uq})u \\ &+ \lambda^3 (W_{qq} + T_{qu} M_{uq} - Y_{qu} W_{uq} - Z'_{qu} M_{uq})u \\ &+ \lambda^4 (-M_{qq} + Y_{qu} M_{uq})u + (V_{qu} H_{uq})u = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

A Eq. (28) pode ser reorganizada na forma de uma típica equação característica:

$$(A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E)u = 0 \quad (29)$$

4. Solução do problema de autovalor de quarta ordem

Para resolver problemas de autovalor quadráticos, que aparecem na solução de problemas de análise estrutural amortecida [15] e na simulação acústica de materiais poro-elásticos [16], Przemieniecky [17] supõe a solução na seguinte forma:

$$u(X, t) = U(X) e^{\lambda t} \quad (30)$$

Assim $u(X, t)$ seria o vetor dos deslocamentos ou uma grandeza primal qualquer, dada pelo produto de uma amplitude $U(X)$ e uma função do tempo, expressa em termos de um parâmetro λ . Tal proposta é a mesma usualmente aplicada para resolver uma equação diferencial, transformando-a numa equação algébrica. No caso de um sistema composto por matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K), tem-se:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad (31)$$

A organização do sistema anterior na forma matricial utiliza a seguinte estratégia:

$$\lambda \begin{bmatrix} M & C \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Na Eq. (32) foi usada a igualdade:

$$C\dot{U} - C\dot{U} = 0 \quad (33)$$

Além disso, considerou-se que:

$$\dot{U}(X) = \lambda U(X) \quad \text{e} \quad \ddot{U}(X) = \lambda \dot{U}(X) \quad (34)$$

Cabe ressaltar que a análise de problemas de autovalor quadráticos – não os de quarta ordem como os que aqui são abordados – já tem extensa pesquisa reunida ao longo dos anos, visando, sobretudo, a estabilidade numérica dos algoritmos, que são iterativos [18,19].

No caso em questão, resolve-se uma equação de mais alta ordem e autovalores que não estão associados às frequências naturais podem ser calculados. Tais autovalores podem ser complexos ou negativos, sem interesse físico. Hurty e Rubinstein [20] fazem uma análise física dos resultados da solução de um sistema de autovalor quadrático, usado quase sempre para se empreender uma análise estrutural de um sistema com amortecimento não proporcional, em que os autovalores complexos, que aparecem aos pares conjugados, têm um significado físico associado à existência de fases no movimento do sistema, de amortecimento e consequente não periodicidade. Contudo, muitas deles são números reais com significado harmônico.

Embora a obtenção de valores complexos seja claramente previsível no modelo dado pela Eq. (30), a expectativa de que o comportamento harmônico fosse encontrado naturalmente junto com outros valores espúrios não se confirmou. Assim, foi admitida uma relação complexa entre o deslocamento e suas derivadas, ou seja:

$$u(X,t) = U(X)e^{i\lambda t} \quad (35)$$

Onde i é a unidade complexa. Neste caso, espera-se forçosamente a ocorrência de um movimento harmônico acompanhado de outros comportamentos. Assim sendo, tem-se:

$$u = Ue^{i\lambda t}; \quad \dot{u} = i\lambda Ue^{i\lambda t}; \quad \ddot{u} = -\lambda^2 Ue^{i\lambda t}; \\ \ddot{\ddot{u}} = -i\lambda^3 Ue^{i\lambda t}; \quad u^{iv} = \lambda^4 Ue^{i\lambda t} \quad (36)$$

Chega-se então ao seguinte sistema matricial:

$$[\lambda^4 E - \lambda^2 C + A]u - i[\lambda^3 D - \lambda B]u = 0 \quad (37)$$

Verificou-se que a solução em separado da parcela complexa do sistema matricial, ou seja:

$$\lambda^2 Du = Bu \quad (38)$$

Resultou em autovalores praticamente nulos; porém, não se deve resolver cada colchete separadamente, pois há perda de informações importantes relacionada ao conjunto. Assim, entre os muitos testes efetuados, foi simulada a seguinte organização:

$$[\lambda^4 E + \lambda^3 D' - \lambda^2 C + \lambda B' + A]u = 0 \quad (39)$$

Na equação anterior foi feito:

$$D' = -iD; \quad B' = -iB \quad (40)$$

Apesar da expectativa de que algum erro seja introduzido, a consideração da submatriz C negativa mudou o panorama dos resultados.

Também é necessário melhorar o condicionamento do sistema dado pela equação matricial (39). Isto foi feito adicionando-se a certas matrizes, já apresentadas, a outras que já compõem o sistema, conforme mostrado:

$$L = \begin{bmatrix} E & D & -C & B \\ 0 & D + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C + W_{q\bar{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B + H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A \\ D + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B + H_{q\bar{q}} & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Esta alteração foi fundamental para que o modelo numérico retornasse resultados aceitáveis e mostrasse convergência com o refinamento da malha. Na realidade, a pesquisa de algoritmos iterativos para o tratamento mais consistente de matrizes não simétricas ainda é uma área em desenvolvimento. Considerando as novas matrizes estabelecidas pelas equações (41) e (42), o problema de autovalor fica:

$$\lambda Lu = Ju \quad (43)$$

5. Simulações numéricas

Resolve-se um exemplo simples através de uma malha com 154 pontos nodais com três diferentes arranjos de pontos internos interpolantes. Foram usados elementos de contorno isoparamétricos lineares, de igual tamanho, e a interpolação feita pela MECID empregou funções radiais simples, que teve desempenho já consolidado em aplicações anteriores.

Os autovalores foram calculados através da rotina baseada no algoritmo Heisenberg que é preparada para calcular autovalores associados a matrizes não simétricas. Tal rotina está implementada na linguagem FORTRAN 77, como todo o programa computacional do MEC. Uma parte do código já foi testada anteriormente em outros problemas afins, de modo que possui eficácia previamente comprovada.

O exemplo escolhido consiste de uma chapa quadrada de dimensões unitária, engastada apenas numa extremidade, como mostrado na Figura 1.

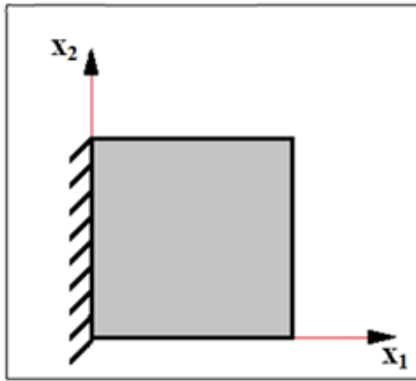


Figura 1: Barra engastada numa extremidade e livre nas demais.

As propriedades físicas e os lados da chapa foram considerados unitários, por simplicidade. Os autovalores são calculados e comparados com as frequências naturais na barra, que são calculadas analiticamente pela seguinte fórmula, que inclui os valores relacionados à vibração transversa:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (44)$$

Devido às limitações da programação computacional utilizada, nenhuma malha acima de 500 graus de liberdade pode ser resolvida, pois o sistema é quatro vezes maior do que o sistema matricial clássico do MEC para cálculo de autovalor.

Na Tabela 1 mostram-se os resultados reais positivos para os autovalores. Na convenção aqui utilizada (NC/NI), tem-se número de nós de contorno (NC) e número de pontos interpolantes (NI). Em razão das relações apresentadas na Eq. (36), os resultados dos autovalores calculados pelo programa estão associados ao quadrado das frequências naturais.

Tabela 1: Resultados reais positivos para os autovalores.

164/144	164/225	164/324	Quad. Freq. Natural
0,99356	0,9935	0,99357	2,4699
12,187	12,175	12,164	12,3594
17,550	17,243	17,024	22,2539
27,631	27,463	27,336	32,1841
39,332	38,8032	38,4324	42,0889
61,145	60,6144	60,2448	61,9431
91,745	91,9206	91,9650	71,9545
93,696	93,047	92,5635	91,8396
99,658	99,023	98,5179	102,0302
107,737	107,046	106,453	111,9787
114,492	114,061	113,737	121,7712

Devido à aproximação feita para o cálculo da inversa da soma das matrizes, a determinação da primeira frequência foi grandemente prejudicada. Outras mais baixas também estão bem longe da precisão devida e necessitariam de malhas mais refinadas para uma melhor qualidade dos autovalores. Porém, certas frequências foram bem descritas, como a segunda, a sexta e a oitava. O modelo desenvolvido também insere números reais que não estão associadas a nenhuma frequência natural.

Comumente os modelos numéricos discretos não conseguem representar adequadamente alguns modos de vibração, especialmente os modos mais altos, que consomem mais energia e demandam uma representação espacial mais elaborada. No entanto, como o MECID usa funções de base radial, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e pode não ser apropriada para descrever com precisão certos modos, que não são necessariamente os mais baixos. Assim, são sempre esperadas algumas oscilações na curva de erros quando a posição dos pontos interpolantes é alterada.

Apesar das imprecisões nos resultados, observa-se uma convergência nos resultados numéricos com o refinamento das malhas utilizadas. O prosseguimento da pesquisa necessariamente impõe um modelo de programação paralela e o uso de algoritmos apropriados para a solução iterativa do sistema de equações. Com tais implementos e possível refinar a malha e eliminar possíveis erros na solução do sistema de equações.

6. Conclusões

Uma vez que a formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta obteve melhores resultados do que a formulação regularizada em problemas governados pela equação de Helmholtz, procurou-se analisar a possibilidade e aplicá-la em problemas de autovalor.

Nesse sentido, examinaram-se os procedimentos matemáticos capazes de conduzir o modelo autorregularizado do MECID a uma forma pertinente a um problema de autovalor. Contudo, embora haja modelos similares para o problema dito quadrático, o caso em questão é bem mais complicado, pois é de quarta ordem e arrola uma estrutura algébrica em que cada matriz constitutiva do sistema está multiplicada por potências do coeficiente associado ao autovalor.

Para se chegar ao intento desejado, uma aproximação foi feita no cálculo das derivadas do potencial, que são eliminadas no modelo de um problema de autovalor. Tal aproximação, além de outros problemas numéricos que não puderam ser melhor estudados até o

momento, mas que podem ser implementados futuramente, fizeram com que os resultados numéricos alcançados fossem aquém do desejado.

Assim, o uso da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno deve ser aplicada apenas na obtenção do espectro de frequências via varredura, pois neste caso seus resultados foram bastante precisos. Essa precisão e funcionalidade não puderam ser reproduzidas no caso do cálculo direto dos autovalores associados.

De qualquer modo, uma vez demonstrada sua consistência matemática, o modelo obtido pode ser aprimorado numericamente através de uma programação computacional otimizada e uso de algoritmos iterativos, voltados para a solução de problemas de autovalor de grande porte com matrizes não simétricas.

Todavia, ressalta-se que o objetivo proposto foi alcançado, pois um procedimento matemático consistente foi desenvolvido e retornou resultados coerentes, embora sem a precisão de outros modelos. Ressalta-se ainda que não foi identificado nenhum trabalho similar na literatura especializada.

7. Referências

- [1] MOON, P., & SPENCER, D. Field Theory for Engineers. New Jersey: Springer, 1971.
- [2] MEIROVITCH, L. Analytical methods in vibrations. Macmillan Co., 1967.
- [3] BUTKOV, E. Física matemática. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [4] LOEFFLER, C. F.; GALIMBERTI, R.; BARCELOS, H. M. Uma formulação autorregularizada para resolver problemas de Helmholtz usando o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.
- [5] LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 61, p. 218-225, 2015.
- [6] SEZNEC, R. Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique. Journal of Sound and Vibration, 73, p. 195-209, 1980.
- [7] MALARDO, V.; ALIABADI, M. H. Boundary element method for Acoustic scattering in fluid-fluid like and fluid-solid problems, Journal of Sound and Vibration, v. 216(3), p. 413-434, 1998.
- [8] LOEFFLER, C. F.; PEREIRA, P. V. F.; LARA, L. O. C.; MANSUR, W. J. Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems, Eng. Analysis Boundary Elements, 79, p. 81-87, 2017.
- [9] LIU, C.; CHEN, L.; ZHAO, W.; CHEN, H. Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions. Eng. Anal. Bound. Elements, v. 85, p. 142-157, 2017.
- [10] WANG, F. Z.; ZHENG, K. H. Analysis of the Boundary Knot Method for 3D Helmholtz-Type equation. Mathematical Problems in Engineering, p. 1-9, 2014.
- [11] BREBBIA, C. A.; DOMÍNGUEZ, J. The Boundary Element Method – An Introductory Course. WIT Press, 1998.
- [12] LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Free Vibration in bars and membranes modeled using the Boundary Element Method (in portuguese). Revista Brasileira de Engenharia, Eng. Civil, v. 4, (2), p. 5-23, 1986.
- [13] COHN, P. M. Further Algebra and Applications, Springer-Verlag London, 2003.
- [14] SCHOTT, J. R., Matrix Algebra for Statistics, New York, 1998.
- [15] CHU, M. T.; HWANG, T. M.; LIN, W. W. A novel deflation technique for solving quadratic eigenvalue problems, 2005. Disponível em <<https://www.semanticscholar.org/paper/a-novel-deflation-technique-for-solving-quadratic-Chu-Hwang/be93440b3934de3122f585413474ebba835a127c>>. Acesso em: 01 Jun. 2020.
- [16] HWANG, T. M.; LIN, W. W.; MEHRMANN, V. Numerical solution of quadratic eigenvalue Problems with structure-preserving methods. SIAM J. Sci. Comput., v. 24(4), p. 1283-1302, 2003.
- [17] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. Courier Corporation, 1985.
- [18] DUMONT, N. A. On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 71, p. 1534-1568, 2007.
- [19] AFOLABI, D. Linearization of the quadratic eigenvalue problem. Computers and Structures, v. 26. p. 1039-1040, 1987.
- [20] HURTY, W. C.; RUBINSTEIN, M. F. Dynamic of structures, Prentice Hall, 1964.