

Introdução à análise estrutural não linear geométrica de estruturas planas via método dos elementos finitos

Neves, N. S.^{1*}, Pinheiro, V. P.²

¹COPPE - Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Espírito Santo. ES, Brasil.

*natansian@ufrj.br

Resumo

A análise estrutural visa estudar o comportamento de estruturas sob diferentes ações, a fim de obter parâmetros e dados importantes para dimensionamentos e projetos, como deslocamentos, tensões e deformações. Todavia, a análise elástica linear convencional não representa adequadamente comportamento real das estruturas, sendo necessário utilizar a análise estrutural não linear. Desta forma, o presente artigo busca introduzir alguns conceitos e aplicações sobre não linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas. Para tanto, utiliza-se os procedimentos numéricos de elementos finitos para solução dos modelos estruturais, sendo implementados as rotinas computacionais em ambiente Matlab. A experimentação numérica é direcionada com dois casos testes, uma viga engastada-livre e um pórtico simples. Em síntese, os resultados mostram-se bem ajustados com as soluções de referência para ambos os casos estudados, indicando a boa performance do programa desenvolvido.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Análise estrutural não linear, Código Computacional.

1 Introdução

Com o avanço de técnicas construtivas e das pesquisas científicas, além do emprego de novos materiais, proporcionaram a construção de estruturas mais esbeltas e com alto desempenho nos últimos séculos. Direcionando paralelamente para análise não linear estrutural, que permite uma maior verossimilhança entre o modelo de engenharia e o comportamento real.

Quando se estuda problemas estruturais não lineares, usualmente, consideram-se duas fontes de não linearidade que ocorrem em estruturas e são significativas na prática da engenharia, devido representar importantes fenômenos que ocorrem nas estruturas quando sujeitas aos carregamentos. A primeira fonte é a não linearidade física, associado ao comportamento constitutivo do material. A segunda fonte é a não lineari-

dade geométrica, tendo as estruturas caracterizadas por grandes deslocamentos e/ou rotações, com equações de equilíbrio definidas no estado deformado da estrutura ou também ocorre uma alteração na relação deformação-deslocamento. Ressalta-se ainda que, uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear, mesmo que o material seja elástico linear [1].

2 Equações Gerais

A formulação de pórticos planos não lineares é baseada no referencial Lagrangiano atualizado, sendo na configuração C_1 , definindo as componentes planas de tensão provenientes do tensor de Cauchy como ${}^t\tau_{xx}$ e ${}^t\tau_{xy}$, e as deformações incrementais de Green ${}^t\varepsilon_{xx}$ e ${}^t\varepsilon_{xy}$. Com base no princípio dos deslocamentos virtuais, pode-se escrever a equação de equilíbrio incremental

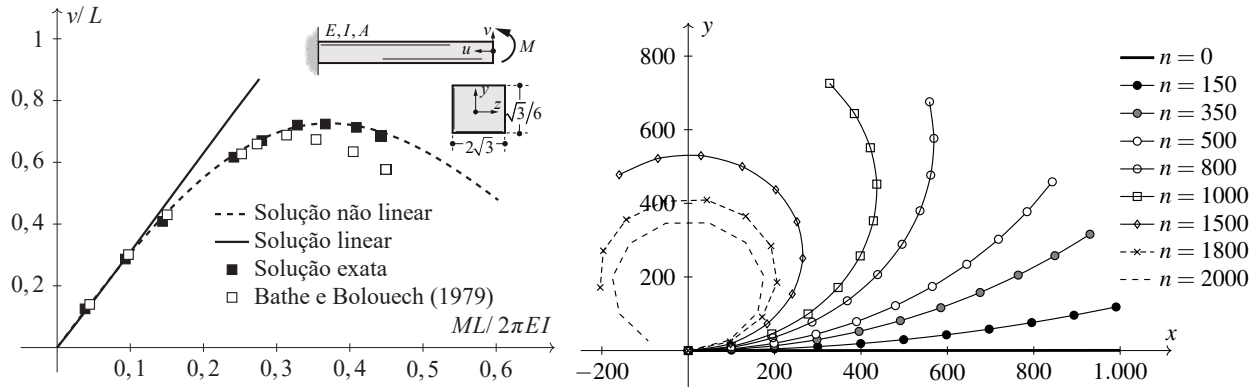


Figura 1: Deslocamento vertical em relação ao fator de carga (esquerda) e deformada da viga engastada-livre com momento na extremidade para diferentes níveis de carga (direita)

do trabalho virtual [2], dado pela Equação (1).

$$\int_V ({}^t\tau_{xx}\delta\eta_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\delta\eta_{xy}) dV + \dots \int_V (Ee_{xx}\delta e_{xx}) dV = {}^{t+\Delta t}R - {}^tR \quad (1)$$

Como a relação deformação-deslocamento é fundamentada pelo tensor de Green-Lagrange, considerando as deformações axiais e cisalhantes, pode-se escrever as relações diferenciais a seguir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} \frac{du_y}{dx} \right) \quad (3)$$

Nas Equações (2) e (3), os primeiros termos representam as parcelas lineares e os demais termos correspondem as parcelas não lineares. Adota-se a hipótese de Euler-Bernoulli, que estabelece que as seções transversais planas permanecem normais ao eixo da barra na flexão. Desta maneira, os deslocamentos u_x e u_y , em um ponto genérico, pode ser associados aos deslocamentos u e v da viga. Logo, os deslocamentos são escritos: $u_x = u - yv'$ e $u_y = v$. Após algumas manipulações, chega-se em uma sentença integral definida no domínio contínuo, realizando

então as aproximações de elementos finitos, tem-se:

$$u = \{\tilde{\mathbf{N}}_1\} \{\bar{u}\} \quad v = \{\tilde{\mathbf{N}}_3\} \{\bar{v}\} \quad (4)$$

Os termos $\{\tilde{\mathbf{N}}_1\}$ e $\{\tilde{\mathbf{N}}_3\}$ representam os vetores que contêm as funções de interpolação, sendo lineares para deslocamento axial e cúbicas para o deslocamento transversal, respectivamente. As aproximações, apresentadas na Equação (4), são aplicadas na formulação integral do problema. Ao fim, chega-se no sistema algébrico final posto na Equação (5).

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]) \{\mathbf{u}\} = \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} \} - \{ {}^t\mathbf{f} \} \quad (5)$$

Onde \mathbf{K}_e é conhecido como matriz de rigidez elástica e \mathbf{K}_g é a matriz geométrica. Para solução desses problemas, utiliza-se os processos incrementais-iterativos, conforme pode ser visto em detalhes em Neves [1].

3 Experimentação Numérica

O primeiro caso é uma viga engastada-livre, com momento aplicado na extremidade livre, de comprimento e módulo de elasticidade iguais a 1000, área da seção transversal e o momento de inércia unitários. Para a solução do problema, adota-se uma tolerância de 10^{-5} e um incremento de carga inicial de $1 \cdot 10^{-2}$. A Figura 1 ilustra o comportamento do deslocamento vertical, medido na extremidade livre da viga, e a deformada da estrutura, onde pode-se notar que a diferença

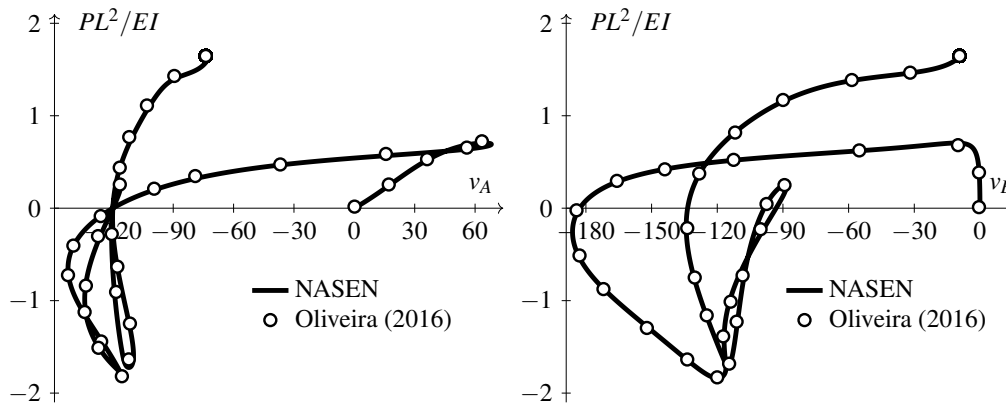


Figura 2: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento v_A e v_B

entre as soluções numéricas, considerando ou não os efeitos não lineares.

O segundo caso é composto por um pórtico simples, conforme esquematizado na Figura 3, onde adota-se o módulo de elasticidade igual a 720 kN/cm^2 . Os parâmetros iniciais do processo incremental-iterativo são iguais ao caso anterior. As medições de resultados são realizadas nas extremidades A e B, visando extrair os deslocamentos verticais em cada ponto.

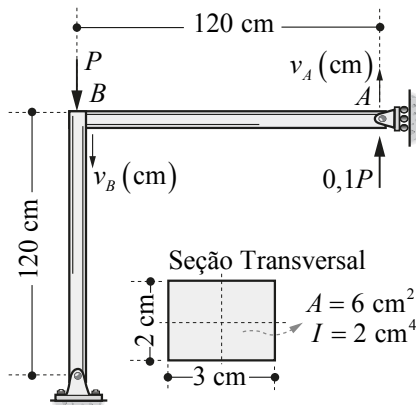


Figura 3: Pórtico de Roorda adaptado

Na Figura 2, mostra-se que os resultados obtidos pelo programa desenvolvido NASEN, apresenta um comportamento semelhante com a solução da literatura. Os caminhos de equilíbrio apresentados indicam inúmeros pontos limites de deslocamento e carga, evidenciando a forte natureza não linear do problema.

4 Conclusão

Este artigo buscou apresentar alguns conceitos e as principais sentenças matemáticas de um mo-

delo estrutural não linear geométrico via elementos finitos. Após os resultados e testes realizados é possível concluir que o comportamento das estruturas estudadas foram bem representadas. Além disso, aprimoramentos e considerações de novas fontes de não linearidade são objetivos para pesquisas futuras, a fim de expandir o módulo de análise estrutural do programa NASEN.

Referências

- [1] NEVES, N. S. Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos. 2019. 260 f. Dissertação (Mestrado), UFES, Vitória, 2019.
- [2] REDDY, Junuthula Narasimha. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. OUP Oxford, 2014.
- [3] BATHE, Klaus-Jurgen; BOLOURCHI, Said. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. International journal for numerical methods in engineering, v. 14, n. 7, p. 961-986, 1979.
- [4] OLIVEIRA, G. C. Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não linear de pórticos e arcos. 2016. Dissertação de Mestrado, UFB, Brasília, Brasil.