

# A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo

Oakes, A. O. G.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, Itapetinga, BA, Brazil  
andre.goncalves@ifbaiano.edu.br

## Resumo

*In this work, we intend to investigate the application of the Schroedinger equation in a minimum length scenario for a potential already known in nature. In this perspective, we will apply to the potential barrier, whose ordinary case is already widely known in the literature. We intend to show the solutions of the Schroedinger equation in this scenario, the stationary solutions and, finally, discuss the transmission coefficient of the wave.*

## 1 Introdução

O Modelo Padrão das partículas elementares é um modelo que começou a ser construído mais ou menos na metade do século passado e, já no século presente, conseguiu ser testado experimentalmente com observações que corroboram com a física teórica. Apesar deste sucesso, ainda temos problemas com a quantização da gravitação.

Ao quantizarmos a gravitação, aparecem problemas de renormalização tornando os resultados obtidos como não sendo resultados físicos aceitáveis. Na tentativa de contornar este problema, existem teorias que atualizam o modelo padrão como uma teoria além do modelo padrão (Beyond-Standard-Model), onde formas diferentes de se incorporar a gravitação são propostas. A maioria destas propostas corroboram com a existência de um mínimo compri-

mento na natureza.

Uma revisão histórica do avanço das pesquisas envolvendo o comprimento mínimo pode ser obtido em [1].

Neste trabalho, pretendemos apresentar a equação de Schroedinger num cenário de comprimento mínimo através da regra de quantização proposta por Kempf, utilizando também o seu ferramental matemático para a mecânica quântica num cenário de comprimento mínimo [2, 3]. Na sequência, vamos aplicar essa equação num clássico problema de barreira de potencial.

## 2 O Comprimento Mínimo

Quando dizemos que há um comprimento mínimo na natureza, é possível fazer uma conexão com uma incerteza

mínima na medida da posição. Nesta perspectiva, se torna eficaz inserir um mínimo comprimento na mecânica quântica através de uma modificação do princípio da incerteza de Heisenberg (em inglês HUP - Heisenberg uncertainty principle) [4, 5], o que nos leva a um princípio da incerteza generalizado (em inglês GUP - generalized uncertainty principle). A proposta mais usual é:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle), \quad (1)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro que marca a presença do comprimento mínimo e deve ser bem pequeno comparado aos termos ordinários. Note que quando fazemos  $\beta = 0$ , recobramos a teoria original. Com essa alteração no HUP, podemos chegar a um mínimo valor para a incerteza na posição, dada por:

$$\Delta x_o = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (2)$$

Também podemos plotar uma curva, onde percebemos o comportamento da incerteza do momento em relação a incerteza na posição. Essa curva fica:

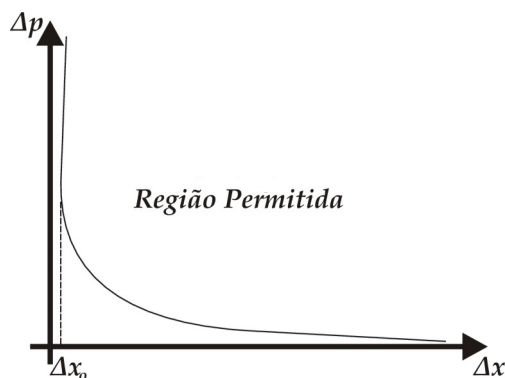


Figura 1: Comportamento da incerteza do momento em relação à incerteza da posição. Fonte: próprio autor.

Para que tenhamos a relação de incerteza desejada, é necessário que modifiquemos a comutação entre os operadores de posição e momento. Logo, para que tenhamos 1, então será necessária a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2). \quad (3)$$

Essas modificações levam a um espaço de Hilbert onde a representação no espaço de posição não pode ser mais permitida, pois os autoestados de posição que formariam uma base, não são mais ortogonais entre si, impossibilitando que outros estados sejam descritos como combinação linear deles. A ideia de posição é reconstruída com um novo conceito chamado de quase-posição, onde é possível encontrar uma base onde outros estados possam ser expandidos [2]. Desta forma, inicialmente se descreve a ação dos operadores de momento e posição no espaço de momentos, onde podemos ter a definição de produto interno, relação de completude e normalização. Nesta representação, temos:

$$\hat{p} \rightarrow p \quad (4)$$

$$\hat{x} \rightarrow (1 + \beta p^2) \partial_p. \quad (5)$$

É importante frisar que  $x$  não é um auto valor do operador de posição com significado físico. Caso o leitor queira se aprofundar no tema, as seguintes referências são suficientes: [2, 1, 4].

Esse espaço é estruturado de modo que seu produto interno esteja definido com:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p), \quad (6)$$

relação de completeza:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p|, \quad (7)$$

e, finalmente, a relação de ortonormalização:

$$\langle p|p'\rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (8)$$

### 3 A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo

A equação de Schroedinger é obtida quando quantizamos os operadores de posição e momento na hamiltoniana. Em geral, temos numa hamiltoniana típica a energia cinética da partícula e o potencial ao qual ela está submetida.

Como queremos trabalhar no espaço de quase posições, vamos propor uma diferente quantização do vetor de onda. No caso ordinário, este vetor é dado pela equação de de Broglie:

$$\hat{p} = \hbar \hat{k}. \quad (9)$$

A quantização agora fica com o vetor de onda, que pode ser definido com:

$$\hat{k} \rightarrow -i\partial_x. \quad (10)$$

Aqui, iremos modificar essa relação para a inserção do comprimento mínimo. Essa inserção deve produzir também o GUP, e é dada por:

$$\hat{p} = \hbar \hat{k} + \frac{1}{3} \beta \hbar^3 \hat{k}^3. \quad (11)$$

Na literatura é possível encontrar outras formas de se expressar essa relação. O leitor que se interessa pelo assunto

pode encontrar facilmente esses artigos on line. [2, 4, 6, 7, 8]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \quad (12)$$

Utilizando dependência 11:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hbar \hat{k} + \frac{1}{3} \beta \hbar^3 \hat{k}^3 \right)^2 + V(\hat{x}). \quad (13)$$

Desprezando os termos de  $\mathcal{O}(\beta^2)$ , ficamos com:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{k}^2}{2m} + \frac{\beta \hbar^4 \hat{k}^4}{3m} + V(\hat{x}). \quad (14)$$

Usando a quantização 10 e fazendo agir a Hamiltoniana sobre um estado  $|\Psi(x)\rangle$ , temos:

$$i\hbar \partial_t \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi(x, t) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \partial_x^4 \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t). \quad (15)$$

Como a dependência temporal é de primeira ordem, após a separação de variáveis ficamos com uma equação independente do tempo e uma apenas dependente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad (16)$$

$$\Phi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (17)$$

Agora vamos aplicar essa equação num clássico problema de barreira de potencial.

### 4 Barreira de Potencial

Uma barreira de potencial é uma região do espaço onde temos um potencial finito que age entre dois pontos. A

função potencial e a representação gráfica do mesmo estão a seguir.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a \\ V_o, & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (18)$$

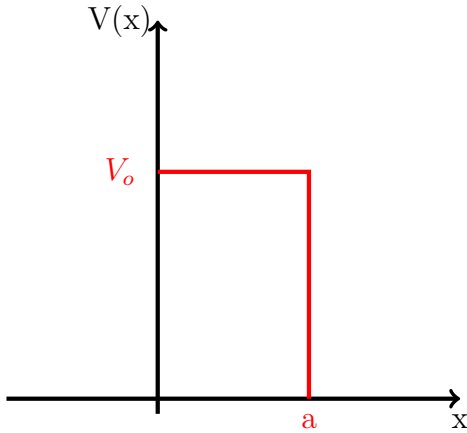


Figura 2: Modelo gráfico de uma barreira de potencial. Fonte: próprio autor.

Devemos ter as soluções da equação de Shcroedinger em três regiões, duas fora do potencial e uma na presença do potencial. Vamos analisar aqui apenas o caso em que a energia da partícula é menor do que o potencial. Desta forma, esperamos ter três funções de onda que irão respeitar as condições de contorno que discutiremos mais além.

Na região fora do potencial, trata-se de uma partícula livre. Assim:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) = E \psi(x). \quad (19)$$

Se  $e^{rx}$  é uma solução, então teremos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} r^2 + \frac{\beta \hbar^4}{3m} r^4 - E = 0. \quad (20)$$

<sup>1</sup>Esperamos que uma equação diferencial de quarta ordem tenha quatro soluções linearmente independentes. No entanto, duas dessas soluções são com exponenciais reais e não tem significado físico. Para uma maior discussão, o leitor pode se apropriar do trabalho de Oakes *et al* [9, 10]

Fazendo  $\alpha = r^2$  e rearranjando os coeficientes, temos:

$$\frac{2}{3} \beta \hbar^2 \alpha^2 - \alpha - \frac{2mE}{\hbar^2} = 0. \quad (21)$$

Encontrando as raízes, fazendo as devidas aproximações para que não tenhamos termos em  $\mathcal{O}(\beta^2)$ , ficamos com as seguintes soluções:<sup>1</sup>

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0 \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx}, & x > a \end{cases} \quad (22)$$

com

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} \left( 1 + \frac{2}{3} \beta m E \right)}. \quad (23)$$

Na região com o potencial, ficamos com a seguinte equação diferencial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4}{dx^4} \psi(x) + (V_o - E) \psi(x) = 0, \quad (24)$$

com soluções:

$$\psi(x) = Ge^{k_1 x} + He^{-k_1 x}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (25)$$

com

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2} \left( 1 - \frac{1}{3} \beta m (V_o - E) \right)}. \quad (26)$$

#### 4.1 Condições de Contorno

De posse de todas as soluções em cada região do espaço, podemos aplicar as condições de contorno. Primeiramente, não esperamos que haja reflexão da partícula quando estiver na região  $x > a$ , o que nos permite fazer  $D = 0$ .

Esperamos que a função seja contínua em  $x = 0$  e  $x = a$ , bem como

a derivada de primeira ordem dessa função. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0), \\ A + B &= G + H, \\ \psi_1'(x=0) &= \psi_2'(x=0), \\ (A - B)ik &= k_1(G - H). \quad (27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(a) &= \psi_3(a), \\ Ge^{k_1a} + He^{-k_1a} &= Ce^{ika}, \\ \psi_2'(x=a) &= \psi_3'(x=a), \\ (Ge^{k_1a} - He^{-k_1a})k_1 &= ikCe^{ik_1a} \quad (28)\end{aligned}$$

A solução final fica:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{Ce^{ika}}{4kk_1} (4kk_1 \cosh(k_1a) + \\ & 2i(k^2 + k_1^2) \sinh(k_1a)) e^{ikx} + (29) \\ & - \frac{iCe^{ika}}{4kk_1} 2(k^2 + k_1^2) \sinh(k_1a) e^{-ikx}, \quad x < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \frac{Ce^{ika}}{2e^{k_1a}} \left(1 + \frac{ik}{k_1}\right) e^{k_1x} + \\ & \frac{Ce^{ika}}{2e^{-k_1a}} \left(1 - \frac{ik}{k_1}\right) e^{k_1x}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (30)\end{aligned}$$

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx}, \quad x > a. \quad (31)$$

Embora essas soluções sejam muito parecidas com o caso ordinário, é importante lembrar que os vetores de onda  $k$  e  $k_1$  são dependentes de  $\beta$ . De certo modo, esse resultado acaba sendo bastante interessante por se tratar de uma correção que recobra o caso ordinário quando fazemos  $\beta = 0$ , e isso é esperado pois a correção em primeira ordem de  $\beta$  não pode alterar os resultados já conhecidos.

Um outro parâmetro relevante a ser discutido é o coeficiente de transmissão

de partículas, ou seja, a parte da onda que atravessa a barreira de potencial e viaja na região  $x > a$ . Para isso, devemos fazer a razão entre o coeficiente da onda que passa de  $x = a$  pelo coeficiente da onda que alcança o ponto  $x = 0$ . Logo:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}. \quad (32)$$

No caso ordinário, temos:

$$T = \left[ 1 + \frac{1 + \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2}} a \right)}{4 \frac{E}{V_o} \left( 1 - \frac{E}{V_o} \right)} \right]^{-1} \quad (33)$$

Para o caso com correção em primeira ordem para o comprimento mínimo, temos:

$$\begin{aligned}T &= \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{4}{3} \beta m E \left( 1 + \frac{E^2 + V_o^2}{4EV_o} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2}} \left( 1 - \frac{1}{3} \beta m (V_o - E) \right) a \right) \right] \div \\ & \left. \div \left[ 4 \frac{E}{V_o} \left( 1 - \frac{E}{V_o} \right) \right] \right\}^{-1} \quad (34)\end{aligned}$$

Note que se cancelarmos os termos com dependência em  $\beta$ , a teoria ordinária é recobrada.

## 5 Conclusões

Neste trabalho, pudemos apresentar uma aplicação da equação de Shroedinger num cenário de comprimento mínimo a um potencial já conhecido na literatura. Os termos de correção em primeira ordem de  $\beta$  estão associados à inserção do comprimento mínimo na natureza, logo se o retiramos de nossas

correções a teoria ordinária é restabelecida.

Em trabalhos futuros, espera-se aplicar este mesmo ferramental para diferentes tipos de potenciais, sempre tentando observar a discrepância entre as correções em primeira ordem de  $\beta$  e a teoria ordinária.

## Referências

- [1] Gonçalves, A. O. O. A Equação de Schroedinger num Cenário de Comprimento Mínimo. Tese (Doutorado em Física), Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.
- [2] Kempf, A; Mangano G.; Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev.*, vol D52, 1995.
- [3] Kempf, A. On quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta, *Journal of Mathematical Physics*, vol 38, n. 3, 1997. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1063/1.531814>.
- [4] Pedram, P. New approach to non-perturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty, *Physical ReviewD*, vol 85, 2011.
- [5] Pedram, P. A class of GUP solutions in deformed quantum mechanics. *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 19, 2010. Disponível em [arXiv:1103.3805](https://arxiv.org/abs/1103.3805)
- [6] Hossenfelder, S. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Rev. Relativity*, vol 16, n. 2, 2013.
- [7] Dorsh, G.; Nogueira, J. A. Maximally Localized States in Quantum Mechanics with a Modified Commutation Relation to All Orders. *International Journal of Modern Physics A* Vol. 27, No 21, 2012. Disponível em [arXiv:1106.2737](https://arxiv.org/abs/1106.2737)
- [8] Pedram, P. A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum. *Physics Letters B*, Volume 714, números 275, 2012.
- [9] Oakes, A. O. G.; Gusson, M. F.; Dilem, B. B.; Furtado, R. G.; Francisco, R. O.; Fabris, J. C.; Nogueira, J. A. An infinite square-well potential as a limiting case of a square-well potential in a minimal-length scenario. *International Journal of Modern Physics A* Vol. 35, No. 14, 2020.
- [10] Gusson, M. F.; Oakes, A. O. G.; Dilem, B. B.; Furtado, R. G.; Francisco, R. O.; Fabris, J. C.; Nogueira, J. A. Dirac  $\delta$ -function potential in quasiposition representation of a minimal-length scenario. *European Physical Journal C*, vol 78 n. 3, 2018.