# Influência da Distribuição de Pólos Internos na Técnica de Interpolação Direta de Elementos de Contorno

Pinheiro, V. P. [1,2*] ; Loeffler, C.F. [1] ; Melo, L.D.V. [3] Candido, D.C.M. [4]

1 PPGEM/UFES -Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.
2 CCTM/IFES - Coordenadoria do Curso Técnico em Mecânica, Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Guarapari, ES, Brasil.
3 PRPPGE/UVV, Programa de Iniciação Científica em Métodos Numéricos, Universidade Vila Velha, Vila Velha, ES, Brasil.
4 PPGEC/UFES -Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

∗ e-mail: vitor.pinheiro1987@gmail.com

**Resumo**

A técnica da Interpolação Direta de Elementos de Contorno (MECID) é baseada, tal como sua predecessora, Dupla Reciprocidade (MECDR), em uma aproximação de integrais de domínio via funções de bases radiais. A diferença central entre as técnicas, reside em uma aproximação de todo o núcleo da integral, na proposta MECID, o que gera uma conhecida sensibilidade e demanda em relação a quantidade e distribuição dos pólos internos no domínio. Tal sensibilidade já foi confirmada em diversos problemas de campos escalar tais como em modelos de Poisson e Helmholtz. No vigente artigo investiga-se como a distribuição dos pólos internos afeta na precisão consequente da técnica MECID em um exemplo numérico advectivo-difusivo com velocidade variável. As avaliações de precisão são feitas em contraponto a soluções analíticas bem estabelecidas.

Palavras-Chave: Interpolação Direta; Dupla Reciprocidade; Construção de Malha; Modelos de Advecção-Difusão, Pólos Internos.

# 1 Introdução

O método de elementos de contorno (MEC) em sua formatação clássica surgiu com a proposta de discretizar apenas o contorno do domínio, com uma vantagem estratégica de redução de dimensão, onde um problema bidimensional, por exemplo, passa a requerir uma malha com elementos apenas unidimensionais [1]. Todavia, a complexidade de se obter determinadas soluções fundamentais para operadores diferenciais mais robustos e a lida com matrizes complexas, foram alguns dos fatores que motivaram o proposição de novas abordagens para o MEC.

Neste contexto surgem abordagens que utilizam uma solução fundamental mais simples, normalmente de Poisson/Laplace, e aproximam integrais remanescentes de domínio via funções de bases radiais, como a pioneira técnica Dupla Reciprocidade (MECDR) [2]. Esta formulação não apresenta, na literatura correlata [3], uma sensibilidade aguçada com a quantidade nem com a distribuição de pólos internos, de forma geral.

A técnica de Interpolação Direta (MECID), mais recente, que propõe a aproximação de todo o núcleo das integrais de domínio, em vez de apenas uma parte como preconiza a MECDR, se assemelha estruturalmente a um procedimento de interpolação convencional [4]. A formulação vem sendo testada em diversos problemas de campo escalar em duas e três dimensões, e responde de forma consistente [6],[5]. Esta formulação tem uma sensibilidade característica a quantidade e disposição espacial dos pólos internos, demandando-os em maior quantidade em relação à Dupla Reciprocidade.

O vigente artigo seleciona um modelo advectivo-difusivo com campo de velocidade dependente do espaço, para avaliar de formar preliminar a influência da quantidade e posicionamento dos pólos internos na performance da técnica de Interpolação Direta (MECID).

# 2 Modelagem Matemática

A formulação matemática é suncintamente exposta nesta seção, onde inicia-se pela equação de governo de um problema advectivo-difusivo estacionário em meio homogêneo, dada pela equação 1, onde $\lambda$ contabiliza a difusividade térmica do meio.

$$\lambda u_{,ii} = v_i u_{,i} \tag{1}$$

A multiplicação de ambos os lados pela solução fundamental de Poisson/Laplace e integração no domínio gera a formulação integral forte do problema.

$$\int_\Omega u_{,ii} u^* d\Omega = \int_\Omega v_i u_{,i} u^* d\Omega \tag{2}$$

O tratamento via MEC da parcela difusiva, no lado esquerdo da equação 2, já é conhecido [8] e tem sua formulação integral inversa dada pela equação 3 na sequência.

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma u q^* d\Gamma - \int_\Gamma q u^* d\Gamma \tag{3}$$

Todavia o tratamento do lado advectivo tem aspectos desafiantes. O problema selecionado para análise, com campo hidrodinâmico variável, por decorrência, inclui efeitos de compressibilidade, contabilizados no divergente do campo de velocidades $v_{i,i}$. Após integrações por partes o lado advectivo, que compõe a parte direita da equação 2, pode ser escrito como segue.

$$\int_\Gamma n_i v_i u u^* d\Gamma - \int_\Omega v_i u^*_{,i} u d\Omega - \int_\Omega v_{i,i} u^* u d\Omega \tag{4}$$

Na equação 4, a primeira integral já encontra-se no contorno, e as duas seguintes podem ser submetidas a um processo de regularização, vide [7], já integrante da formulação padrão do MECID. Com isso a formualçao integral final do lado advectivo dá-se por:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma n_i v_i u u^* d\Gamma - u_\xi \int_\Gamma n_i v_i u u^* d\Gamma \\ &\quad + \int_\Omega v_i u^*_{,i} \left[ u - u_\xi \right] d\Omega \\ &\quad - \int_\Omega v_{i,i} u^* \left[ u - u_\xi \right] d\Omega \end{aligned} \tag{5}$$

A equação 5, que integraliza o tratamento do lado advectivo, juntamente com a equação 3, completam a formulação integral final do problema proposto.

# 3 Interpolação Direta

A filosofia da técnica de Interpolação Direta consiste em um aproximação completa do núcleo das integrais de domínio, via uma combinação linear de funções de bases radiais, direcionadamente escolhidas [9].

A álgebra da aproximação tem uma estrutura tal como a da equação 6 abaixo, onde, toma-se como exemplo, a aproximação da terceira integral presente na equação 5.

$$v_i u^*_{,i} \left[ u - u_\xi \right] \cong \quad \alpha^\xi_j F_j(X_j, X) \tag{6}$$

No modelo de advecção-difusão em questão, a última integral na equação

5, correlata aos efeitos da compressibilidade, também é alvo da aproximação da MECID. O sistema linear final característico do MEC gerado tem a seguinte estrutura.

$$\left[\overline{H}\right]\{u\} = \left[\overline{G}\right]\{q\} \tag{7}$$

As matrizes alteradas $\overline{H}$ e $\overline{G}$ são resultado superposto de várias matrizes distintas geradas na formulação.

# 4 Aspectos de Malha

No caso de técnicas focadas em aproximação por bases radiais como a MECID e também a MECDR, a malha de elementos de contorno tem dois parâmetros relevantes: elementos de contorno (EC) e pólos internos (PI) no domínio. Vide o esquema abaixo da Figura 1 que representa uma malha típica.

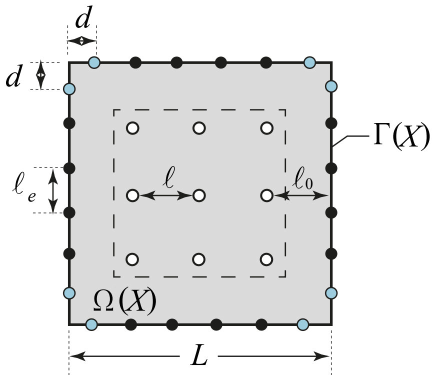


Figura 1: Malha Computacional

Na Figura 1 a cota $l_e$ representa o tamanho de cada elemento de contorno, $d$ o distanciamento de nós duplos, $L$ comprimento característico da geometria quadrada, $l$ distanciamento de pólos internos não adjacentes ao contorno e $l_0$ distanciamento dos pólos internos adjacentes ao contorno. Neste estudo a relação entre $l_0$ e $l$ é dada por $l_0 = \alpha l$.

# 5 Experimento Numérico

Os testes realizados baseiam-se no esquema da Figura 2, com as devidas condições contorno impostas e onde observa-se uma situação de advecção-difusão estacionária com velocidade variável.

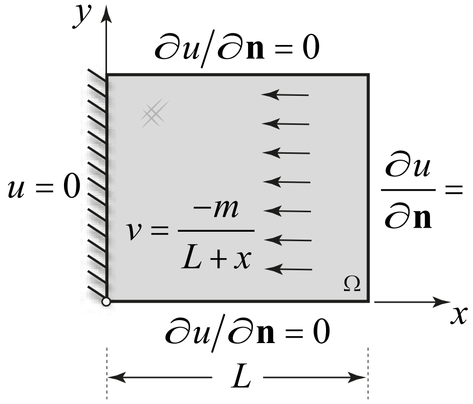


Figura 2: Croqui do Problema Físico

Por ser tratar de um problema com comportamento unidimensional, pela simetria das condições de contorno, após testes preliminares, seleciona-se uma malha com 80EC e 81 IP. Varia-se então o parâmetro $\alpha$, com $m$ unitário.

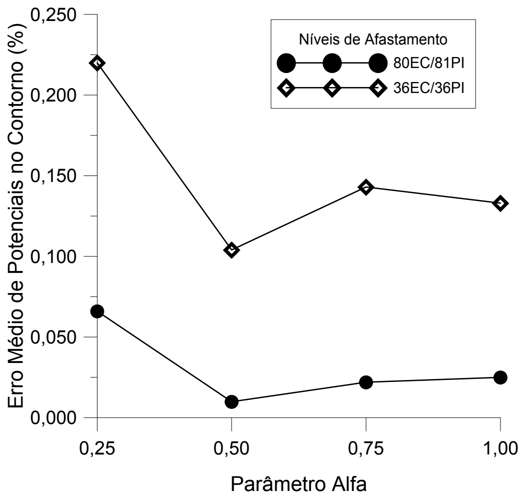


Figura 3: Parâmetro Alfa

Na Figura 3, observa-se uma tendência de menores erros médios quando o afastamento dos nós internos adjacentes ao contorno equivale a metade do afastamento original de uma malha completamente uniforme ($l = l_0$), ou seja com $\alpha = 0.5$. Este comportamento é recorrente para os dois níveis de refinamento de malha testados.

Em um segundo e último teste, aumenta-se os efeitos da advecção juntamente com o módulo de dilatação volumétrica do escoamento, ao gradativamente incrementar o parâmetro $m$, e testam-se três níveis para $\alpha$ para um intervalo em que $m$ varia de 1 a 5.

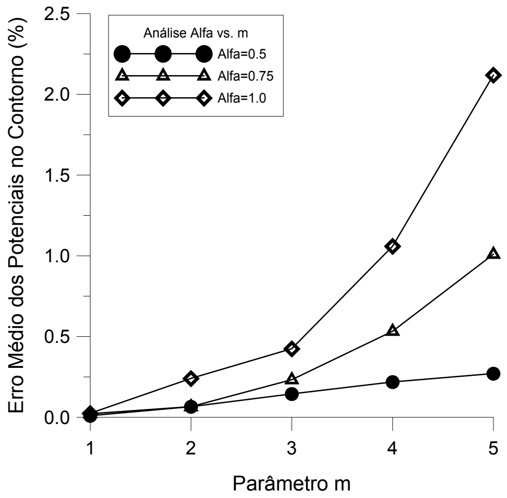


Figura 4: Parâmetro Alfa x Parâmetro m

A Figura 4 deixa muito clara a redução nos níveis de erros provocados por um melhor ajuste do parâmetro $\alpha$, onde a curva com $\alpha = 0.5$ tem maior precisão em relação a seus pares.

# 6 Considerações Finais

Este foi um estudo inicial sobre a distribuição espacial dos pólos internos e seu consequente impacto na precisão do método de Interpolação Direta. Para o problema advectivo-difusivo compressível testado, mostrou-se que há uma posição ótima para a fileira de pontos internos adjacentes ao contorno que minimiza os erros médios cometidos pelo MECID. Há uma demanda por testes mais sistêmicos também em outros modelo de campo escalar, de forma a identificar padrões diretrizes, que possam extrair a melhor performance da técnica MECID.

# Referências

[1] Kythe, O. J. An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Press, Boca Ratton, USA,1995.

[2] Nardini D., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. Applied Mathematical Modelling, 1983, vol. 7, pp. 157-162.

[3] Partridge P. W., Brebbia C.A., Wrobel L.C. The Dual Reciprocity, Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, UK, 1992.

[4] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, vol. 50, pp. 97-108.

[5] Barbosa, J.P., Loeffler, C.F., Lara L.O.C. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, vol. 108, pp. 295 - 300.

[6] Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, Vol. 61, pp. 218-225.

[7] Loeffler, C. F., Mansur, W. J. (2017). A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, 74, 14-18.

[8] Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques, First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

[9] Buhmann, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations, first ed., Cambridge University Press, New York, USA, 2003.