Análise de Estabilidade Numérica do Método de Elementos de Contorno aplicado a Modelos Advectivo-Difusivos

Pinheiro, V. P. [1,3*] ;Loeffler, C.F. [1] ; Neves, N.S. [2] ; Almeida, L.M. [4]

1 PPGEM/UFES -Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.
2 COPPE/UFRJ - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
3 CCTM/IFES - Coordenadoria do Curso Técnico em Mecânica, Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Guarapari, ES, Brasil.
4 Programa de Iniciação Científica em Métodos Numéricos, Universidade Vila Velha, Vila Velha, ES, Brasil.

∗ e-mail: vitor.pinheiro1987@gmail.com

Resumo

A estabilidade numérica frente a problemas físicos com influência significativa de efeitos advectivos é desafio científico para métodos numéricos de forma geral, dentre eles o método de elementos de contorno. A formulação clássica do método mostra-se restrita a situações com campos constantes de velocidade, apesar de representar com precisão problemas com efeitos dominantes da advecção. No contexto de formulações fundamentadas em aproximações via funções de bases radiais, a técnica da Dupla Reciprocidade (DRBEM) apresenta boa flexibilidade em casos com variação espacial no campo de velocidade, mas tem limitação em relação a baixos números de Peclet. Uma alternativa competitiva e eficaz é representada pela mais recente técnica da Interpolação Direta (DIBEM), que já apresentou resultados consistentes em diversos problemas de campo escalar, inclusos modelos advectivo-difusivos. Neste artigo pretende-se executar uma comparação direta entre as técnicas de DRBEM e DIBEM em um problema bidimensional de natureza advectivo-difusiva, afim de determinar qual das duas propostas apresenta uma melhor estabilidade numérica em uma análise paramétrica com velocidade crescente do escoamento. As soluções geradas tem sua precisão mensurada via soluções analíticas, sendo possível constatar a superioridade da técnica DIBEM, no caso em análise.

Palavras-Chave: Interpolação Direta; Dupla Reciprocidade; Análise Comparativa; Modelos de Advecção-Difusão; Estabilidade Numérica.

1 Introdução

A proposta clássica do Método de Elementos de Contorno (BEM), contempla o uso de uma solução fundamental, correlata ao problema físico em questão, que raramente tem dedução matemática simplória. Em problemas de advecção-difusão esta abordagem situa-se restrita a casos de velocidade uniforme, mas é capaz de descrever de forma verossímil a intensificação da parcela convectiva [1].

A formulação de Dupla Reciprociade (DRBEM) proposta por Nardini e Brebbia [2], confere ao BEM uma ampla flexibilidade, ao utilizar a solução fundamental auxiliar de Laplace e aproximar eventuais integrais de domínio restantes via funções de bases radiais [8]. Esta formulação, em modleos advectivo-difusivos tem a capacidade de representar campos de velocidades variáveis, mas limita-se a situações com baixo número de Peclet [3].

A formulação alternativa de Interpolação Direta (DIBEM), proposta por Loeffler e Mansur [4], assemelha-se em certo ponto a sua predecessora, mas impõe uma aproximação de todo o núcleo das integrais de domínio via funções de bases radiais. Esta técnica já foi testada em diversos problemas de campo escalar relevantes, e no contexto de advecção-difusão, foi mais detalhadamente avaliada no trabalho de Pinheiro [9].

Este artigo, tem por intuito comparar de forma direta o desempenho das formulações pautadas em aproximações por bases radiais, DRBEM e DIBEM, em um problema advectivo-difusivo, e avaliar a precisão e estabilidade das mesmas frente a incrementos graduais na magnitude dos efeitos da advecção.

2 Formulação Integral

O modelo advectivo-difusivo na equação 1, considera um meio homogêneo e escoamento com campo de velocidade constante.

$$\lambda u_{,ii} = v_i u_{,i} \qquad \lambda = \frac{k}{\rho c_p} \tag{1}$$

Onde λ representa a difusividade térmica do meio, k a condutividade térmica, ρ a massa específica, c_p o calor específico a pressão constante e v_i o campo hidrodinâmico de velocidade. Multiplica-se a equação 1 pela solução fundamental u^* e integra-se gerando a formulação integral forte do problema, na equação 2.

$$\int_\Omega u_{,ii} u^* d\Omega = \int_\Omega v_i u_{,i} u^* d\Omega \tag{2}$$

O lado esquerdo, que contabiliza a parcela difusiva tem tratamento integral inverso bem conhecido [6], e sua forma final é mostrada na equação 3.

$$c_\xi u_\xi + \int_\Gamma u q^* d\Gamma - \int_\Gamma q u^* d\Gamma \tag{3}$$

O processo de regularização [10] realizado no lado advectivo, mostrado a seguir pela equação 4, promove um tratamento da singularidade quando o ponto campo u coincide com o ponto fonte u_ξ.

$$\int_\Gamma v_i n_i u u^* d\Gamma - \int_\Omega v_i u_{,i}^* u d\Omega + \int_\Omega v_i u_{,i}^* u_\xi d\Omega - \int_\Omega v_i u_{,i}^* u_\xi d\Omega \tag{4}$$

O lado direito, que quantifica os efeitos advectivos no modelo, após um processo de regularização, e condensadas as devidas integrais possíveis, torna-se:

$$\int_\Gamma v_i n_i u u^* d\Gamma - \int_\Omega v_i u_{,i}^* \left[u - u_\xi\right] d\Omega - \int_\Omega v_i u_{,i}^* u_\xi d\Omega \tag{5}$$

3 Interpolação Direta

A proposta de Interpolação Direta fundamenta-se em uma aproximação de todo o núcleo da integral de domínio de interesse. Na equação 5, o foco é aproximar a segunda integral regularizada, uma vez que a terceira pode ser levada ao contorno, vide [9].

A aproximação DIBEM tem o formato da equação 6 e a escolha da função de base radial é uma linha de pesquisa contínua [8].

$$v_i u_{,i}^* \left[u - u_\xi\right] \cong \quad \alpha_j^\xi F_j(X_j, X) \tag{6}$$

Neste trabalho a função de base radial de placa fina $r^2 \ln r$ é utilizada. Os elementos de contorno são lineares isoparamétricos e as integrações numéricas realizadas com quadratura de Gauss clássica com 20 pontos de aproximação.

4 Estudo de Caso

O domínio computacional adotado para testar a comparação de formulações proposta é um quadrado de dimensões unitárias e sujeito às condições de contorno na Figura 1.

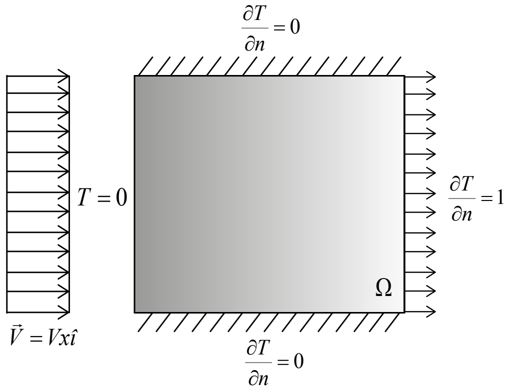

Figura 1: Domínio Computacional

A convergência da malha é testada aqui correlacionada aos potenciais incógnitos determinados pelo BEM no contorno, e com sensibilidade a: número de polos internos (PI) e número de elementos de contorno (EC).

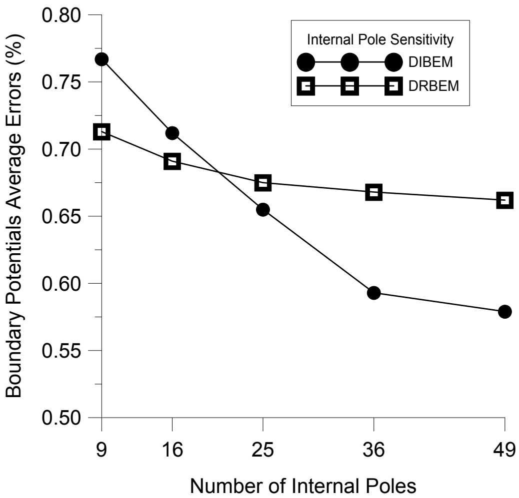

Figura 2: Convergência - Parâmetro PI

Os resultados na Figura 2 acima, confirmam um comportamento já conhecido de maior sensibilidade do DIBEM ao refinamento da malha interna [4] para 16 EC fixados. Num geral, a DRBEM não custuma ser tão sensível a este parâmetro, observando-se com o refinamento dos polos internos uma precisão mais favorável da técnica DIBEM.

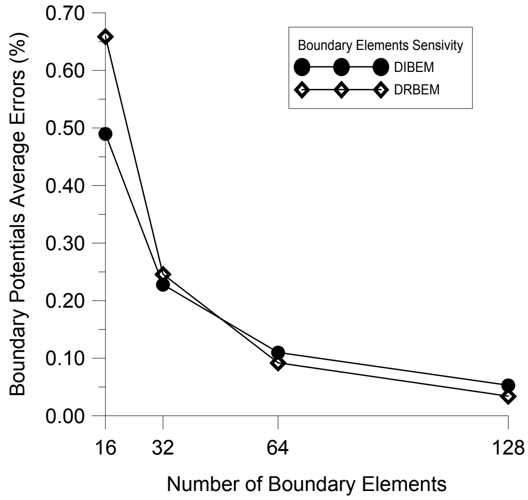

Figura 3: Convergência - Parâmetro EC

Em relação a discretização do contorno, na Figura 3, as duas técnicas mostram precisões muito parecidas a medida que o número de elementos de contorno é enriquecido com 64 PI fixados, não havendo distinção de performance neste parâmetro.

Por fim, uma análise paramétrica promove uma intensificação dos efeitos advectivos via gradual aumento do número de Peclet. Os resultados para uma malha 64EC/225PI são mostrados na Figura 4, que segue.

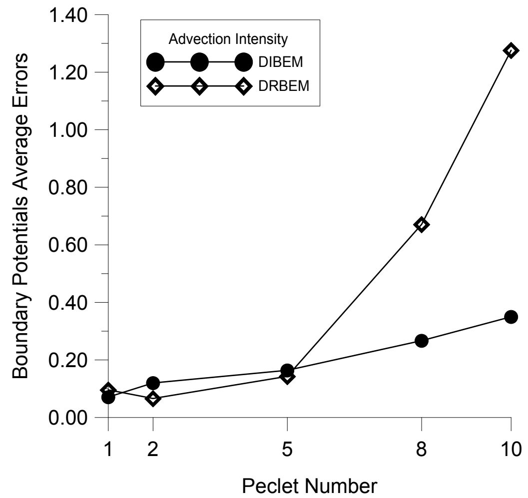

Figura 4: Análise Paramétrica com Número de Peclet

Os resultados sugerem uma maior estabilidade numérica por parte da formulação DIBEM para número Peclet até mesmo moderados. Por outro lado, a técnica DRBEM apresenta um crescimento de erros mais acentuado a partir de Pe=5, o que sugere uma menor precisão a partir desta intensidade de advecção.

5 Considerações Finais

Os resultados para o modelo de adveção-difusão, relativamente simples testado, apontam para um comportamento mais estável da formulação DIBEM, frente à DRBEM, em cenários físicos com número de Peclet moderado. Este comportamento vem sendo confirmado em outros testes paralelos mais robustos, todavia, carece de uma investigação mais aguda.

Referências

[1] Honma T., Tanaka Y., Kaji I. Regular boundary element solutions to steady-state convective diffusion equations. Engineering Analysis, 1985, vol.2, pp. 95-99.

[2] Nardini D., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. Applied Mathematical Modelling, 1983, vol. 7, pp. 157-162.

[3] Wrobel L.C., DeFigueiredo D.B. A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1991, vol. 8, pp. 312 - 319.

[4] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, vol. 50, pp. 97-108.

[5] Loeffler, C. F., Mansur, W. J. (2017). A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, 74, 14-18.

[6] Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques, First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

[7] Kythe, O. J. An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Press, Boca Ratton, USA,1995.

[8] Buhmann, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations, first ed., Cambridge University Press, New York, USA, 2003.

[9] Pinheiro V.P. Application of the Boundary Element Method with Regularized Direct Integration to Two-dimensional Advective-Diffusive Problems. (in portuguese). Masters Thesis, 2018, Federal University of Espírito Santo.

[10] Pinheiro V.P., Loeffler, C.F., Laquini, R. Application of the Regularized Direct Interpolation Technique of the Boundary Element Mehtod in Diffusion-Advective Stationary Problems. CILAMCE, 2017, Florianópolis, SC, Brazil.