

Desempenho do esquema de integração auto-adaptativo na solução de problemas bidimensionais de potencial pelo Método de Elementos de Contorno

Santos, A. J.^{1*}; Loeffler, C. F.¹

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: aquiladossantos@gmail.com

Resumo

O presente trabalho visa aferir os efeitos numéricos do acoplamento de um esquema de integração auto-adaptativo nos resultados do Método de Elementos de Contorno. Resolvem-se problemas de potencial bidimensionais regidos pela equação de Laplace empregando elementos isoparamétricos quadráticos. Os resultados obtidos com o esquema auto-adaptativo são comparados com os valores numéricos colhidos pelo modelo padrão com Quadratura Gaussiana. Os exemplos-teste foram escolhidos porque dispõem de solução analítica, que serve como referência para validação do aumento de precisão alcançada.

Abstract

The present work aims to assess the impact of the coupling of the self-adaptive integration scheme in the numerical model of the Boundary Element Method. Two-dimensional potential problems governed by the Laplace Equation are solved, using quadratic isoparametric elements. The results obtained with the self-adaptive scheme are compared with the numerical values devoid of the mentioned adaptive scheme just using the Gaussian Quadrature. The chosen examples have analytical solutions, which serve as benchmarks for validation of the improvement in the accuracy achieved.

Keywords (Palavras chaves): Elementos de Contorno, Integração Numérica, Elementos Quadráticos.

1. Introdução

A integração numérica é um dos tópicos de maior relevância no contexto do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Isto se justifica pelo fato de que toda a representação do contínuo é dada apenas pela discretização das suas fronteiras. Em princípio, já que o método reduz o problema a ser resolvido em uma dimensão, seria de se esperar que as integrações fossem mais simples. Contudo, embora a utilização da solução fundamental seja a principal razão da elevada precisão do método, também é causa de problemas relacionados à sua integração ao longo dos elementos de contorno, pois possui a característica peculiar de ser singular.

É possível fazer o cálculo analítico das integrais do MEC em certos casos particulares; contudo, torna-se praticamente inviável realizá-lo para elementos de ordem superior, isto é, onde a variação da variável básica ao longo do elemento não é considerada constante. Um agravante surge no caso de elementos com geometria não retilínea, como no caso de elementos isoparamétricos quadráticos ou superiores em que a função que realiza a transformação das

coordenadas globais num sistema estratégico local, o Jacobiano, não é mais um valor constante e sim uma função da forma geométrica do elemento [1].

2. A equação de Laplace

A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial elíptica de alta relevância, uma vez que possibilita modelar o comportamento de uma variável escalar, o potencial $u(x,y)$, em vários campos da ciência, como, por exemplo, a astronomia, o eletromagnetismo, a mecânica dos fluidos, entre outras aplicações [2]. Em duas dimensões, i.e., no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , a equação de Laplace é dada pela equação (1):

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad (1)$$

Para ser bem posto, o problema dado pela Equação (1) precisa de condições conhecidas no contorno. Estas podem ser do tipo essencial ou natural:

$$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_1; \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ em } \Gamma_2 \quad (2)$$

Da Figura 1, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, e, barras indicam valores conhecidos. Na condição natural, prescrita em Γ_2 , n é o vetor normal externo ao contorno. Condições de contorno mais complexas, tais como combinações das anteriores, isto é:

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (3)$$

Onde, α, β e γ são parâmetros conhecidos e podem ser facilmente incluídos (BREBBIA et al., 1984) [3]; porém, não serão considerados aqui por uma questão de simplicidade.

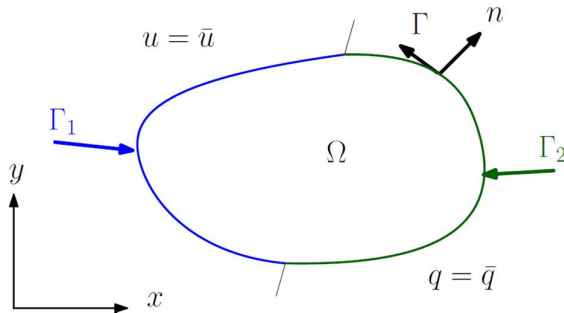


Figura 1: Domínio bidimensional Ω

Considere agora que se busca a solução da Equação de Laplace com as condições de contorno prescritas segundo a eq. (2). Uma das abordagens mais comuns é interpretar os erros introduzidos nas Equações (1) e (2) como se os valores exatos, mas desconhecidos, de u e q fossem substituídos por uma solução aproximada. Tal abordagem segue os princípios do Método dos Resíduos Ponderados [4] em conjunto com a aplicação da integração por partes e o Teorema da Divergência. Resulta, então, a seguinte expressão integral:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi, X) d\Gamma = 0 \quad (4)$$

Na Equação (4) a função auxiliar $u^*(\xi, X)$ é a solução fundamental e sua derivada normal é expressa por $q^*(\xi, X)$, o argumento dessas funções considera o ponto fonte ξ , que é um ponto arbitrário no domínio Ω , pois tais funções dependem da distância euclidiana entre dois pontos. O coeficiente $c(\xi)$ depende da suavidade do contorno [5]. Para um meio bidimensional isotrópico, a solução fundamental da equação de Laplace depende a distância euclidiana r entre um ponto ξ de aplicação da fonte concentrada e um ponto qualquer X do domínio (BREBBIA et al., 1984) [3]:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad e \quad q^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

3. Método dos Elementos de Contorno

O MEC é geralmente associado a formulações ditas diretas, nas quais as variáveis físicas do problema são desconhecidas, como por exemplo, os potenciais e fluxos. Tal abordagem é mais atraente que as formulações denominadas indiretas, que envolvem conceitos como fontes ou dipolos. A formulação direta adotada neste trabalho é mais geral e simples de se aplicar em códigos computacionais.

A formulação da equação integral de contorno de problemas potenciais numa forma similar a usada pelo MEC pode ser atribuída a Jaswon (1963) [6] e Symm (1963) [7], autores que já em 1963 apresentaram um método numérico para resolver equações integrais do tipo de Fredholm. Eles discretizaram o contorno dos problemas em vários segmentos - ou elementos de contorno - e assumiram uma densidade de fonte constante em cada um deles.

A técnica de colocação [5] foi empregada para gerar uma série de equações integrais, e os coeficientes de influência foram computados usando a fórmula de Simpson, com exceção dos coeficientes singulares que foram computados analiticamente ou pela soma dos termos fora da diagonal. Em seus trabalhos pioneiros tais autores até propuseram uma formulação mais geral, usando potenciais e derivadas como variáveis desconhecidas e os resultados foram obtidos para algumas aplicações (JASWON, 1963; SYMM, 1963; JASWON; PONTER, 1963). De alguma forma, o surgimento do Método dos Elementos Finitos naquela mesma época inspirou o desenvolvimento da base matemática para a formulação direta do MEC.

A interpretação do MEC em termos de sentenças de resíduo variacional ou ponderado ajudou a esclarecer sua relação com outras técnicas numéricas, como o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos. Ao mesmo tempo, elementos de contorno de ordem superior começaram a ser desenvolvidos, com base em transformações de coordenadas usando o jacobiano, usadas primeiramente em elementos finitos. A importância de técnicas precisas de integração numérica levou à investigação e consequente desenvolvimento de abordagens adequadas para integrandos singulares e quase singulares.

3.1. Elementos de Contorno

Seja o domínio plano Ω e contorno S qualquer, indicado na figura (2), onde se deseja calcular o perímetro. Em diversos problemas a integral ao longo do contorno S pode ser bastante difícil, ou mesmo impossível, de se calcular analiticamente. Uma estratégia para o cálculo do perímetro é a divisão do contorno S em uma soma de segmentos S_1, S_2, \dots, S_n :

$$S = \sum_{i=1}^n s_i \quad (6)$$

Na Eq. (6), n é o número de segmentos. Uma vez que estes pedaços podem ter uma forma qualquer, cada pedaço poderá ser aproximado por uma função conhecida. Por simplicidade esta forma é quase sempre dada por um polinômio (reta, parábola, etc).

Dessa maneira, cada segmento s_1, s_2, \dots, s_n é aproximado por formas conhecidas $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ chamados de Elementos de Contorno. Assim, o contorno aproximado Γ é expresso por:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (7)$$

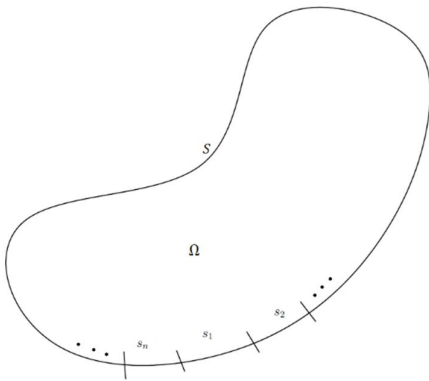


Figura 2: Domínio Ω de contorno S

Tomando o limite para infinitos elementos:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (8)$$

Onde Γ_i é o contorno aproximado.

3.2 Elementos de Quadráticos Isoparamétricos

Na discretização por elementos quadráticos, a geometria é aproximada por um polinômio do 2º grau, necessitando de três nós em cada elemento, um em cada extremidade do elemento e um nó central (figura 3). A formulação usada neste trabalho é isoparamétrica, ou seja, as mesmas funções de forma usadas para interpolar a geometria são também usadas para interpolar as variáveis físicas, que são o potencial e a derivada normal do potencial, também chamada de fluxo.

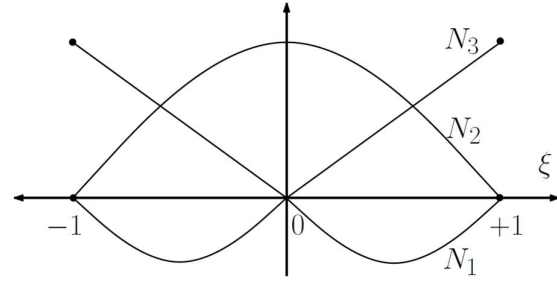


Figura 3: Funções de forma para o elemento quadrático

As funções de forma N_1, N_2 e N_3 são dadas por [5]:

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1); \quad N_2 = 1 - \xi^2; \quad N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) \quad (9)$$

Assim, as coordenadas cartesianas x e y são aproximadas da seguinte forma:

$$x = (N_1)(x_1) + (N_2)(x_2) + (N_3)(x_3)$$

$$y = (N_1)(y_1) + (N_2)(y_2) + (N_3)(y_3)$$

Da mesma forma as variáveis físicas são interpoladas:

$$u = (N_1)(u_1) + (N_2)(u_2) + (N_3)(u_3)$$

$$q = (N_1)(q_1) + (N_2)(q_2) + (N_3)(q_3)$$

Onde as variáveis com índice 1 são relativas ao nó local 1, as com índice 2 relativas ao nó local 2 e as com índice 3 relativas ao nó local 3.

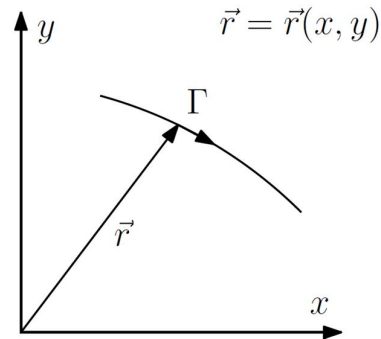


Figura 4: Contorno Curvo

O sistema de coordenadas local se relaciona com o sistema global através do Jacobiano da transformação de coordenadas, $|J|$. Para uma curva do tipo mostrado na figura (4), a transformação é simples [5]:

$$d\Gamma = |J|d\xi = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (10)$$

3.3 Discretização do Contorno

A discretização do contorno utilizando os conceitos de aproximação quadrática introduzidos na subsecção anterior leva a Equação (4) a tomar a forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{m=1}^N \int_{\Gamma_m} uq^* d\Gamma_m - \sum_{m=1}^N \int_{\Gamma_m} qu^* d\Gamma_m = 0 \quad (11)$$

Onde N assinala a quantidade de elementos de contorno que compõem a discretização. Em forma matricial:

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{m=1}^N [u_1 u_2 u_3] \int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^* d\Gamma_m - \sum_{m=1}^N [q_1 q_2 q_3] \int_{\Gamma_m} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} u^* d\Gamma_m = 0 \quad (12)$$

A Equação (12) representa um sistema misto envolvendo o potencial u nos nós, bem como a derivada normal q também nodais. O número de incógnitas dos dois tipos é compensado pela prescrição de valores conhecidos em número suficiente para gerar um sistema, na forma:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = 0 \quad (13)$$

Os coeficientes das matrizes [H] e [G] também são chamados de coeficientes de influência e a precisão do MEC está fortemente relacionada à obtenção correta de tais coeficientes, que são definidos por:

$$H_{m,j} = \int_{\Gamma_m} N_k q^* J_m d\eta \text{ e } G_{m,j} = \int_{\Gamma_m} N_k u^* J_m d\eta \quad (14)$$

Onde J_m é o jacobiano da transformação de coordenadas, relativo ao elemento m, definido na Equação (10).

4. Integração Numérica

Os coeficientes $H_{m,j}$ e $G_{m,j}$ nas expressões anteriores podem ser calculados usando fórmulas de integração numérica (como a Quadratura de Gauss) para o caso $m \neq j$. Entretanto, quando m e j estão no mesmo elemento ($m = j$), a singularidade da solução fundamental requer um esquema de integração mais preciso. Em realidade, a integração analítica é reservada apenas para o cálculo dos coeficientes $G_{m,j}$. Isto porque os coeficientes $H_{m,j}$, cuja integral é mais fortemente singular, pode ser calculado pela soma dos coeficientes das linhas correspondentes, segundo o procedimento da obediência à imposição de um campo potencial constante num domínio físico finito [4] em que as derivadas do potencial devem ser nulas em todo o domínio físico:

$$[H]\{u\} = 0 \quad (15)$$

Dessa forma, tanto a integral mais fortemente singular $H_{m,j}$ quanto o valor do coeficiente $c(\xi)$ podem ser calculados indiretamente. Já no caso da integral $G_{m,j}$, embora mais fracamente singular, seu cálculo para elementos quadráticos e de ordem superior é mais elaborado. Embora demandando um número significativo de pontos de integração [1], a Quadratura de Gauss pode ser usada, pois tal esquema de integração possui a vantagem de calcular de forma precisa as integrais de funções polinomiais de graus $p = 2NPG + 1$. Em uma dimensão, como a que é aplicada no MEC em problemas bidimensionais é dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{p=1}^{NPG} w_p f(\mu_p) \quad (16)$$

Na eq. (16) NPG é o número de pontos de integração, w_p são os pesos da Quadratura de Gauss, e μ_p são pontos de integração. Tanto os pontos quanto os pesos são tabelados, considerando um intervalo normalizado $(-1, 1)$.

Ressalta-se que o núcleo das integrais do MEC não é polinomial e que no caso da integral imprópria, é preciso calcular o que geometricamente representaria a área sobre a curva de modo correto, para evitar erros numéricos significativos [1]. A saber, integrais singulares são aquelas que têm um comportamento crescente ou decrescente ilimitado em ao menos um ponto do integrando. Uma integral "I" é dita singular se:

$$I = \int_a^b f(x) dx \text{ e } \exists c \in [a, b] \text{ tal que } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty \quad (17)$$

4.1 Integração Autoadaptativa

O esquema de integração adaptativo proposto por Telles (1987), para o cálculo de integrais singulares, pode ser entendido de forma simplificada como a aplicação de uma transformação de 3ª ordem nos pontos previstos pela Quadratura Gaussiana. Essa transformação desloca os pontos para as proximidades da singularidade, levando a uma maior precisão da integral. Para casos de integrações unidimensionais, que são as utilizadas neste trabalho, um resumo da aplicação desta transformação é exposto a seguir. Tendo-se, inicialmente, a integral apresentada na Equação (16), onde a função a ser integrada $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (18)$$

Sendo η a coordenada natural da integral. Adota-se, então, uma transformação de coordenadas de 3ª ordem, dada de acordo com a seguinte relação:

$$\eta(\theta) = A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + D \quad (19)$$

Na eq. (19) θ é a coordenada fornecida pelos pontos de integração da Quadratura Gaussiana e, após a transformação, a coordenada η estará associada ao peso da Quadratura Gaussiana correspondente ao ponto de integração θ . A, B, C e D são coeficientes dependentes da posição do ponto singular $\bar{\eta}$ [4].

Tal transformação de coordenadas permanece válida sem a necessidade do recurso da partição do domínio para qualquer posição do ponto de singularidade e produz automaticamente uma maior concentração dos pontos de integração próximos ao ponto de singularidade [9]. Os coeficientes A, B, C e D são definidas pela aplicação das seguintes condições:

$$\eta(1) = 0; \quad \eta(-1) = 0; \quad \left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (20)$$

A terceira condição implica que o Jacobiano dessa transformação deve preferivelmente reduzir a ordem da singularidade no ponto $\bar{\eta}$ e a quarta condição é introduzida para produzir um ponto de mínimo no Jacobiano para o ponto $\bar{\eta}$ (um ponto de máximo também pode ser obtido). Esta última condição implica que o mínimo valor do Jacobiano estará localizado onde o típico comportamento singular da função $f(\eta)$ apresenta um gradiente mais severo. Uma vez que os coeficientes são calculados, pode se reescrever a Equação (18):

$$\int_{-1}^1 f(\eta(\theta)) J(\theta) d\theta \quad (21)$$

Na eq. (21) $J(\theta)$ é o Jacobiano da transformação:

$$J(\theta) = \frac{d\eta}{d\theta} = 3A\theta^2 + 2B\theta + C \quad (22)$$

A partir dessa transformada, um esquema de integração auto-adaptativo aplicado ao Método dos Elementos de Contorno é gerado em função da distância do chamado ponto fonte ξ em relação ao elemento de contorno sobre o qual é realizada a integração. Pode-se encontrar maiores detalhes nas referências Telles (1987) [8] e Bulcão (1999) [9].

5. Simulações Numéricas

Para verificar a influência da Integração auto-adaptativa na qualidade da solução numérica os resultados foram comparados com os obtidos por (Barbosa, 2017) [1]. Nesta referência, as integrações foram calculadas apenas com a Quadratura Gaussiana. Como de praxe um método misto como o MEC, os valores do potencial ou da derivada do potencial no contorno podem ser prescritos ou figuram como incógnitas; neste último caso, são calculados numericamente. O

desvio percentual em cada ponto j do contorno foi calculado segundo a equação (23):

$$\%E(j) = 100|q_j - q_j| \quad (23)$$

O domínio foi considerado homogêneo e isotrópico, com propriedades mecânicas unitárias. As quadraturas foram resolvidas utilizando 20 pontos de Gauss.

5.1 Exemplo 1

Considere o problema potencial delimitado externamente por um domínio bidimensional retangular conforme apresentado na figura (5). A solução exata do potencial pode ser expressa pela Equação (24):

$$u(x, y) = x \quad (24)$$

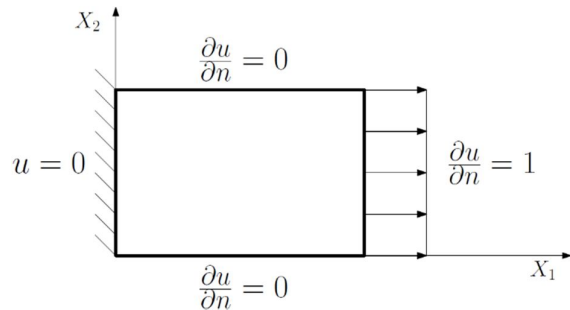


Figura 5: Geometria e Condições de Contorno do Exemplo 1

Na solução deste exemplo foram utilizados 40 elementos de contorno e 84 pontos nodais. A Figura (6) apresenta o gráfico do desvio das soluções numéricas do potencial com relação à solução analítica no contorno $Y = 0$.

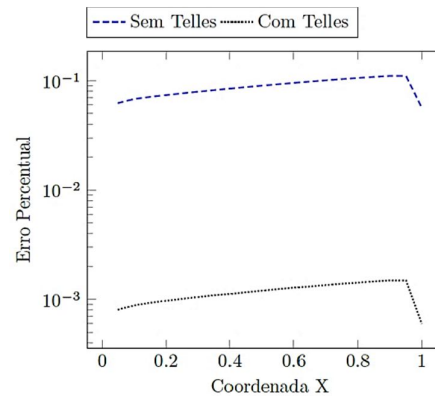


Figura 6: Desvio Relativo do Potencial Exemplo 1

Os resultados dados na Figura (6) deixam claro que uso o da integração auto-adaptativa reduz significativamente a ordem do erro para todos os pontos em análise.

A Figura (7) apresenta os gráficos do fluxo analítico e do fluxo numérico, com o esquema adaptativo e em este; a Figura (8) mostra os valores do desvio do fluxo numérico com relação à solução analítica. Ambos se referem ao contorno em $X = 0$.

Na Figura (7) nota-se claramente a redução das flutuações em torno da solução analítica com a inclusão da integração auto-adaptativa. A presença do comportamento oscilatório, também discutido por Barbosa (2017) [1], é um fenômeno observado em diversos métodos, incluindo o MEC. A inclusão do esquema auto-adaptativo leva a uma melhoria da integração numérica e consequente redução destas, embora não as elimine completamente.

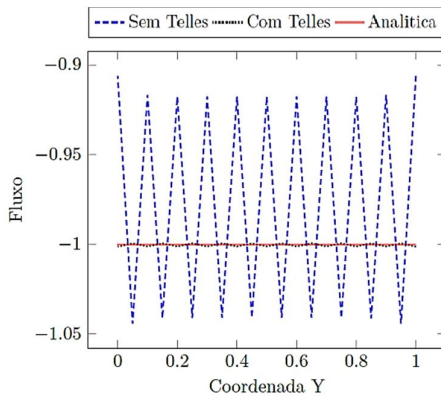


Figura 7: Valores do fluxo no exemplo 1

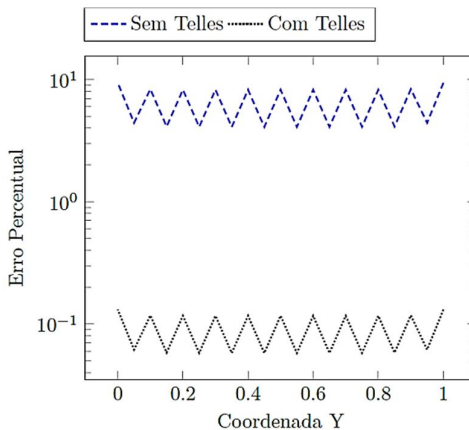


Figura 8: Desvios (erro) no fluxo para o exemplo 1

5.2 Exemplo 2

Considere o problema de potencial escalar, apresentado na Figura (9), em que um semicírculo é submetido às seguintes condições de contorno: uma temperatura descontínua na face retilínea e fluxo nulo no contorno curvilíneo.

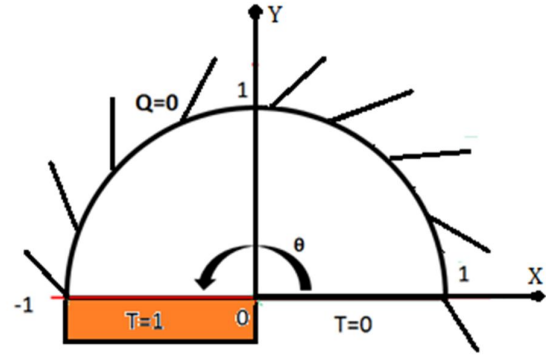


Figura 9: Geometria e Condições de Contorno do Exemplo 1

As soluções exatas do potencial e do fluxo são dadas por:

$$T(\theta) = \frac{\theta}{\pi} \quad e \quad q(\theta) = -k \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi x}$$

Para este exemplo a malha utilizada contou com 103 elementos de contorno e 209 pontos nodais.

A Figura (10) apresenta o gráfico do desvio das soluções numéricas do potencial com relação à solução analítica ao longo do contorno do semicírculo $X^2 + Y^2 = 1, Y \geq 0$. Novamente, observa-se uma queda nos valores do desvio percentual quando se acopla o esquema de Telles, comparativamente ao MEC somente com a Quadratura padrão. Já as Figuras (11) e (12) apresentam os gráficos da solução do fluxo e do desvio das soluções numéricas com relação à solução analítica no contorno $Y = 0$.

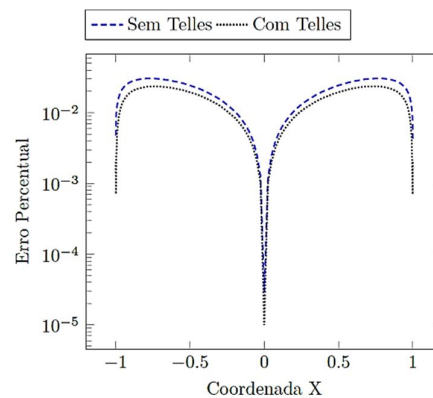


Figura 10: Desvio do potencial na aresta curvilínea do exemplo 2

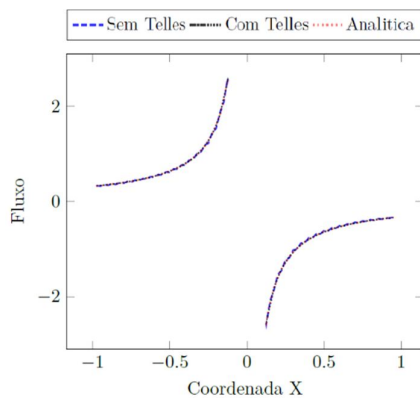


Figura 11: Valores do fluxo no exemplo 2

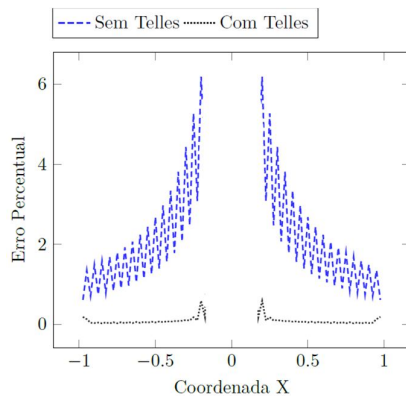


Figura 12: Desvio das soluções no exemplo 2

Embora as diferenças entre os valores analíticos e numéricos não sejam visualmente detectáveis na Figura (11), o gráfico do desvio mostra, mais uma vez, uma expressiva redução na ordem do erro na solução numérica e forte atenuação nas oscilações numéricas, em consonância com os resultados obtidos no exemplo anterior. Ressalta-se a presença de uma singularidade no cálculo do fluxo em $X = 0$, e que, a formulação acoplada à integração auto-adaptativa mantém os patamares de desvio ao se aproximar da singularidade, em contrapartida à solução que utiliza Quadratura Gaussiana padrão.

6. Conclusões

O esquema de integração auto-adaptativa mostrou-se extremamente eficaz na redução da ordem do desvio percentual ao longo dos pontos de contorno nas malhas referentes às geometrias estudadas. No trabalho de Barbosa foram realizados testes com até 60 pontos de Gauss e os resultados ainda assim foram de qualidade significativamente inferior aos aqui apresentados.

Para trabalhos futuros intenta-se verificar a eficácia da metodologia aqui apresentada na solução de problemas de maior complexidade, tanto geométrica quanto referente ao carregamento imposto. Objetiva-se também implementar elementos de ordem cúbica, para avaliação da melhoria da precisão a ser assim alcançada, face às maiores dificuldades impostas pela programação desses elementos de ordem superior.

7. Referências

- [1] Barbosa, J. P.; Loeffler, C. F.; Bulcão, A.; Um estudo sobre a Eficiência da Quadratura Gaussiana na Integração Singular com o Método dos Elementos de Contorno. BlucherPhysicsProceedings v.4, n.1, p. 212-217. Disponível em: <http://www.proceedings.blucher.com.br/article-details/um-estudo-sobre-a-eficiencia-da-quadratura-gaussiana-na-integracao-singular-com-o-metodo-dos-elementos-de-contorno-27770> acesso em 17 de junho de 2020.
- [2] MOON, P., & SPENCER, D. Field Theory for Engineers. New Jersey: Springer, 1971.
- [3] BREBBIA, C.A; TELLES, J.C.F; WROBEL, L.C. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Berlin: Springer-Verlag: 1984.
- [4] BREBBIA, C. A.; DOMÍNGUEZ J. The Boundary Element Method: An Introductory Course. UK: WIT Press: 1998.
- [5] ALBUQUERQUE, E.L; CAMPOS, L.S. Introdução ao Método dos Elementos de Contorno. Universidade de Brasília. 2017.
- [6] JASWON, M. The Royal Society, v. 275, n. 1360, p.23–32, 1963.
- [7] SYMM, G. The Royal Society, v. 275, n. 1360, p.33–46, 1963.
- [8] TELLES, J. C. F. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 959-973, 1987.
- [9] BULCÃO, A. Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicada a Problemas de Campo Escalar Generalizado. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1999.

