
PROBLEMAS EM ABERTO NA COSMOLOGIA MODERNA: SETOR ESCURO E COSMOGRAFIA

AS ASTROCIENTISTAS



^a Università di Napoli “Federico II”,
Nápoles, I-80138, Itália

^b Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Napoli
Nápoles, I-80138, Itália
micol.benetti@unina.it

RESUMO

A cosmologia sempre foi um campo vibrante e estimulante, e nunca antes como nessas últimas décadas as certezas nas quais baseamos todas as especulações estão oscilando. Por um lado, o modelo cosmológico padrão ainda é um pilar sólido; por outro lado, algumas rachaduras parecem estar se formando. Enquanto esforços contínuos são feitos para explicar as questões em aberto, preenchendo as lacunas e dando mais solidez à teoria, também nos perguntamos se nosso conhecimento atual não se fundamentou em algo que precisa ser revisado. Neste artigo, damos uma visão geral do problema atual e exploramos uma nova técnica que descreve dados de uma forma independente de modelo, a cosmografia. Ambas as análises, deste último e as análises diretas de modelos com gravidade modificada parecem apontar em uma nova direção, questionando se a teoria da Relatividade Geral pode ser a mesma das grandes escalas cosmológicas.

Palavras-chave Cosmologia, Universo Primordial, Cosmografia

1 Introdução

O atual modelo cosmológico padrão, também conhecido como Λ - Cold Dark Matter, fornece uma descrição bem-sucedida da evolução e estrutura do Universo. Ele tem sido confirmado por observações cosmológicas em diferentes escalas e tem passado em todos os testes observacionais. Por outro lado, com o advento da cosmologia de precisão nas últimas décadas, várias inconsistências surgiram, dando origem a novas análises e especulações.

Além disso, muitas questões teóricas em aberto permanecem, como os problemas de ajuste fino (REF) e coincidência (REF), além da própria natureza da matéria escura e da energia escura.

De fato, enquanto por um lado as atuais buscas experimentais por candidatos de matéria escura não deram resultados conclusivos em um nível fundamental [1, 2], por outro lado, grande quantidade de observações cosmológicas, incluindo supernovas do tipo Ia, oscilações acústicas de bárions (BAO, do inglês *Baryon Acoustic Oscillation*), dados observacionais do parâmetro de Hubble (cronômetros cósmicos) e medições da radiação cósmica de fundo (CMB, do inglês *Cosmic Microwave Background*), indicam a existência de uma componente misteriosa com pressão negativa que domina o universo em tempos tardios [3].

O nome “energia escura” atesta nossa ignorância no entendimento da natureza física desta componente desconhecida, da qual não temos nenhuma explicação conclusiva para sua presença no Universo em tempos tardios [4].

Todos esses problemas em aberto nos permitem questionar se outras teorias, além da gravidade de Einstein, poderiam ser utilizados para explicar a fenomenologia e as observações do Universo sem a introdução de ingredientes materiais “ad hoc”. Neste contexto, uma alternativa válida para RG são as teorias estendidas da gravitação, que superam a suposição de componentes escuras usando uma abordagem geométrica para descrever a matéria/energia ausente, incluindo invariantes geométricos adicionais na ação padrão de Hilbert-Einstein, que pode ser derivada de qualquer esquema de quantização em espaço-tempo curvo [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

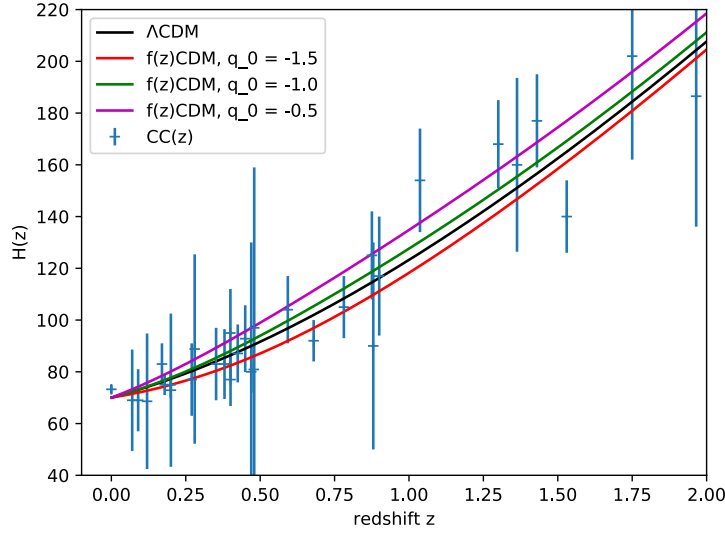


Figura 1: Evolução de $H(z)$ para o modelo $f(z)$ CDM, onde são fixados $j_0 = 1.97$ and $s_0 = 0$, enquanto os seguintes valores do parâmetro de desaceleração são assumidos: $q_0 = -0.5$ (curva magenta), $q_0 = -1$ (curva verde), $q_0 = -1.5$ (curva vermelha). Para efeito de comparação, são mostrados o resultado para o modelo Λ CDM (curva preta) e os dados de cronômetros cósmicos [33]. Nesta figura, são assumidos $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ and $H_0 = 70$ Km/s/Mpc.

Além do debate sobre a investigação da matéria escura e da energia escura, o modelo cosmológico padrão ainda possui outras questões não resolvidas. Atualmente, um tópico interessante diz respeito aos aspectos observacionais não explicados pelo modelo cosmológico padrão, como as várias tensões surgidas entre as medições derivadas de seleção de parâmetros do modelo Λ CDM com dados de época primordial [3], e medidas diretas usando diferentes calibrações de distância geométrica de Cefeidas [18]. Além disso, outras sondas sem sistemática observacional compartilhada reforçam a ideia da existência de tensões que não dependem de erros sistemáticos experimentais, mas da física do cenário cosmológico [19, 20, 21].

Essas tensões podem indicar uma inadequação no modelo cosmológico padrão para fornecer uma descrição correta da evolução do Universo de acordo, tanto com os dados do Universo primordial (e.g., dados da CMB), quanto com as observações do Universo mais recente.

Portanto, argumenta-se que o modelo padrão precisava ser elaborado considerando algum mecanismo extra ou nova física que pudesse reconciliar as previsões do modelo com os dados diretamente observados.

Extensões na física dos neutrinos [22, 23] e interações entre matéria escura e energia escura [24, 25, 26, 27, 28] têm sido considerados como alternativa ao modelo cosmológico padrão para resolver a tensão H_0 , bem como inúmeras outras tentativas [29]. Entre elas, modificações no nível do contexto cosmológico inflacionário [30] também têm sido analisadas. Até o momento, a conclusão comum é que o problema não pode ser tratado no contexto do modelo cosmológico padrão, uma vez que qualquer resolução desta discordância afeta como novas tensões no que diz respeito às discrepâncias em outros parâmetros cosmológicos, como a densidade total da matéria, Ω_m , e a amplitude das flutuações de densidade, σ_8 [31].

Além disso, a tentativa de resolver em conjunto as diferentes tensões observadas trouxe à luz outro debate interessante sobre como e quando é estatisticamente consistente combinar diferentes conjuntos de dados cosmológicos. Uma ideia cada vez mais apoiada hoje é que combinar dados que fornecem independentemente indicações muito diferentes sobre a restrição de um modelo leva a conclusões completamente enganosas [32].

Abrem-se, portanto, algumas perspectivas, entre elas estão encontrar uma forma de quebrar a degenerescência no contexto do modelo padrão ou explorar novas teorias, como as teorias da gravitação estendida, para testar a possível resolução das tensões. Além disso, há um considerável interesse recente na abordagem cosmográfica [34, 35] como uma técnica independente de modelo capaz de descrever a expansão tardia do Universo. Na verdade, dado apenas o pressuposto observacional do princípio cosmológico, ela permite estudar a evolução acelerada observada hoje do fluxo de Hubble sem assumir modelos cosmológicos específicos. Além disso, é poderoso quando é usado para descrever o parâmetro de Hubble em uma ampla gama de redshifts, usando dados do background (supernovas do tipo Ia, BAO e até Quasar) ou mesmo dados da CMB [37, 38, 39, 33].

2 Cosmografia

A Cosmografia pode ser usada para estudar a evolução cósmica independentemente das densidades de energia.

Como se baseia apenas nas suposições justificáveis observacionalmente de homogeneidade e isotropia, esta técnica independente de modelo permite reconstruir a evolução dinâmica do termo energia escura sem assumir qualquer modelo cosmológico particular [40]. A cosmografia envolve expansões de Taylor de quantidades observáveis que podem ser comparadas diretamente com os dados. Os resultados desse procedimento garantem a independência de qualquer Equação de Estado postulada que rege a evolução do Universo, e assim, ajudam a quebrar a degenerescência entre os modelos cosmológicos.

Embora poderosa e simples de implementar, a abordagem cosmográfica padrão possui limitações em seu uso que a enfraquecem seu poder de predição em vários casos [41]. Esses casos estão essencialmente relacionados à divergência dos polinômios de Taylor em redshifts altos, o que leva a resultados numéricos não precisos quando dados com $z > 1$ são usados.

Para amenizar este problema, é investigado o papel das aproximações racionais da distância de luminosidade. Um exemplo relevante a esse respeito é oferecido pelos polinômios de Padé, que estendem o raio de convergência da série cosmográfica padrão [42, 43]. No entanto, o método de Padé deixa um certo grau de subjetividade na escolha da ordem superior de expansão e também da dependência dos termos cosmográficos. Para resolver este último problema, uma técnica de ortogonalização de parâmetros cosmográficos foi proposta [37].

Em geral, a cosmografia é usada para reconstruir o parâmetro de Hubble como uma função do redshift, assumindo um valor fiducial arbitrário para a densidade da matéria atual, Ω_m , e analisando dados cosmológicos com baixo redshift. Na Ref. [33] foi proposta uma estratégia diferente, ligando o comportamento cosmográfico paramétrico da expansão tardia do Universo com um modelo cosmológico capaz de descrever a evolução em escalas menores.

Desta forma, não é necessário assumir quaisquer valores “a priori” para os parâmetros cosmológicos, uma vez que estes podem ser restringidos em épocas iniciais, utilizando os dados de BAO e CMB. Em outras palavras, é desenvolvido um modelo cosmológico sem assumir qualquer mecanismo de tempo tardio responsável pela expansão atual do Universo, mas considerando um modelo $f(z)$ CDM, onde a função $f(z)$ é dada por uma combinação adequada de polinômios capazes de rastrear a distância de luminosidade cósmica, substituindo a constante cosmológica Λ .

Para testar esta estratégia, a expansão tardia do Universo foi descrita usando os polinômios Padé de ordem n/m , $P_{(n,m)}$, que é a aproximação da razão entre duas séries de Taylor padrão de uma função genérica $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$,

$$P_{n,m}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{1 + \sum_{j=1}^m b_j z^j}. \quad (1)$$

A evolução para um polinômio $P_{(n,m)}$ no nível do background é dada por,

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = \frac{P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots + P_n z^n}{1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots + Q_m z^m}. \quad (2)$$

com os coeficientes dados por,

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \quad P_1 = H_1 + Q_1, & P_2 &= \frac{H_2}{2} + Q_1 H_1 + Q_2, \\ Q_1 &= \frac{-6H_1 H_4 + 12H_2 H_3}{24H_1 H_3 - 36H_2^2}, & Q_2 &= \frac{3H_2 H_4 - 4H_3^2}{24H_1 H_3 - 36H_2^2}, \end{aligned}$$

e H_1, H_2, H_3 and H_4 são relacionados aos parâmetros cosmográficos: H_0 (parâmetro de Hubble), q_0 (parâmetro de desaceleração), j_0 (jerk) e s_0 (snap).

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & q(t) &\equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2 a}{dt^2}, \\ j(t) &\equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3}, & s(t) &\equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4 a}{dt^4}. \end{aligned}$$

que estão relacionados com aspectos cinemáticos do Universo, como sua velocidade de expansão atual (H_0), sua aceleração/desaceleração atual (q_0), a mudança da dinâmica do Universo (j_0). O valor de s_0 é necessário para discriminar entre a evolução da energia escura ou constante cosmológica.

Usando o fator de escala a , é possível escrever,

$$\begin{aligned} H_1 &= H_{10}/H_0 = 1 + q_0, & H_2 &= H_{20}/H_0 = -q_0^2 + j_0, \\ H_3 &= H_{30}/H_0 = 3q_0^2(1 + q_0) - j_0(3 + 4q_0) - s_0, \\ H_4 &= H_{40}/H_0 = -3q_0^2(4 + 8q_0 + 5q_0^2) + j_0(12 + 32q_0 + 25q_0^2 - 4j_0) + s_0(8 + 7q_0) + l_0, \end{aligned}$$

onde o subíndice 0 indica o valor hoje.

O modelo $f(z)$ CDM é construído a partir do modelo padrão, substituindo a constante cosmológica, Λ , por uma série cosmográfica de Padé, ou seja, considerando a evolução de $H(z)$ como

$$E(z)^2 = \left(\frac{H(z)}{H_0} \right)^2 = \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_f f(z), \quad (6)$$

com Ω_k a densidade de curvatura espacial, Ω_r a densidade de radiação e Ω_f a densidade que impulsiona a atual expansão acelerada do Universo. No Modelo Cosmológico Padrão, o último termo se reduz a $\Omega_f f(z) = \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$.

A seguir, nos concentramos o polinômio de Padé de segunda ordem, denotado por $P(2, 2)$, de modo que $f(z)$ é dado por

$$f(z) = \frac{P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots + P_n z^n}{1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \dots + Q_m z^m}. \quad (7)$$

Claramente, qualquer classe de modelos cosmológicos (ou das equações de estado) pode ser reconstruída, em princípio, a partir de $f(z)$. Na Fig. 1 esta abordagem é discutida à luz de recentes medidas de $H(z)$. Analisando o modelo $f(z)$ CDM com amostra conjunta de supernovas (Pantheon), *clustering* de galáxias e dados do Universo “jovem” (BAO e CMB), encontramos uma dependência interessante do valor de densidade de matéria atual com os parâmetros cosmográficos, comprovando a discrepância do valor de Ω_m em análises cosmográficas em comparação com o modelo Λ CDM [33].

Ainda na Ref. [33], é mostrado que os parâmetros cosmográficos possuem um efeito não desprezível no espectro de anisotropias da temperatura da CMB. Também é reportada a seleção de parâmetros obtida através da análise estatística utilizando um conjunto de dados observacionais selecionados.

Finalmente, verificou-se que a série cosmográfica, com limite na terceira ordem (ou seja, usando os três primeiros parâmetros cosmográficos H_0 , q_0 e j_0) mostra um melhor valor de melhor ajuste χ^2 do que o modelo padrão. Este resultado pode ser o ponto de partida para uma interpretação completamente nova das tensões cosmológicas atuais, no sentido que não é necessário invocar uma nova física, mas basta incluir correções superiores, ou seja, modificar a teoria da gravidade. Vale ressaltar que os dados de *clustering* de galáxias e medições de cisalhamento cósmico parecem ter alguma sensibilidade com parâmetros cosmográficos de ordem superior, como s_0 , onde os dados de CMB parecem não ser sensíveis.

3 Gravidade modificada

Um dos principais aspectos da pesquisa atual em cosmologia se trata da possibilidade de ir além da gravidade de Einstein para explicar o problema da energia escura.

A aceleração do Universo observada pode ser, de fato, o sinal de uma quebra das leis da gravitação no regime infravermelho. Tal cenário foi inicialmente considerado como uma tentativa de encontrar uma teoria unificada capaz de descrever todas as interações fundamentais em termos da teoria quântica de campos.

A natureza quântica da matéria não pode ser levada em consideração por uma teoria clássica como a RG. No entanto, descobrir como os campos quânticos se comportam na presença da gravidade é crucial para investigar a natureza do espaço-tempo em escalas muito pequenas, onde se espera que efeitos não clássicos sejam relevantes para a gravidade.

A interação mútua entre os campos de geometria e matéria quântica necessariamente leva a modificações da ação padrão de Einstein-Hilbert.

As chamadas *teorias de gravidade estendida* representam uma abordagem semiclássica onde a RG é recuperada no limite de baixa energia [5]. Essas teorias generalizadas são teorias de calibre, e consistem em adicionar invariantes de curvatura de ordem superior e termos minimamente ou não minimamente acoplados entre campos escalares e geometria, que surgem da ação efetiva da gravidade quântica.

As evidências observacionais de que o conteúdo de matéria do Universo está principalmente na forma de partículas desconhecidas que não estão incluídas no modelo padrão de partículas e interações, e a descoberta da atual expansão acelerada, leva à possibilidade de que a RG pode não ser a teoria da gravidade correta para descrever o Universo em escalas cosmológicas.

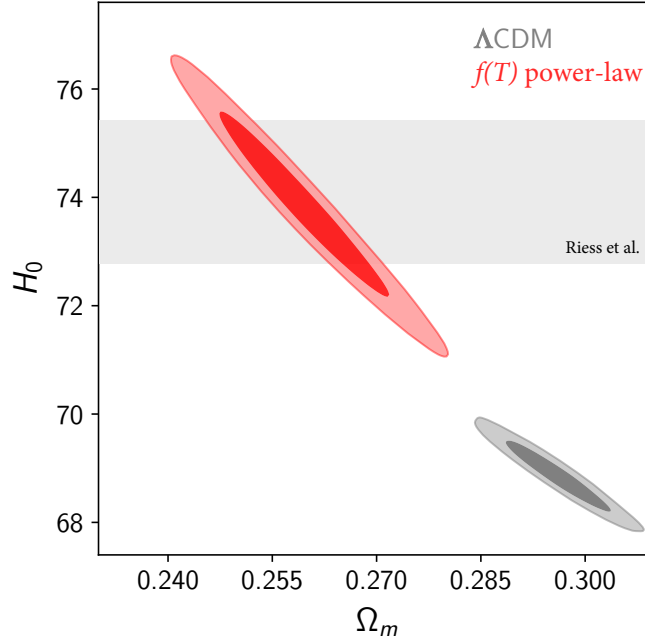


Figura 2: Plano H_0 - Ω_m para o modelo de $f(T)$ com lei de potência restringido com análise conjunta com dados de CMB (TTTEEE+lensing), BAO, supernova (Pantheon), DES e com prior sobre H_0 [44]. A região cinza indica o mais recente resultado de medidas locais sobre a constante de Hubble, $H_0 = 74.03 \pm 1.42$ km/s/Mpc [18].

Um dos exemplos mais famosos de cenários de gravidade modificada são os modelos $f(R)$, onde uma função genérica do escalar de Ricci é considerada na ação gravitacional [45, 46]. As equações de campo para essas teorias dependem do princípio variacional aplicado. A abordagem comum faz uso do *formalismo métrico*, no qual a variação é realizada em relação à métrica. Nesse caso, a conexão afim é a conexão Levi-Civita sem torção, totalmente determinada pelos componentes métricos. A segunda abordagem é chamada *formalismo Palatini*, e implica na variação com respeito à métrica e com respeito à conexão, que são tratadas como variáveis independentes. Os dois formalismos coincidem no caso de GR, ao passo que fornecem diferentes equações de movimento para uma ação mais geral, incluindo termos não lineares em R ou campos escalares acoplados não minimamente à gravidade. A grande desvantagem desta abordagem é que a função $f(R)$ é desconhecida. A abordagem mais comum consiste em postular uma forma funcional *a priori* para $f(R)$. No entanto, este problema pode ser contornado reconstruindo a ação $f(R)$ com uma abordagem cosmológica [?].

Usando os polinômios de Padé, é possível obter $f(R)$ a partir da taxa de expansão de Hubble $H(z)$ obtida a partir dos limites mais recentes dos parâmetros cosmológicos. Os resultados indicam pequenos desvios do modelo Λ CDM e um termo de energia escura efetivo com evolução no tempo. Entre todos os modelos sugeridos para descrever a expansão acelerada no tempo tardio, a descrição teleparalela da gravidade recentemente recebeu muita atenção [47].

Dentro desta abordagem, primeiramente estudada pelo próprio Einstein como uma alternativa equivalente à RG, campos de tétrades são usados para definir a conexão (sem curvatura) de Weitzenböck. Curvatura e torção são propriedades da conexão e, no mesmo espaço-tempo, é possível definir várias conexões diferentes. Enquanto a estrutura Riemanniana está relacionada à conexão Levi-Civita, a estrutura teleparalela está relacionada à conexão Weitzenböck. Essas estruturas geométricas estão ligadas à interação gravitacional devido à sua universalidade.

Quanto às teorias da gravidade $f(R)$, cenários interessantes surgem quando se substitui o escalar de torção por uma função genérica $f(T)$ [48, 49]. Nesse contexto, é possível reconstruir uma ação com $f(T)$ analisando as propriedades cosmológicas em nível de background [50].

Um resultado interessante relacionado às teorias teleparalelas foi mostrado na Ref. [44], onde várias formas da função $f(T)$ são exploradas. Em particular, é mostrado que a forma mais simples de lei de potência, $f(T) = \beta(-T)^b$, sendo β um fator de normalização e b o parâmetro livre da teoria. Restringido com dados CMB prefere valores de H_0 compatíveis com aqueles obtidos com dados de supernovas [18]. É mostrado na Fig. 2 que o modelo de lei de potência para $f(T)$ permite uma maior aceleração cósmica hoje em relação ao modelo cosmológico padrão.

Podemos inferir que a dinâmica cósmica pode constituir uma prova de desvio em relação à RG. Este resultado é extremamente interessante, e é mais uma indicação de que os modelos de gravidade modificada podem reconciliar a tensão do H_0 .

4 Conclusão

O modelo cosmológico padrão é o paradigma no qual baseamos todas as nossas especulações atuais, testando e creditando-o cada vez mais, até que um ponto de inflexão aconteceu algumas décadas atrás, quando dados cada vez mais precisos começaram a mostrar uma possível rachadura na teoria. Aparentemente, essa rachadura tem se ampliado ano após ano, constatando que dados primordiais, como a CMB, prevêem uma expansão menor que os dados obtidos localmente em tempos recentes. Até agora, temos a indicação de que incluir nova física no modelo cosmológico padrão não resolve a tensão H_0 . Se nem a nova física nem os erros de dados sistemáticos resolvem o problema de tensão, talvez a solução esteja em procurar incluir correções mais altas no modelo sem assumir o modelo padrão no nível de fundo. Portanto, explorar cenários de gravidade modificados pode ser um caminho a seguir na próxima década. No entanto, apesar dos esforços feitos para testar e validar teorias alternativas, até o momento temos que concluir que ainda não é possível falsificar o modelo Λ CDM com uma certeza robusta, e a necessidade de medições mais precisas a partir de observações futuras permanece crucial. Se atualmente as pesquisas espectroscópicas de alto redshift permitem dados precisos até $z \sim 2$, em um futuro próximo experimentos como DESI [51] cobrirão uma faixa de redshift ainda maior usando galáxias de linha de emissão, galáxias vermelhas luminosas e até quasares. Enquanto isso, outros surveys, como o Large Synoptic Survey Telescope (LSST) [52], melhorarão as medidas em baixo redshift com milhões de alvos espectroscópicos, isto é, galáxias Lyman-Break e emissores de Lyman- α . Ao mesmo tempo, o MegaMapper [53] fornecerá um levantamento espectroscópico de alto redshifts de galáxias ($2 < z < 5$), permitindo uma melhor restrição da expansão do universo atual.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Instituto Nacional de Física Nuclear (INFN), filial de Nápoles, iniciativa específica da QGSKY, por apoiar minha pesquisa. Agradeço sinceramente a Rodrigo Von Marttens por rever o texto e por sua cuidadosa tradução. Esta contribuição é o trabalho de ambos.

Referências

- [1] D. S. Akerib et al. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure. *Phys. Rev. Lett.*, 118(2):021303, 2017.
- [2] K. Abe et al. Direct dark matter search by annual modulation with 2.7 years of XMASS-I data. *Phys. Rev. D*, 97(10):102006, 2018.
- [3] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [4] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys. D*, 15:1753–1936, 2006.
- [5] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended Theories of Gravity. *Phys. Rept.*, 509:167–321, 2011.
- [6] S. Santos Da Costa, F. V. Roig, J. S. Alcaniz, S. Capozziello, M. De Laurentis, and M. Benetti. Dynamical analysis on $f(R, \mathcal{G})$ cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 35(7):075013, 2018.
- [7] Salvatore Capozziello, Carlo Alberto Mantica, and Luca Guido Molinari. Cosmological perfect fluids in higher-order gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 52(4):36, 2020.
- [8] Wladimir-Georges Boskoff and Salvatore Capozziello. Recovering the cosmological constant from affine geometry. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 16(10):1950161, 2019.
- [9] Salvatore Capozziello, Carlo Alberto Mantica, and Luca Guido Molinari. Cosmological perfect fluids in Gauss–Bonnet gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 16(09):1950133, 2019.
- [10] Konstantinos F. Dialektopoulos, Tomi S. Koivisto, and Salvatore Capozziello. Noether symmetries in Symmetric Teleparallel Cosmology. *Eur. Phys. J. C*, 79(7):606, 2019.
- [11] Taishi Katsuragawa, Tomohiro Nakamura, Taishi Ikeda, and Salvatore Capozziello. Gravitational Waves in $F(R)$ Gravity: Scalar Waves and the Chameleon Mechanism. *Phys. Rev. D*, 99(12):124050, 2019.
- [12] Salvatore Capozziello and Francesco Bajardi. Gravitational waves in modified gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28(05):1942002, 2019.
- [13] Salvatore Capozziello, Maurizio Capriolo, and Loredana Caso. Weak field limit and gravitational waves in higher-order gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 16(03):1950047, 2019.

- [14] Habib Abedi, Amir M. Abbassi, and Salvatore Capozziello. Cosmological perturbations in gravitational energy–momentum complex. *Annals Phys.*, 405:54–68, 2019.
- [15] L. Del Vecchio, L. Fatibene, S. Capozziello, M. Ferraris, P. Pinto, and S. Camera. Hubble drift in Palatini $f(\mathcal{R})$ -theories. *Eur. Phys. J. Plus*, 134(1):5, 2019.
- [16] Micol Benetti, Simony Santos da Costa, Salvatore Capozziello, Jailson S. Alcaniz, and Mariafelicia De Laurentis. Observational constraints on Gauss–Bonnet cosmology. *Int. J. Mod. Phys. D*, 27(08):1850084, 2018.
- [17] Micol Benetti, Salvatore Capozziello, and Leila Lobato Graef. Swampland conjecture in $f(R)$ gravity by the Noether Symmetry Approach. *Phys. Rev. D*, 100(8):084013, 2019.
- [18] Adam G. Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, and Dan Scolnic. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM. *Astrophys. J.*, 876(1):85, 2019.
- [19] T. M. C. Abbott et al. Dark Energy Survey Year 1 Results: A Precise H_0 Estimate from DES Y1, BAO, and D/H Data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 480(3):3879–3888, 2018.
- [20] J. W. Henning et al. Measurements of the Temperature and E-Mode Polarization of the CMB from 500 Square Degrees of SPTpol Data. *Astrophys. J.*, 852(2):97, 2018.
- [21] V. Bonvin et al. H0LiCOW – V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435–1223: H_0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat Λ CDM model. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 465(4):4914–4930, 2017.
- [22] Leila L. Graef, Micol Benetti, and Jailson S. Alcaniz. Primordial gravitational waves and the H_0 -tension problem. *Phys. Rev. D*, 99(4):043519, 2019.
- [23] Micol Benetti, Leila L. Graef, and Jailson S. Alcaniz. The H_0 and σ_8 tensions and the scale invariant spectrum. *JCAP*, 07:066, 2018.
- [24] Micol Benetti, Welber Miranda, Humberto A. Borges, Cassio Pigozzo, Saulo Carneiro, and Jailson S. Alcaniz. Looking for interactions in the cosmological dark sector. *JCAP*, 12:023, 2019.
- [25] V. Salzano et al. J-PAS: forecasts on interacting vacuum energy models. *JCAP*, 09:033, 2021.
- [26] Rodrigo von Marttens, Valerio Marra, Luciano Casarini, J. E. Gonzalez, and Jailson Alcaniz. Null test for interactions in the dark sector. *Phys. Rev. D*, 99(4):043521, 2019.
- [27] R. von Marttens, L. Casarini, D. F. Mota, and W. Zimdahl. Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy. *Phys. Dark Univ.*, 23:100248, 2019.
- [28] Rodrigo von Marttens, Lucas Lombriser, Martin Kunz, Valerio Marra, Luciano Casarini, and Jailson Alcaniz. Dark degeneracy I: Dynamical or interacting dark energy? *Phys. Dark Univ.*, 28:100490, 2020.
- [29] Eleonora Di Valentino et al. Snowmass2021 - Letter of interest cosmology intertwined II: The hubble constant tension. *Astropart. Phys.*, 131:102605, 2021.
- [30] Micol Benetti, Leila Graef, and Rudnei O. Ramos. Observational Constraints on Warm Inflation in Loop Quantum Cosmology. *JCAP*, 10:066, 2019.
- [31] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 . *Astropart. Phys.*, 131:102604, 2021.
- [32] Javier E. Gonzalez, Micol Benetti, Rodrigo von Marttens, and Jailson Alcaniz. Testing the consistency between cosmological data: the impact of spatial curvature and the dark energy EoS. 4 2021.
- [33] Micol Benetti and Salvatore Capozziello. Connecting early and late epochs by $f(z)$ CDM cosmography. *JCAP*, 12:008, 2019.
- [34] Salvatore Capozziello, Rocco D’Agostino, and Orlando Luongo. Extended Gravity Cosmography. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28(10):1930016, 2019.
- [35] Salvatore Capozziello, Rocco D’Agostino, and Orlando Luongo. Cosmographic analysis with Chebyshev polynomials. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 476(3):3924–3938, 2018.
- [36] Salvatore Capozziello, Rocco D’Agostino, and Orlando Luongo. Rational approximations of $f(R)$ cosmography through Padé polynomials. *JCAP*, 05:008, 2018.
- [37] Giada Bargiacchi, G. Risaliti, M. Benetti, S. Capozziello, E. Lusso, A. Saccardi, and M. Signorini. Cosmography by orthogonalized logarithmic polynomials. *Astron. Astrophys.*, 649:A65, 2021.
- [38] G. Bargiacchi, M. Benetti, S. Capozziello, E. Lusso, G. Risaliti, and M. Signorini. Quasar cosmology: dark energy evolution and spatial curvature. 11 2021.
- [39] E. Lusso et al. Quasars as standard candles III. Validation of a new sample for cosmological studies. *Astron. Astrophys.*, 642:A150, 2020.

- [40] Matt Visser. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations. *Gen. Rel. Grav.*, 37:1541–1548, 2005.
- [41] Peter K. S. Dunsby and Orlando Luongo. On the theory and applications of modern cosmography. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 13(03):1630002, 2016.
- [42] Christine Gruber and Orlando Luongo. Cosmographic analysis of the equation of state of the universe through Padé approximations. *Phys. Rev. D*, 89(10):103506, 2014.
- [43] Alejandro Aviles, Alessandro Bravetti, Salvatore Capozziello, and Orlando Luongo. Precision cosmology with Padé rational approximations: Theoretical predictions versus observational limits. *Phys. Rev. D*, 90(4):043531, 2014.
- [44] Micol Benetti, Salvatore Capozziello, and Gaetano Lambiase. Updating constraints on $f(T)$ teleparallel cosmology and the consistency with Big Bang Nucleosynthesis. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 500(2):1795–1805, 2020.
- [45] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. $f(R)$ theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3, 2010.
- [46] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(R)$ Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, 2010.
- [47] Yi-Fu Cai, Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, and Emmanuel N. Saridakis. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology. *Rept. Prog. Phys.*, 79(10):106901, 2016.
- [48] Gabriel R. Bengochea and Rafael Ferraro. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Phys. Rev. D*, 79:124019, 2009.
- [49] Eric V. Linder. Einstein’s Other Gravity and the Acceleration of the Universe. *Phys. Rev. D*, 81:127301, 2010. [Erratum: *Phys.Rev.D* 82, 109902 (2010)].
- [50] Salvatore Capozziello, Rocco D’Agostino, and Orlando Luongo. Model-independent reconstruction of $f(T)$ teleparallel cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, 49(11):141, 2017.
- [51] Michael E. Levi et al. The Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI). 7 2019.
- [52] Saurabh W. Jha et al. Next Generation LSST Science. 7 2019.
- [53] David J. Schlegel et al. Astro2020 APC White Paper: The MegaMapper: a $z > 2$ Spectroscopic Instrument for the Study of Inflation and Dark Energy. 7 2019.