

---

# SINGULARIDADES FUTURAS REPENTINAS E PARTÍCULAS

---

AS ASTROCIENTISTAS

 **Olesya Galkina**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,  
Rio de Janeiro, 22290-180, Brasil,  
ole.galkina@gmail.com

## RESUMO

Nesse trabalho, revisamos o conceito de singularidades cosmológicas, em particular singularidades futuras repentinas, também conhecidas como singularidades "suaves". Apresentamos alguns modelos baseados em campos de táquions, revelando a singularidade do tipo Big Brake e o efeito de transformação de campos de matéria. Estudamos campos escalares com diferentes tipos de Lagrangianas, escrevendo as equações diferenciais de segunda ordem para as perturbações lineares desses campos na vizinhança de uma singularidade futura repentina. Se ambas as soluções independentes forem regulares, construímos o estado de vácuo para partículas quânticas como uma função gaussiana. Se pelo menos uma das duas soluções independentes têm um comportamento assintótico singular, então não podemos definir os operadores de criação e aniquilação e construir o vácuo. Isso significa que não é possível conservar uma noção de partícula.

**Palavras-chave** singularidades repentinas, partículas quânticas, singularidade Big Brake

## 1 Introdução

Os primeiros modelos cosmológicos da teoria de Einstein com soluções exatas revelaram a presença de um fenômeno muito notável: a singularidade do Big Bang (Grande Expansão, em português). A singularidade inicial (juntamente com os problemas da planicidade e do horizonte) é um dos problemas importantes do modelo cosmológico padrão. Desde a descoberta da singularidade do Big Bang por Alexander Friedmann em 1922 [1], uma questão fundamental foi formulada por Lev Landau em 1959: este fenômeno é uma consequência das simplificações dos modelos exatamente solucionáveis, ou a aparição de singularidades é propriedade geral das equações de Einstein?

Esta pergunta foi respondida por V. Belinsky, I. Khalatnikov e E. Lifshitz (BKL) [2; 3; 4] em 1969: uma singularidade é uma propriedade geral de uma solução cosmológica genérica das equações gravitacionais clássicas e não uma consequência da estrutura simétrica dos modelos exatos. BKL foram capazes de encontrar a estrutura analítica desta solução genérica e mostrar que seu comportamento é de caráter oscilatório extremamente complexo, do tipo caótico. Em outras palavras, o trabalho de BKL revelou o fenômeno enigmático de uma abordagem oscilatória da singularidade que se tornou conhecido também como Universo Mixmaster [5]. O modelo do universo homogêneo fechado mas anisotrópico, com três graus de liberdade (modelo cosmológico Bianchi IX), foi usado para demonstrar que o universo se aproxima da singularidade de tal forma que sua contração ao longo de dois eixos é acompanhada por uma expansão em relação ao terceiro eixo. E os eixos mudam seus papéis de acordo com uma lei bastante complicada que revela um comportamento caótico [3; 4; 6; 7].

Alguns anos antes, em 1965, R. Penrose publicou o teorema da singularidade [8], apresentando a ideia de incompletude geodésica para descrever espaços-tempos singulares e introduzindo a noção de superfície fechada aprisionada, uma grande contribuição conceitual para a teoria do campo gravitacional. O teorema de Penrose garante que algum tipo de incompletude geodésica ocorre dentro de qualquer buraco negro sempre que a matéria satisfaz condições de energia fraca. Outro teorema, o teorema da singularidade de Hawking [9], garante que o Big Bang tem densidade infinita. Este teorema é mais restrito e é válido quando a matéria obedece à condição de energia dominante (a densidade de energia é maior que a pressão).

Até o final da década de 1990, quase todas as discussões sobre cosmologia clássica e quântica de singularidades foram dedicadas às singularidades do Big Bang e Big Crunch (Grande Colapso, em português), que são caracterizadas por um raio cosmológico (fator de escala) nulo. A situação mudou após a descoberta do fenômeno da aceleração cósmica. Essa descoberta foi o ponto de partida para a formulação de modelos cosmológicos contendo energia escura. Esta última é considerada responsável pela

expansão acelerada do Universo, por causa de suas propriedades específicas. A característica fundamental da energia escura é que ela possui uma pressão  $p$  tal que a condição de energia forte,  $\rho + 3p > 0$ , é violada (aqui  $\rho$  é a densidade de energia). A construção de diferentes modelos cosmológicos que descrevem a energia escura e que apresentam outros tipos de singularidades cosmológicas tem atraído a atenção de pesquisadores. Em primeiro lugar, devemos mencionar a singularidade do Big Rip (Grande Ruptura, em português) (10; 11), que surge nos modelos onde a energia fantasma está presente (12). Tal singularidade é caracterizada por valores infinitos do raio cosmológico, da sua derivada temporal, do parâmetro de Hubble e sua derivada temporal e, portanto, da sua densidade de energia e pressão. Por energia fantasma entende-se a substância cuja pressão é negativa e tem um valor absoluto maior que sua densidade de energia.

Investigações cinemáticas de cosmologias de Friedmann levantaram a questão sobre a possibilidade da existência de uma singularidade futura repentina (15), caracterizada por uma divergência de  $\ddot{a}$ , enquanto o fator de escala  $a$  e  $\dot{a}$  são finitos, onde daqui em diante o ponto sempre se refere à derivada com relação ao tempo. Assim, o parâmetro de Hubble,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , e a densidade de energia  $\rho$  também são finitos, enquanto a primeira derivada do parâmetro de Hubble e a pressão  $p$  divergem. Este trabalho é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos algumas propriedades de singularidades futuras e suas classificações, em particular de singularidades futuras repentinas. Na Seção 3, apresentamos um exemplo de definição de partículas em espaço-tempo curvo no exemplo de um campo escalar no universo de Friedmann. Na Seção 4, estudamos modelos cosmológicos baseados em campos de táquions, revelando a singularidade do tipo Big Brake (Grande Freio, em português), outras singularidades futuras repentinas e os efeitos de transformação de campos de matéria. O objetivo principal é analisar o comportamento de partículas quânticas na vizinhança de singularidades futuras repentinas. Esse trabalho é baseado em (13) e (14).

## 2 Singularidades futuras repentinas e sua classificação

Nos estudos dedicados às singularidades repentinas, pode-se distinguir três tópicos principais. O primeiro deles trata da compatibilidade dos modelos que possuem singularidades repentinas com dados observacionais (16; 17; 18; 19). A segunda direção está ligada ao estudo dos efeitos quânticos (20)–(29). Aqui temos duas opções: o estudo de correções quânticas à equação de Friedmann efetiva, que pode eliminar singularidades clássicas ou, pelo menos, mudar sua forma (22; 24; 30), e o estudo das soluções da equação de Wheeler-DeWitt para o estado quântico do universo na presença de singularidades repentinas (24; 25; 26; 28). A terceira direção está ligada à oportunidade de atravessar singularidades repentinas na cosmologia clássica (27; 31; 32).

Uma característica particular das singularidades repentinas futuras é sua "suavidade" (31). Como os símbolos de Christoffel dependem apenas da primeira derivada do fator de escala, eles são regulares nessas singularidades. Logo, as geodésicas têm um bom comportamento e podem atravessar a singularidade (31). Pode-se argumentar que as partículas que atravessam a singularidade irão gerar a geometria do espaço-tempo, proporcionando de tal forma um renascimento suave do universo após o atravessamento da singularidade (32). Ou seja, a geometria do espaço-tempo pode ser reconstruída a partir do conhecimento de cada uma de suas geodésicas, e a evolução do universo não pára ao passar por uma singularidade repentina. Uma vez que as partículas tenham passado pela singularidade, elas determinarão a geometria novamente e o universo continua evoluindo além da singularidade. Observe que a oportunidade de atravessamento de algum tipo de singularidade cosmológica já foi notada no artigo de Tipler (33). Uma ideia próxima de singularidades integráveis em buracos negros, que podem dar origem a uma cosmogênese, foi recentemente apresentada em (34)–(35).

Outra característica notável das singularidades futuras repentinas é sua capacidade de induzir mudanças nas equações de estado da matéria. Além disso, a forma da lagrangiana de matéria também pode ser alterada. Esses efeitos foram considerados em (36)–(38). Os efeitos da transformação da matéria ocorrem, às vezes, também sem singularidades, mas apenas na presença de algumas "não-analiticidades" na geometria do espaço-tempo. Esses fenômenos também têm relação com fenômenos do atravessamento de singularidades (37; 38). Na seção 4, apresentamos outro aspecto da presença de singularidades repentinas – estamos interessados no comportamento das partículas quânticas na vizinhança desses pontos específicos do espaço-tempo.

Apresentamos uma classificação das singularidades cosmológicas futuras, seguindo (38) e (39). Consideramos os modelos do universo com energia escura que contêm singularidades futuras de tempo finito. A singularidade do *tipo I* é chamada de singularidade de Big Rip, caracterizada por  $a \rightarrow \infty$ ,  $\dot{a} \rightarrow \infty$ ,  $H \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  e  $|p| \rightarrow \infty$  em algum momento finito de tempo  $t \rightarrow t_{BR}$ . Como já foi mencionado, este tipo de singularidade surge nos modelos onde a energia escura fantasma está presente.

A singularidade do *tipo II* corresponde às singularidades repentinas, que surgem em algum momento finito de tempo  $t \rightarrow t_S$ , onde  $a \rightarrow a_S$ ,  $\dot{a} \rightarrow \dot{a}_S$ ,  $H \rightarrow H_S$  e  $\rho \rightarrow \rho_S$ , mas a aceleração do universo  $\ddot{a}$  e a primeira derivada temporal do parâmetro de Hubble  $\dot{H}$  divergem para menos infinito, com a pressão tendendo para mais infinito,  $p \rightarrow \infty$ . Um caso particular de singularidade futura repentina desse tipo é a singularidade de Big Brake. Nesta singularidade, a derivada temporal de fator de escala, o parâmetro de Hubble e a densidade de energia são nulos. Como  $\ddot{a} \rightarrow -\infty$ , isso funciona como um "freio" infinitamente forte, forçando a derivada do fator de escala a ir para zero. Assim, a evolução do fator de escala termina. A singularidade de Big Brake pode surgir em modelos cosmológicos taquiônicos (40) com um potencial particular. Foi notado que essa singularidade pode

aparecer também em modelos cosmológicos mais simples, como no universo com fluido perfeito obedecendo à equação de estado  $p = \frac{A}{\rho}$ , onde  $A$  é uma constante positiva. Tal tipo de fluido é conhecido como gás de anti-Chaplygin, que surge na teoria das cordas (42) e foi introduzido no contexto da cosmologia em (25).

A singularidade do *tipo III* aparece no modelo com equação de estado  $p = -\rho - A\rho^\alpha$  e às vezes é chamada de "singularidade do fator de escala finito". O nome fala por si – este tipo de singularidade tem um fator de escala finito  $a \rightarrow a_S$ , mas ela é diferente da singularidade futura repentina, pois os outros parâmetros cosmológicos divergem, isto é  $\dot{a} \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ , e  $|p| \rightarrow \infty$ .

A singularidade do *tipo IV* é uma singularidade muito suave com fator de escala  $a$  finito,  $\rho$  e  $p$  tendendo a zero, mas derivadas de ordem maior do parâmetro de Hubble divergindo. Essas singularidades, às vezes, são chamadas de singularidades de Grande Separação.

A singularidade do *tipo V* é chamada de  $w$ -singularidade e caracterizada pelo valor finito de  $a$ , densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$  nulos, e derivadas de ordem maior do parâmetro de Hubble são regulares. O único comportamento singular aparece em um índice barotrópico  $w(t)$  que depende do tempo. No contexto das teorias físicas,  $w$ -singularidades podem aparecer nas teorias de gravidade  $f(R)$  (41), em modelos com campos escalares (43), e em cosmologias de branas (44). No trabalho (45) foi encontrada uma interessante dualidade entre a singularidade de Big Bang e a  $w$ -singularidade. A singularidade Big Bang é caracterizada por densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$  infinitos. Além disso, podemos assumir que o índice barotrópico  $w \rightarrow 0$  na vizinhança de  $t = 0$ . Assim, a dualidade encontrada é descrita como  $p_{BB} \leftrightarrow \frac{1}{p_w}$ ,  $\rho_{BB} \leftrightarrow \frac{1}{\rho_w}$  e  $w_{BB} \leftrightarrow \frac{1}{w_w}$ , onde os índices  $BB$  e  $w$  correspondem às singularidades Big Bang e  $w$  respectivamente.

As singularidades que ficam fora dessa classificação são as tradicionais singularidades Big Bang e Big Crunch, às vezes chamadas de singularidades do *tipo 0* (46).

### 3 Definição de partículas: um exemplo com campo escalar

Sabemos que a noção de partícula torna-se complicada quando se considera a teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo. Nesta seção resumimos o procedimento geral para a definição das partículas no exemplo de um campo escalar  $\phi$  no universo de Friedmann com a métrica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2. \quad (1)$$

A equação de Klein-Gordon para o campo escalar minimamente acoplado  $\phi$  com o potencial  $V(\phi)$  é dada por

$$\square\phi + V'(\phi) = 0, \quad (2)$$

onde  $\square\phi$  é o operador de d'Alembert. Consideramos uma solução espacialmente homogênea  $\phi_0$ , que depende apenas do tempo  $t$ . Um pequeno desvio desta solução pode ser representado como uma soma de harmônicas de Fourier satisfazendo a equação

$$\ddot{\phi}(\vec{k}, t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(\vec{k}, t) + \frac{\vec{k}^2}{a^2(t)}\phi(\vec{k}, t) + V''(\phi_0(t))\phi(\vec{k}, t) = 0. \quad (3)$$

O campo quantizado correspondente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} (\hat{a}(\vec{k})u(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})u^*(\vec{k}, t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (4)$$

onde os operadores de criação e aniquilação satisfazem a relação de comutação:

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (5)$$

enquanto as funções de base  $u$  satisfazem a Eq. (3). Além disso, as funções de base devem ser normalizadas de modo que as relações de comutação canônica entre o campo  $\phi$  e seu momento canônico conjugado  $\hat{\mathcal{P}}$  foram satisfeitas,

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\mathcal{P}}(\vec{y}, t')] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (6)$$

Levando em conta a relação de comutação (5), a representação de Fourier para a função delta de Dirac e o fato que o momento de campo com acoplamento mínimo é dado por

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{x}, t) = a^3(t)\dot{\phi}(\vec{x}, t), \quad (7)$$

podemos mostrar que a relação (6) é satisfeito se

$$u(k, t)\dot{u}^*(k, t) - u^*(k, t)\dot{u}(k, t) = \frac{i}{(2\pi)^3 a^3(t)}. \quad (8)$$

A equação (3) possui duas soluções independentes. Quanto às funções  $u$ , podemos tomar diferentes combinações lineares dessas soluções escolhidas de tal forma que a relação wronskiana (8) seja satisfeita. Diferentes escolhas dessas funções determinam

diferentes escolhas dos operadores de criação e aniquilação e diferentes estados de vácuo sobre os quais os espaços de Fock podem ser construídos. De qualquer forma, para ter uma definição de partícula é necessário obter duas soluções independentes não-singulares da Eq. (3). No entanto, isso é um requisito não trivial em situações com uma singularidade ou outro tipo de irregularidade na geometria do espaço-tempo. Entendemos que isso é relacionado com a presença do fator de escala dependente do tempo  $a(t)$  no lado direito da relação (8).

É conveniente também construir explicitamente o estado de vácuo para partículas quânticas como uma função gaussiana da variável correspondente. Introduzimos um operador:

$$\hat{f}(\vec{k}, t) = (2\pi)^3 (\hat{a}(\vec{k})u(k, t) + \hat{a}^+(-\vec{k})u^*(k, t)). \quad (9)$$

O momento canônico conjugado é dado por

$$\hat{p}(\vec{k}, t) = a^3(t)(2\pi)^3 (\hat{a}(\vec{k})\dot{u}(k, t) + \hat{a}^+(-\vec{k})\dot{u}^*(k, t)). \quad (10)$$

Usamos a relação wronskiana (8) para escrever o operador de aniquilação como

$$\hat{a}(\vec{k}) = i\hat{p}(\vec{k}, t)u^*(k, t) - ia^3(t)\hat{f}(\vec{k}, t)\dot{u}^*(k, t). \quad (11)$$

Expressando os operadores  $\hat{f}$  e  $\hat{p}$  como

$$\hat{f} \rightarrow f, \quad \hat{p} \rightarrow -i\frac{d}{df}, \quad (12)$$

escrevemos a equação para o estado de vácuo correspondente na seguinte forma:

$$\left(u^*\frac{d}{df} - ia^3\dot{u}^*f\right)\Psi_0(f) = 0. \quad (13)$$

Assim, obtemos a solução normalizada da Eq. (13),

$$\Psi_0(f) = \frac{1}{\sqrt{|u(k, t)|}} \exp\left(\frac{ia^3(t)\dot{u}^*(k, t)f^2}{2u^*(k, t)}\right). \quad (14)$$

#### 4 Partículas e singularidades repentinas em modelos de táquion

A descoberta da aceleração cósmica (47) estimulou as buscas pela energia escura responsável por este efeito (48; 49). Um dos possíveis candidatos para essa função foi o campo de táquion, surgido nas teorias de cordas (40; 50; 51; 52). Na verdade, o que é chamado de campo de táquion é uma modificação de uma velha ideia de Born e Infeld (53), de que o termo cinético de um campo pode ter uma forma não polinomial. A Lagrangiana do campo de táquion  $T$  possui a seguinte forma:

$$L = -V(T)\sqrt{1 - g^{\mu\nu}T_{,\mu}T_{,\nu}}, \quad (15)$$

onde  $T_{,\mu}$  corresponde a derivada covariante do campo  $T$  e  $g^{\mu\nu}$  é um tensor métrico. A Eq. (15) para um campo espacialmente homogêneo torna-se:

$$L = -V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (16)$$

A pressão negativa torna o campo de táquion um bom candidato para o papel da energia escura,

$$p = -V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (17)$$

A equação de campo é dada por:

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{V_{,T}}{V(T)} = 0. \quad (18)$$

Também existe uma grande liberdade para a escolha do potencial  $V(T)$ . No trabalho (20) foi escolhido um potencial em termos de funções trigonométricas,

$$V(T) = \Lambda \frac{\sqrt{1 - (1+w)\cos^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda(1+w)}T\right)}}{\sin^2\left[\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda(1+w)}T\right]}, \quad (19)$$

onde  $\Lambda$  é uma constante positiva e  $-1 < w \leq 1$ . Qual é a origem desse potencial? Se consideramos um modelo de Friedmann plano com a constante cosmológica  $\Lambda$  e um fluido perfeito de índice barotrópico constante  $w$ , então podemos encontrar uma solução exata para a evolução cosmológica. Fica possível reconstruir o potencial  $V(T)$  do campo de táquion gerando esta

solução exata como uma solução particular do sistema que inclui a equação de Friedmann e a Eq. (18). Este potencial nada mais é do que o potencial (19) do trabalho (20) já mencionado. Porém, a dinâmica do modelo de Friedmann baseada no campo de táquion com potencial (19) é mais rica do que a do modelo com dois fluidos, pois o modelo com táquion possui mais graus de liberdade. Estamos interessados no caso do parâmetro  $w$  positivo. Para estudar esse caso é conveniente reescrever a Eq. (18) como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem,

$$\dot{T} = s, \quad (20)$$

$$\dot{s} = -3\sqrt{V} (1 - s^2)^{\frac{3}{4}} s - (1 - s^2) \frac{V_{,T}}{V}. \quad (21)$$

O retrato de fase para este sistema dinâmico é apresentado na Fig. 1, que foi retirada do artigo (20). O potencial (19) é bem definido dentro do retângulo com  $-1 \leq s \leq 1$  e  $T_3 \leq T \leq T_4$ , onde

$$T_3 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+w}}, \quad (22)$$

$$T_4 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \left( \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+w}} \right). \quad (23)$$

Vamos ver que o que acontece quando o universo se aproxima da região no canto inferior esquerdo. A expressão na raiz quadrada do potencial (19) e a expressão cinética  $\sqrt{1 - s^2}$  tendem a zero e, aparentemente, o universo não pode atravessar essa região.

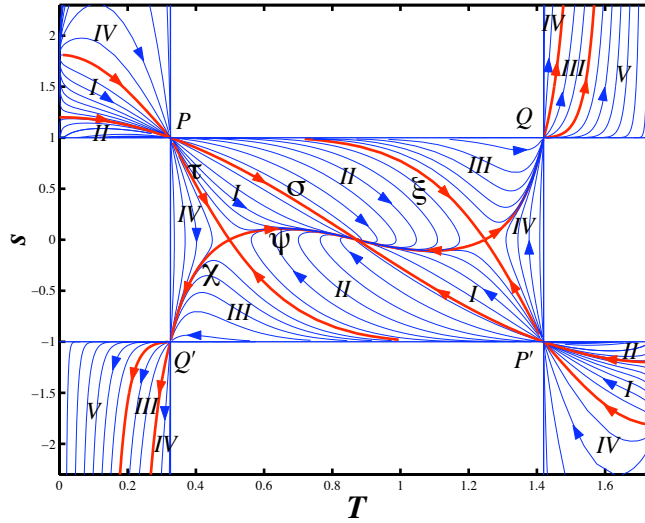


Figura 1: Retrato de fase para o sistema dinâmico do modelo com campo de táquion e potencial trigonométrico para parâmetro  $w$  positivo.

Ao mesmo tempo, podemos observar que o ponto  $Q'$  não é um ponto crítico do sistema dinâmico e por isso não há singularidade cosmológica nesta região do canto inferior esquerdo. Além disso, as equações diferenciais são regulares. No trabalho (20), foi sugerido que a única saída possível seria a Lagrangiana mudar a sua forma tal que as equações de movimento se conservem. A nova Lagrangiana é dada por:

$$L = W(T) \sqrt{\dot{T}^2 - 1} \quad (24)$$

com o novo potencial

$$W(T) = \Lambda \frac{\sqrt{(1+w) \cos^2 \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda(1+w)} T \right] - 1}}{\sin^2 \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda(1+w)} T \right]}, \quad (25)$$

e o novo campo (ou a nova forma do campo antigo) é chamado de pseudotáquion (20). Esse campo surge quando o universo entra na faixa infinita esquerda inferior na Fig. 1. A equação de Friedmann no caso de universo descrito pelo campo de pseudotáquion é

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{W(T)}{\sqrt{\dot{T}^2 - 1}}. \quad (26)$$

Quando o universo atravessa o canto inferior esquerdo, a parte espacialmente homogênea do campo  $T$  se comporta como

$$T = T_3 + \bar{T}, \quad (27)$$

onde  $\bar{T}$  é uma pequena perturbação, enquanto

$$s = -1 + \bar{s}. \quad (28)$$

Substituindo as equações (27) e (28) na Eq. (18), encontramos que as funções  $\bar{T}$  e  $\bar{s}$  satisfazem uma equação simples:

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{T}} = \frac{\bar{s}}{\bar{T}}. \quad (29)$$

A sua solução geral é dada por:

$$\bar{s} = C\bar{T}, \quad (30)$$

onde  $C$  é uma constante positiva. Podemos escolher, por conveniência, o momento da travessia em  $t = 0$  e, lembrando que  $s = \dot{T}$ , temos:

$$\bar{T} = -t, \quad (31)$$

e

$$\bar{s} = -Ct. \quad (32)$$

É interessante notar que, no artigo (19), as previsões do modelo sugeridas no artigo (20) foram comparados com os dados de Supernovas do tipo Ia e foi descoberto que havia trajetórias cosmológicas compatíveis com esses dados indo em direção às regiões dos cantos.

Vamos ver o que acontece com partículas cosmológicas durante a transformação do campo de táquion no campo de pseudotáquion. Para isso, adicionamos à Eq. (18) os termos responsáveis pela contribuição das derivadas espaciais:

$$\frac{\ddot{T} \left(1 + \frac{1}{a^2} T_{,i} T_{,i}\right)}{1 - \dot{T}^2 + \frac{1}{a^2} T_{,i} T_{,i}} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{T} + \frac{V_{,T}}{V} + \frac{\dot{a} a \dot{T} T_{,i} T_{,i} - 2a^2 \dot{T} \dot{T}_{,i} T_{,i} + T_{,i} T_{,j} T_{,ij}}{a^4 \left(1 - \dot{T}^2 + \frac{1}{a^2} T_{,i} T_{,i}\right)} - \frac{1}{a^2} \Delta T = 0. \quad (33)$$

Podemos resolver esta equação diferencial usando perturbações lineares para o campo de táquion,

$$T = T_0 + \tilde{T},$$

onde  $T_0$  é a solução da equação do campo de táquion para o modo de fundo espacialmente homogêneo e  $\tilde{T}$  é a perturbação linear. Obtemos a seguinte equação para as perturbações lineares,

$$\frac{\ddot{\tilde{T}}}{1 - \dot{T}_0^2} + \left( \frac{2\ddot{T}_0 \dot{T}_0}{(1 - \dot{T}_0^2)^2} + \frac{3\sqrt{V}(2 - \dot{T}_0^2)}{2(1 - \dot{T}_0^2)^{5/4}} \right) \dot{\tilde{T}} + \left( \frac{3V_{,T} \dot{T}_0}{2\sqrt{V}(1 - \dot{T}_0^2)^{1/4}} + \frac{V_{,TT}}{V} - \frac{V_{,T}^2}{V^2} + \frac{k^2}{a^2} \right) \tilde{T} = 0. \quad (34)$$

Nessa expressão, usamos a equação de Friedmann para reescrever  $\frac{\dot{a}}{a}$  como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho.$$

Em seguida, substituímos as expressões (27) e (28) na Eq. (34) no lugar de  $T_0$  e, mantendo os termos principais, obtemos a seguinte equação diferencial para as perturbações lineares:

$$\ddot{\tilde{T}} - \frac{1}{t} \dot{\tilde{T}} + \frac{C}{t} \tilde{T} = 0. \quad (35)$$

A solução é dada por:

$$\tilde{T} = c_1 t J_2 \left( \sqrt{Ct} \right) + c_2 t Y_2 \left( \sqrt{Ct} \right), \quad (36)$$

onde  $J$  e  $Y$  são as funções de Bessel. Ambas soluções são regulares quando  $t \rightarrow 0$  e as partículas devem passar pela região do canto inferior esquerdo. A mesma análise pode ser realizada na região do canto superior esquerdo da Fig. 1, onde o campo de pseudotáquion se transforma no campo de táquion enquanto o universo se expande.

Devido a não linearidade da Lagrangiana (15), o momento conjugado possui forma diferente da forma para modelos com campo escalar minimamente acoplado. Especificamente, em nosso caso, obtemos:

$$\mathcal{P}_{\tilde{T}} = \frac{V(T_0)}{\sqrt{1 - \dot{T}_0^2}} a^3 \dot{\tilde{T}}. \quad (37)$$

O Wronskiano assume a seguinte forma:

$$W = \frac{V(T_0)}{\sqrt{1 - \dot{T}_0^2}} a^3 \dot{T}. \quad (38)$$

Levando em consideração a equação de Friedmann, temos

$$\mathcal{P}_{\tilde{T}} = \dot{a}^2 a \dot{T}. \quad (39)$$

Podemos construir o estado quântico do vácuo como

$$\Psi_0(\tilde{T}) \sim \frac{1}{\sqrt{|u|}} \exp\left(i \dot{a}^2 a \frac{\dot{u}^*}{u^*} \tilde{T}^2\right). \quad (40)$$

O fator  $\dot{a}^2 a$  é um número finito na travessia da região do canto. Como segue da Eq. (36), na vizinhança da região do canto as funções de base se comportam como

$$u = A + i B t^2, \quad (41)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes, que satisfazem a relação de normalização. Obtemos que:

$$\Psi_0(\tilde{T}) \sim \exp\left(-C(-t)\tilde{T}^2\right), \quad (42)$$

onde  $C$  é uma constante positiva. O coeficiente na frente de  $\tilde{T}^2$  é proporcional a  $-t$ . Isso significa que no momento do cruzamento do canto inferior esquerdo a função gaussiana tem a dispersão infinita. Em seguida, após atravessar a região  $t > 0$ , a função terá a seguinte forma:

$$\Psi_0(\tilde{T}) \sim \exp\left(-C t \tilde{T}^2\right). \quad (43)$$

Neste caso, temos funções de base regulares na vizinhança da região do canto, mas ao passar por ele o estado de vácuo de alguma forma desaparece (podemos interpretar isso como a dispersão infinita) e então, imediatamente após o atravessamento, temos um espaço de Fock novamente. Possivelmente, este desaparecimento momentâneo do vácuo corresponda à transformação das partículas do campo de táquion nas partículas do campo de pseudotáquion.

Vamos lembrar o que acontece com o campo do pseudotáquion e o universo após o atravessamento da região do canto inferior esquerdo. Como foi descrito em (20), em algum momento finito de tempo e para algum valor finito do campo de táquion, o universo encontra a singularidade do tipo Big Brake, onde o fator de escala possui um valor finito com derivada temporal nula, enquanto a desaceleração vai para infinito. Escolhendo o momento de chegada ao Big Brake como  $t = 0$ , podemos escrever as expressões para o campo de pseudotáquion e para o fator de escala como (32):

$$T_0(t) = T_{BB} + \left(\frac{4}{3W(T_{BB})}\right)^{1/3} (-t)^{1/3}, \quad (44)$$

$$a(t) = a_{BB} - \frac{3}{4} a_{BB} \left(\frac{9W^2(T_{BB})}{2}\right)^{1/3} (-t)^{4/3}. \quad (45)$$

Nesse caso, a equação de Friedmann é dada pela Eq. (26), por isso a equação para a perturbação linear fica diferente da Eq. (34):

$$\frac{\ddot{\tilde{T}}}{1 - \dot{\tilde{T}}_0^2} + \left(\frac{2\ddot{T}_0\dot{T}_0}{(1 - \dot{T}_0^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{W}(2 - \dot{T}_0^2)}{(\dot{T}_0^2 - 1)^{5/4}}\right) \dot{\tilde{T}} + \left(\frac{3}{2} \frac{W_{,T}\dot{T}_0}{\sqrt{W}(\dot{T}_0^2 - 1)^{1/4}} + \frac{W_{,TT}}{W} - \frac{W_{,T}^2}{W^2} + \frac{k^2}{a_{BB}^2}\right) \tilde{T} = 0. \quad (46)$$

Usando a expressão (44), reduzimos a Eq. (46) à uma forma simples, mantendo apenas os termos principais:

$$\ddot{\tilde{T}} + \frac{5}{3t} \dot{\tilde{T}} + \frac{B^2}{t^{5/3}} \tilde{T} = 0, \quad (47)$$

onde

$$B^2 = -\frac{W_{,T}(T_{BB})}{16} \left(\frac{4}{3W(T_{BB})}\right)^{4/3} > 0. \quad (48)$$

A solução geral da Eq. (47) é

$$\tilde{T}(t) = c_1 t^{-1/3} J_2\left(B t^{1/6}\right) + c_2 t^{-1/3} Y_2\left(B t^{1/6}\right). \quad (49)$$

Podemos ver que o segundo termo do lado direito da Eq. (49) é singular em  $t \rightarrow 0_-$ , portanto não temos duas soluções independentes da equação diferencial (47) para construir o espaço de Fock. Assim, ao se aproximarem da singularidade do Big Brake, as partículas de alguma forma desaparecem.

É interessante considerar uma situação um pouco diferente quando o universo encontra uma singularidade repentina mais geral (36). Suponha que nosso universo seja preenchido não apenas com o campo de táquion com o potencial descrito acima (20), mas também com alguma quantidade de poeira. O que acontecerá em tal universo quando a densidade de energia do campo de pseudotáquion tender a zero, enquanto sua pressão tender a infinito? Nesse caso, a desaceleração também tenderia a infinito, enquanto a densidade de energia da poeira é finita e, portanto, o universo deveria continuar sua expansão. No entanto, se o universo continuar a expansão, a densidade de energia do campo de pseudotáquion torna-se imaginária. Assim, temos um paradoxo (54). A solução deste paradoxo foi encontrada pela primeira vez para o caso de gás de anti-Chaplygin - fluido perfeito com a equação de estado dada por:

$$p = \frac{A}{\rho}, \quad A > 0,$$

que representa o modelo mais simples onde surge a singularidade do tipo Big Brake. A solução desse problema (36) consiste no fato que a equação de estado deste gás sofre uma transformação e se torna o gás de Chaplygin, mas com densidade de energia negativa. Esta solução foi estendida ao caso do campo de pseudotáquion, que se transforma no campo de quasitáquion com a seguinte Lagrangiana:

$$L = W(T)\sqrt{\dot{T}^2 + 1}. \quad (50)$$

Quando o universo está correndo em direção à singularidade futura repentina, o campo de pseudotáquion se comporta como

$$T(t) = T_s + \frac{2}{\sqrt{6}H_S}\sqrt{-t}, \quad (51)$$

onde o valor do parâmetro do Hubble na singularidade  $H_S$  é encontrado a partir da equação de Friedmann para o universo com poeira,

$$H_S^2 = \frac{\rho_0}{a_S^3}, \quad (52)$$

sendo  $\rho_0$  uma constante positiva. Para obter a equação correta para as perturbações lineares do campo de pseudotáquion na vizinhança da singularidade, usamos a equação de Friedmann na presença do campo de pseudotáquion e da poeira,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_S^2 + \frac{W(T_0)}{\dot{T}^2 - 1}. \quad (53)$$

Como resultado, obtemos a seguinte equação para as perturbações lineares do campo (onde, como antes, mantemos apenas os termos principais nos coeficientes de  $\ddot{T}$ ,  $\dot{T}$  e  $\tilde{T}$ ):

$$\ddot{T} - \frac{1}{2t}\dot{T} + \frac{B^2}{6H_S t}\tilde{T} = 0, \quad (54)$$

onde,

$$B^2 = \frac{W_{,TT}(T_S)}{W(T_S)} - \frac{W_{,T}^2(T_S)}{W^2(T_S)} + \frac{k^2}{a_S^2} > 0.$$

A solução da equação é dada por

$$\tilde{T}(t) = c_1 t^{3/4} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{B}{\sqrt{6}H_S}t^{\frac{1}{2}}\right) + c_2 t^{3/4} Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{B}{\sqrt{6}H_S}t^{\frac{1}{2}}\right). \quad (55)$$

Temos que as duas soluções da Eq. (54) são regulares e podemos construir os operadores de criação e aniquilação, bem como o espaço de Fock. As funções de base na vizinhança da singularidade são

$$u = D + iF(-t)^{\frac{3}{2}}, \quad (56)$$

e, portanto,

$$\frac{\dot{u}^*}{u^*} \sim \frac{iF(-t)^{\frac{1}{2}}}{D}. \quad (57)$$

Por outro lado, da Eq. (51) temos que:

$$\frac{V(T_S)}{\sqrt{\dot{T}^2 - 1}} \sim \sqrt{-t}. \quad (58)$$

Obtemos a função de onda na forma:

$$\Psi_0(\tilde{T}) \sim \exp(-C(-t)\tilde{T}^2). \quad (59)$$

Encontramos a mesma situação que vimos no atravessamento da região do canto inferior esquerdo: a dispersão da função gaussiana tende ao infinito no atravessamento da singularidade. No entanto, a situação parece mais regular na presença de poeira. Como interpretar esse fato? Talvez podemos pensar que a evolução do universo na travessia da singularidade é impulsionada principalmente pela poeira e isso torna os modos de partículas do campo de táquion mais regulares.

## 5 Conclusões

Nesse trabalho, estudamos um modelo cosmológico baseado em campo de táquion com potencial trigonométrico. Dois efeitos peculiares distinguem este modelo. Primeiro, existem transformações entre diferentes tipos de campos do tipo Born-Infeld — táquions, pseudotáquions e quase-táquions. Segundo, o aparecimento de singularidade futura do tipo Big Brake ou, na presença de poeira, de singularidade futura repentina mais geral. Analisamos as perturbações dos campos do tipo Born-Infeld para as três equações diferenciais. O caso mais simples é a passagem pelo ponto onde o potencial e o termo cinético são iguais a zero. Neste caso temos que as duas soluções da equação diferencial são regulares, mas, ao passar pela região do canto inferior esquerdo, o estado de vácuo desaparece (podemos interpretar isso como a dispersão infinita), e imediatamente após o atravessamento temos novamente espaço de Fock. A situação muda quando o universo descrito pelo campo de pseudotáquion se aproxima da singularidade do tipo Big Brake. Neste caso, temos que uma das duas soluções é singular e, portanto, as partículas não existem. Curiosamente, se adicionarmos ao modelo alguma quantidade de matéria semelhante à poeira, o caráter da singularidade muda ligeiramente e a equação diferencial para as perturbações do campo do pseudotáquion tem duas soluções regulares independentes. Assim, as partículas existem e a presença de poeira funciona como fator de “normalização” da passagem pela singularidade.

Notamos que, se um campo conduz a evolução em direção a alguns pontos especiais como singularidades, então, descrevendo as perturbações lineares desse campo, que servem como uma ferramenta para a definição do estado de vácuo, espaço Fock e partículas, encontramos funções de base singulares. No caso do modelo descrito pelo campo de táquion e a poeira, a evolução através da singularidade suave é impulsionada principalmente pela poeira e não pelo campo de táquion. Essa é uma razão plausível para o aparecimento de funções de base bem definidas para as perturbações do campo de táquion. Mas a análise da função de onda de vácuo nos dá a mesma situação que temos no atravessamento da região do canto inferior esquerdo: a dispersão da função gaussiana tende ao infinito na travessia da singularidade.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## Referências

- [1] A. Friedman, *On the curvature of space*, Z.Phys. 10 (1922) 377-386, Gen.Rel.Grav. 31 (1999) 1991-2000.
- [2] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, *On the nature of the singularities in the general solutions of the gravitational equations*, Sov.Phys. JETP 29 (1969) 911.
- [3] V. A. Belinsky, E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *Oscillatory approach to the singular point in relativistic cosmology*, Sov.Phys.Usp. 13 (1971) 745.
- [4] V. A. Belinsky, E. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *A general solution of the Einstein equations with a time singularity*, Adv.Phys. 31 (1982) 639-667.
- [5] C. W. Misner, *Mixmaster Universe*, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 1071-1074.
- [6] E. M. Lifshitz, I. M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, *Asymptotic analysis of oscillatory mode of approach to a singularity in homogeneous cosmological models*, Sov.Phys.JETP 32 (1971) 173.
- [7] I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz, K. M. Khanin, L. N. Shchur, Ya. G. Sinai, J.Stat.Phys. 38 (1985) 97.
- [8] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys.Rev.Lett. 14 (1965) 57-59.
- [9] S.W. Hawking, *Properties of expanding universes*, PhD Thesis, University of Cambridge (1966).
- [10] A. A. Starobinsky, *Future and origin of our universe: Modern view*, Grav.Cosmol. 6 (2000) 157-163.
- [11] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. N. Weinberg, *Phantom energy: Dark energy with  $w < -1$  causes a cosmic doomsday*, Phys.Rev.Lett. 91 (2003) 071301.
- [12] R. R. Caldwell, *A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state*, Phys.Lett. B 545 (2002) 23-29.
- [13] O.Galkina, Alexander Yu. Kamenshchik, *Future soft singularities, Born-Infeld-like fields and particles*, Phys.Rev.D 102 (2020) 2, 024078.
- [14] O. Galkina, *Scalar-tensor theories of gravity and their cosmological applications*, Phd Thesis, Universidade Federal do Espírito Santo (2020).
- [15] J. D. Barrow, G. J. Galloway and F. Tipler, *The closed-universe recollapse conjecture*, Mon.Not.Roy.Astron. Soc. 223 (1986) 835.

- [16] M. P. Dabrowski, T. Denkiewicz and M. A. Hendry, *How far is it to a sudden future singularity of pressure?* Phys.Rev. D 75 (2007) 123524.
- [17] T. Denkiewicz, *Observational Constraints on Finite Scale Factor Singularities*, JCAP 07 (2012) 036.
- [18] T. Denkiewicz, M. P. Dabrowski, H. Ghodsi and M. A. Hendry, *Cosmological tests of sudden future singularities*, Phys.Rev. D 85 (2012) 083527.
- [19] Z. Keresztes, L. A. Gergely, V. Gorini, U. Moschella and A. Yu. Kamenshchik, *Tachyon cosmology, supernovae data, and the big brake singularity*, Phys.Rev. D 79 (2009) 083504.
- [20] V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Tachyons, scalar fields and cosmology*, Phys.Rev. D 69 (2004) 123512.
- [21] P. Tretyakov, A. Toporensky, Yu. Shtanov and V. Sahni, *Quantum effects, soft singularities and the fate of the universe in a braneworld cosmology*, Class.Quantum Grav. 23 (2006) 3259-3274 .
- [22] J. D. Barrow, A. B. Batista, G. Dito, J. C. Fabris and S. Houndjo, *Sudden singularities survive massive quantum particle production*, Phys.Rev. D 84 (2011) 123518.
- [23] J. de Haro, J. Amoros and E. Elizalde, *Sudden singularities in semiclassical gravity*, Phys.Rev. D 85 (2012) 123527.
- [24] M. P. Dabrowski, C. Kiefer and B. Sandhofer, *Quantum phantom cosmology*, Phys.Rev. D 74 (2006) 044022.
- [25] A. Yu. Kamenshchik, C. Kiefer, and B. Sandhöfer, *Quantum cosmology with a big-brake singularity*, Phys.Rev. D 76 (2007) 064032.
- [26] M. Bouhmadi-Lopez, C. Kiefer, B. Sandhofer, and P. V. Moniz, *Quantum fate of singularities in a dark-energy dominated universe*, Phys.Rev. D 79 (2009) 124035.
- [27] A. Y. Kamenshchik and S. Manti, *Scalar field potentials for closed and open cosmological models*, Phys.Rev. D 85 (2012) 123518.
- [28] E. M. Barboza, Jr. and N. A. Lemos, *Does the Big Rip survive quantization?* Gen.Rel.Grav. 38 (2006) 1609-1622.
- [29] H. Calderon and W. A. Hiscock, *Quantum fields and "Big Rip" expansion singularities*, Class.Quant. Grav. 22 (2005) L23-L26.
- [30] Y. Shtanov and V. Sahni, *New cosmological singularities in braneworld models*, Class.Quant.Grav. 19 (2002) L101-L107.
- [31] L. Fernández-Jambrina and R. Lazkoz, *Geodesic behavior of sudden future singularities*, Phys.Rev. D 70 (2004) 121503.
- [32] Z. Keresztes, L. A. Gergely, A. Y. Kamenshchik, V. Gorini, and D. Polarski, *Will the tachyonic Universe survive the Big Brake?* Phys.Rev. D 82 (2010) 123534.
- [33] F. J. Tipler, *Singularities in conformally flat spacetimes*, Phys.Lett. A 64 (1977) 8-10.
- [34] V. N. Lukash, E. V. Mikheeva, and V. N. Strokov, *The early universe and cosmogenesis*, Phys.Usp. 55 (2012) 204.
- [35] V. N. Lukash, E. V. Mikheeva, and V. N. Strokov, *Generation of cosmological flows in General Relativity (features and properties of integrable singularities)*, Phys.Usp. 55 (2012) 831-837.
- [36] Z. Keresztes, L. A. Gergely, A. Yu. Kamenshchik, V. Gorini, and D. Polarski, *Soft singularity crossing and transformation of matter properties*, Phys.Rev. D 88 (2013) 023535.
- [37] A. Y. Kamenshchik, *Singularity crossing, transformation of matter properties and the problem of parametrization in field theories*, Found.Phys. 48 (2018) 10, 1159-1176.
- [38] A. Yu. Kamenshchik, *Quantum cosmology and late-time singularities*, Class.Quant.Grav. 30 (2013) 173001.
- [39] Sh. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Tsujikawa, *Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe*, Phys.Rev. D 71 (2005) 063004.
- [40] A. Sen, *Rolling tachyon*, JHEP 04 (2002) 048.
- [41] A.A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys.Lett. B91 (1980) 99-102.
- [42] A.Vilenkin, *Effect of Small Scale Structure on the Dynamics of Cosmic Strings*, Phys.Rev.D 41 (1990) 3038.
- [43] M.R. Setare and E.N. Saridakis, *Non-minimally coupled canonical, phantom and quintom models of holographic dark energy*, Phys.Lett. B 671 (2009) 331.
- [44] V. Sahni and Yu. Shtanov, *Did the universe loiter at high redshifts?* Phys.Rev. D 71 (2005) 084018.
- [45] M. P. Dabrowski and T. Denkiewicz, *Barotropic index w-singularities in cosmology*, Phys.Rev. D 79 (2009) 06352.
- [46] M. P. Dabrowski and K. Marosek, *Regularizing cosmological singularities by varying physical constants*, JCAP 02 (2013) 012.

- 
- [47] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron.J. 116 (1998) 1009-1038.
  - [48] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*, Int.J.Mod.Phys. D 9 (2000) 373-444.
  - [49] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, Int.J.Mod.Phys. D 15 (2006) 1753-1936.
  - [50] A. Feinstein, *Power-law inflation from the rolling tachyon*, Phys.Rev. D 66 (2002) 063511.
  - [51] T. Padmanabhan, *Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter*, Phys.Rev. D 66 (2002) 021301.
  - [52] A. V. Frolov, L. Kofman, and A. A. Starobinsky, *Prospects and problems of tachyon matter cosmology*, Phys.Lett. B 545 (2002) 8-16.
  - [53] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc.Roy.Soc.Lond. A 144 (1934) 852, 425-451.
  - [54] Z. Keresztes, L. A. Gergely, and A. Y. Kamenshchik, *Paradox of soft singularity crossing and its resolution by distributional cosmological quantities*, Phys.Rev. D 86 (2012) 063522.