
ANÁLOGOS GRAVITACIONAIS, ABSORÇÃO E ESTADOS LIGADOS

AS ASTROCIENTISTAS

 **Carolina L. Benone**

Universidade Federal do Pará,
Salinópolis, 68.721-000, Brasil,
benone@ufpa.br

RESUMO

Analogias nos ajudam a entender sistemas a partir de modelos já compreendidos. No caso da relatividade geral, os modelos análogos surgiram como forma de trazer para o laboratório objetos astrofísicos, como buracos negros. Neste trabalho revisamos alguns modelos análogos à relatividade geral envolvendo fluidos e discutimos certos fenômenos que ocorrem na vizinhança de buracos negros a partir destes.

Palavras-chave Modelos análogos, Buraco acústico girante, Absorção, Estados ligados

1 Introdução

Desde a sua concepção a teoria da relatividade geral (TRG) já passou por diversos testes teóricos e experimentais. Até recentemente, estes testes experimentais eram realizados no regime de campo fraco. Dentre estes podemos destacar a detecção do desvio da luz, considerada como a primeira comprovação de uma previsão da TRG [1]. Em 2015, a colaboração LIGO detectou ondas gravitacionais pela primeira vez [2]. Esta detecção inaugurou o período de testes de TRG em regime de campo forte. Recentemente, com o final da terceira rodada de observações realizadas pela colaboração LIGO-Virgo-KAGRA, chegou a 90 o número de sinais de ondas gravitacionais detectados [3].

Dentre as previsões da TRG, a mais curiosa é certamente a da existência de objetos tão compactos que criam uma região de não-retorno ao seu redor, da qual nem mesmo a luz pode escapar. Estes objetos são hoje conhecidos como buracos negros e apresentam uma rica fenomenologia. Quando consideramos efeitos quânticos ao redor dos mesmos vemos que eles emitem radiação térmica, o que nos mostra que buracos negros não são eternos, mas evaporam [4]. Embora essa previsão tenha sido feita em 1974, a possibilidade de medir essa radiação emitida por um buraco negro diretamente é ínfima, uma vez que para um buraco negro astrofísico esta radiação é da ordem de 10^{-6} K. Todavia, uma esperança reside nos buracos negros primoriais [5]. Estes teriam se formado nos primeiros estágios do nosso universo, mas hoje teriam uma massa muito pequena. Como a temperatura Hawking é inversamente proporcional à massa, estes buracos negros primoriais poderiam emitir uma radiação à uma temperatura passível de ser medida.

Uma forma alternativa de atacar este problema foi sugerida por Unruh em um artigo publicado em 1981 [6]. Neste trabalho, Unruh considera uma perturbação sonora em um fluido com um escoamento convergente, mostrando que esta perturbação obedece às mesmas equações que um campo escalar em uma geometria curva. A partir daí, pode-se mostrar que os mesmos argumentos que levam à evaporação de um buraco negro levam também a uma radiação térmica no caso do som. Este trabalho é considerado como pioneiro da área de análogos gravitacionais. Desde então, surgiram diversos modelos de análogos à buracos negros utilizados para estudar não somente radiação Hawking, mas também diversos aspectos da fenomenologia de buracos negros, como superradiância [7], espalhamento [8, 9] e estados ligados [10, 11].

Os modelos análogos à TRG não se limitam a mimetizar buracos negros, podendo também ser utilizados para estudar espaços-tempos cosmológicos. Barceló e colaboradores, em 2003, consideraram quais os ingredientes necessários para se construir um análogo cosmológico [12]. Em um trabalho mais recente, Eckel e colaboradores estudaram um condensado de Bose-Einstein em formato de anel que se expande com o passar do tempo, mostrando que este sistema é análogo a um universo em expansão [13].

Neste trabalho faremos uma revisão de alguns modelos análogos à TRG e consideraremos alguns dos fenômenos que ocorrem em torno destes objetos. O restante deste trabalho é organizado da seguinte forma. Na seção 2 revisamos o buraco acústico

girante e um análogo gerado por ondas de gravidade. Na seção 3 consideramos absorção e estados ligados nestes modelos. Por fim, fazemos nossas considerações finais na seção 4.

2 Modelos análogos

2.1 Buraco acústico

As equações que regem o movimento dos fluidos são a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

e a equação de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = 0, \quad (2)$$

nas quais ρ é a densidade do fluido, P é a pressão e v é a velocidade do fluido. Se assumirmos um fluxo irrotacional, $\nabla \times \vec{v} = 0$, podemos escrever a velocidade em termos de um potencial

$$\vec{v} = -\nabla \Psi. \quad (3)$$

Assumindo ainda que o fluxo seja barotrópico, $\rho = \rho(P)$, temos que a entalpia também será uma função apenas de P ,

$$\nabla h = \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (4)$$

Ao considerar uma perturbação linear se propagando em um fluido, Unruh mostrou que esta perturbação obedece à equação de Klein-Gordon em uma geometria efetiva curva, i.e

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi \right) = 0, \quad (5)$$

na qual $g^{\mu\nu}$ e g são as componentes contravariantes e o determinante da métrica efetiva, respectivamente, e ψ está relacionado à perturbação na velocidade do fluido através de $\delta \vec{v} = -\nabla \psi$. Considerando que o fluido se desloca com uma velocidade dada por

$$\vec{v} = -\frac{D}{r} \hat{r} + \frac{C}{r} \hat{\phi}, \quad (6)$$

na qual D e C são constantes relacionadas com o escoamento e com a circulação, respectivamente, podemos mostrar que a métrica efetiva é dada por

$$ds^2 = - \left(c^2 - \frac{D^2 + C^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{D^2}{c^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 - 2C d\phi dt + r^2 d\phi^2, \quad (7)$$

na qual c é a velocidade do som. A partir deste ponto iremos tomar $c = 1$. Qualquer região em que o fluxo é supersônico corresponde a uma ergorregião, de forma que tomando $|\vec{v}| = 1$ encontramos que o limite da ergorregião ocorre para

$$r_E = \sqrt{D^2 + C^2}. \quad (8)$$

Já o horizonte de eventos ocorre quando a componente radial da velocidade é igual a velocidade de propagação da perturbação, de forma que

$$r_H = |D|. \quad (9)$$

Este modelo foi obtido primeiramente por Unruh para o caso sem circulação ($C = 0$), sendo análogo a um buraco negro de Schwarzschild [6]. Em 1998, Visser generalizou este modelo para incluir rotação, obtendo um análogo de um buraco negro de Kerr [14]. Embora estes modelos sejam interessantes, eles apresentam um problema inerente: para que sejam análogos de buracos negros é preciso que o fluxo seja supersônico em uma região. Isto introduz uma série de problemas técnicos, uma vez que em altas velocidades o fluxo facilmente se torna turbulento.

2.2 Ondas de gravidade

Podemos obter outro modelo análogo considerando ondas de gravidade em um fluido sem viscosidade, incompressível e cujo fluxo é irrotacional [15]. Devido à condição de incompressibilidade a Eq. (1) se reduz à

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (10)$$

Neste caso, se a altura do fluido for suficientemente pequena ($h_B \ll \lambda$), podemos mostrar que as ondas de gravidade também obedecem à Eq. de Klein-Gordon para uma geometria curva cuja métrica é dada por (7). Para este modelo a velocidade da perturbação é dada por $c = \sqrt{\bar{g}}h_B$, sendo \bar{g} a aceleração da gravidade e h_B a altura do fluido.

Este modelo apresenta vantagens na sua execução experimental em relação ao buraco acústico. Isto se deve ao fato de que, neste caso, a velocidade das ondas de gravidade é determinada pela altura do fluido. Portanto, para um fluido com uma altura suficientemente pequena, as velocidades envolvidas podem ser da ordem de $10^{-1} m/s$, o que permite que evitemos efeitos de turbulência.

3 Fenomenologia

Buracos negros não são objetos que estão isolados no universo, portanto é de interesse investigar como estes objetos interagem com a matéria que está ao redor dos mesmos. Neste sentido, nesta seção investigamos esta interação através do estudo da absorção e de estados ligados nos modelos análogos discutidos na seção anterior.

3.1 Absorção

Para investigar a absorção na geometria (7), consideramos a decomposição

$$\psi_m(t, r, \phi) = \frac{u_{\omega m}(r)}{\sqrt{r}} e^{i(m\phi - \omega t)}. \quad (11)$$

Substituindo (11) em (5), obtemos

$$\left\{ \left(1 - \frac{D^2}{r^2}\right) \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{D^2}{r^2}\right) \frac{d}{dr} \right] + \left(\omega - \frac{mC}{r^2}\right)^2 - V_m(r) \right\} u_{\omega m}(r) = 0, \quad (12)$$

na qual

$$V_m(r) \equiv \left(1 - \frac{D^2}{r^2}\right) \left(\frac{m^2 - 1/4}{r^2} + \frac{5D^2}{4r^4}\right). \quad (13)$$

Podemos simplificar a Eq. (12) utilizando a coordenada tartaruga, definida por

$$\frac{d}{dx} \equiv f \frac{d}{dr}, \quad (14)$$

obtendo

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\omega - \frac{Cm}{r^2}\right)^2 - V_m(r) \right] u_{\omega m}(x) = 0. \quad (15)$$

Para um problema de espalhamento as condições de contorno apropriadas são dadas por

$$u_{\omega m}(r) \approx \begin{cases} e^{-i\omega x} + R_{\omega m} e^{i\omega x}, & \text{for } r \rightarrow \infty, \\ T_{\omega m} e^{-i\omega_c x}, & \text{for } r \rightarrow r_H, \end{cases} \quad (16)$$

sendo

$$\omega_c = mC/D^2 = m\Omega_H. \quad (17)$$

$R_{\omega m}$ e $T_{\omega m}$ estão relacionados aos coeficientes de reflexão e de transmissão, respectivamente, e obedecem

$$|R_{\omega m}|^2 + \frac{\omega_c}{\omega} |T_{\omega m}|^2 = 1. \quad (18)$$

Da Eq. (18) vemos que para $\omega < \omega_c$, o coeficiente de reflexão é maior do que um. Isto corresponde ao fenômeno da superradiância.

O comprimento de absorção é dado por

$$\sigma = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (1 - |R_{\omega m}|^2), \quad (19)$$

na qual σ_m é o comprimento de absorção parcial.

A absorção para o buraco acústico girante foi encontrada primeiramente de forma numérica [16]. Entretanto, também podemos obter a mesma em termos de funções conhecidas [17]. Para isso, escrevemos a solução da Eq. (12) em termos de funções de Heun [18]

$$u_{\omega m}(r) = r^{\frac{5}{2}} \left[K_1 (D^2 z)^{\frac{\beta}{2}} \text{HeunC}(0, \beta, 1, \delta, \eta; z) + K_2 (D^2 z)^{-\frac{\beta}{2}} \text{HeunC}(0, -\beta, 1, \delta, \eta; z) \right], \quad (20)$$

sendo

$$z \equiv 1 - r^2/r_H^2, \quad (21)$$

$$\beta \equiv i r_H \omega_c, \quad (22)$$

$$\delta \equiv -\frac{1}{4} r_H^2 \omega^2, \quad (23)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{4} \left[r_H^2 \omega^2 - m^2 \left(\frac{C^2}{r_H^2} + 1 \right) + 2 \right]. \quad (24)$$

Na Fig. 1 plotamos o coeficiente de reflexão para os casos numérico e analítico, vendo que eles se sobrepõem em todo o intervalo de freqüências. Para $C/r_H > 1$ vemos que o coeficiente de reflexão é maior do que um, devido ao fenômeno da superradiância. Na Fig. 2 compararmos os comprimentos de absorção numéricos e analíticos para diferentes valores de circulação.

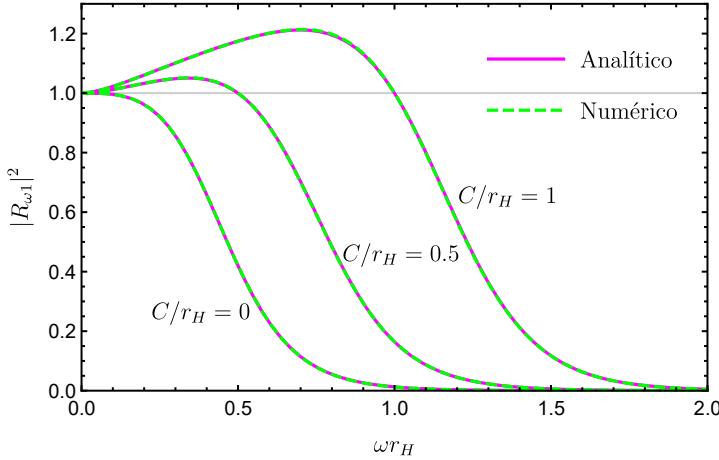


Figura 1: Coeficiente de reflexão para $m = 1$ e diferentes valores de circulação.

3.2 Nuvens

Na subseção anterior vimos que modos com freqüência suficientemente pequenas podem ser amplificados pelo buraco acústico. Se estes modos puderem ser aprisionados em torno do horizonte, esta amplificação pode ocorrer reiteradas vezes, dando origem à chamada instabilidade superradiante. No limite desta instabilidade, para modos que obedecem à condição $\omega = \omega_c$, nós temos estados ligados em torno do buraco acústico. Neste caso, a condição de aprisionamento é dada pelas paredes do recipiente que contêm o fluido. Para estudar estes estados ligados consideramos a seguinte condição de contorno no horizonte:

$$u_{\omega m}(r) \approx e^{-i(\omega - \omega_c)r_*}, \quad \text{for } r \rightarrow r_H. \quad (25)$$

Vemos que para $\omega = \omega_c$ não temos fluxo no horizonte, o que constitui uma das condições para obtermos as nuvens. Para resolvemos numericamente a equação radial consideramos, no horizonte, a expansão

$$u_m = u_0 \left(1 + \sum_{k \geq 1} u_k (r - r_H)^k \right), \quad (26)$$

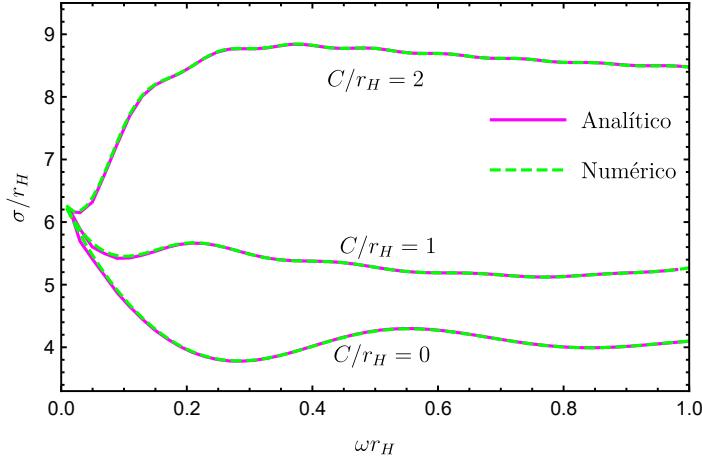


Figura 2: Comprimento de absorção para diferentes valores de circulação.

na qual tomamos $u_0 = 1$. Obtemos os coeficientes u_k substituindo (26) em (12) e expandindo em ordens de $(r - r_H)$.

As soluções de nuvens para ondas sonoras e ondas de gravidade foram obtidas primeiramente nas Refs. [10, 11] considerando-se no infinito condições de contorno de Dirichlet e de Neumann. Aqui, iremos considerar uma condição de contorno mais geral, em termos da impedância. Esta quantidade pode ser entendida como uma grandeza física que mede como as paredes do recipiente respondem a uma perturbação. Neste caso, temos

$$\left(\frac{\partial_r \psi}{\psi} \right) \Big|_{r=r_0} = \frac{i\rho\omega}{Z^*}, \quad (27)$$

sendo Z^* a impedância da parede do recipiente e r_0 a posição da mesma. Vemos que para $|Z^*| \rightarrow \infty$ recuperamos a condição de Neumann, enquanto que para $|Z^*| \rightarrow 0$ recuperamos a condição de Dirichlet. A parte real da impedância está relacionada com fluxo de energia através da parede. Como estamos buscando soluções aprisionadas, assumimos $\text{Re}[Z^*] = 0$.

De posse dessas elementos, impomos a condição de sincronização, $\omega = \omega_c$, resolvemos numericamente a Eq. (12) sujeita à condição (26) e, utilizando um método de *Shooting*, procuramos para qual valor de C a condição (27) é obedecida. Na Fig. 3 plotamos as linhas de existência das nuvens para diferentes valores de $Z \equiv Z^*/\rho$. De modo geral, vemos que a medida que r_0 diminui, Ω_H aumenta. Para $\text{Im}[Z] > 0$ vemos que a linha de existência apresenta um máximo.

Na Fig. 4 plotamos as linhas de existência para diferentes valores de m , fixando $Z = -i$. Observamos que, para um valor fixo de r_0 , nuvens com maiores valores de m ocorrem para menores valores Ω_H . Isto é devido à condição de sincronização entre a nuvem e o horizonte.

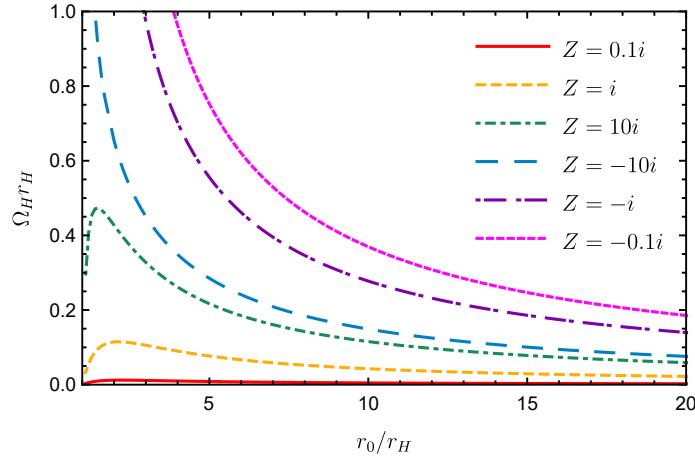


Figura 3: Linhas de existência de nuvens acústicas para diferentes valores de impedância.

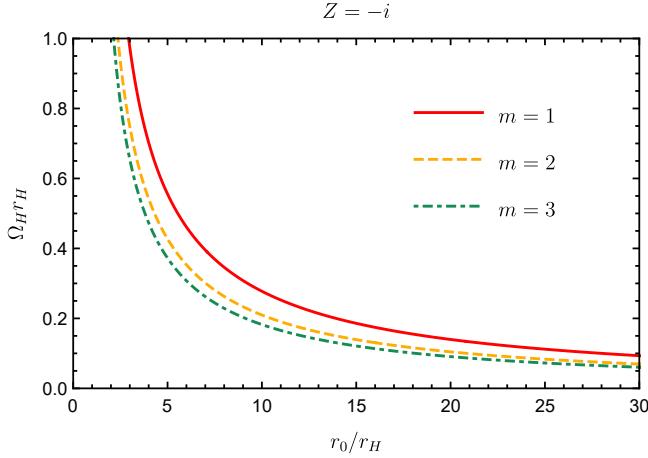


Figura 4: Linhas de existência de nuvens acústicas para $Z = -i$ e diferentes valores de m .

4 Considerações finais

Neste trabalho revisamos rapidamente dois modelos análogos de buracos negros: O buraco acústico girante e o análogo gerado por ondas de gravidade. De posse destes modelos, consideramos fenômenos que ocorrem na vizinhança de buracos negros e que podem ser mimetizados pelos sistemas aqui representados. Encontramos o comprimento de absorção, tanto de forma analítica quanto numérica. Em seguida, consideramos estados ligados nestes sistemas, utilizando uma condição de contorno mais geral do que a já existente na literatura.

Modelos análogos nos dão a possibilidade de reproduzir e estudar efeitos cinemáticos que ocorrem em espaços-tempos curvos. De fato, recentemente o fenômeno da superradiância rotacional foi observado pela primeira vez em um laboratório considerando-se ondas de gravidade [19]. Isto nos sugere que seja possível observar a formação de nuvens utilizando-se um setup semelhante. Podemos ainda considerar um modelo mais simples, que permite a formação de nuvens em um fluido estático [20, 21].

Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Agradeço também à Caio F. B. Macedo por ler as versões deste trabalho.

Referências

- [1] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 220:291–333, 1920.
- [2] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [3] R. Abbott et al. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. 11 2021.
- [4] S. W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [5] Bernard J. Carr and S. W. Hawking. Black holes in the early Universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 168:399–415, 1974.
- [6] W. G. Unruh. Experimental black hole evaporation. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351–1353, 1981.
- [7] Soumen Basak and Parthasarathi Majumdar. ‘Superresonance’ from a rotating acoustic black hole. *Class. Quant. Grav.*, 20:3907–3914, 2003.
- [8] Sam R. Dolan, Ednilton S. Oliveira, and Luis C. B. Crispino. Scattering of sound waves by a canonical acoustic hole. *Phys. Rev. D*, 79:064014, 2009.
- [9] Sam R. Dolan and Ednilton S. Oliveira. Scattering by a draining bathtub vortex. *Phys. Rev. D*, 87(12):124038, 2013.
- [10] Carolina L. Benone, Luis C. B. Crispino, Carlos Herdeiro, and Eugen Radu. Acoustic clouds: standing sound waves around a black hole analogue. *Phys. Rev. D*, 91(10):104038, 2015.

-
- [11] Carolina L. Benone, Luís C. B. Crispino, Carlos A. R. Herdeiro, and Eugen Radu. Stationary bound states of massless scalar fields around black holes and black hole analogues. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24(09):1542018, 2015.
 - [12] Carlos Barcelo, Stefano Liberati, and Matt Visser. Analog models for FRW cosmologies. *Int. J. Mod. Phys. D*, 12:1641–1650, 2003.
 - [13] S. Eckel, A. Kumar, T. Jacobson, I. B. Spielman, and G. K. Campbell. A rapidly expanding Bose-Einstein condensate: an expanding universe in the lab. *Phys. Rev. X*, 8(2):021021, 2018.
 - [14] Matt Visser. Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation. *Class. Quant. Grav.*, 15:1767–1791, 1998.
 - [15] Ralf Schutzhold and William G. Unruh. Gravity wave analogs of black holes. *Phys. Rev. D*, 66:044019, 2002.
 - [16] Ednilton S. Oliveira, Sam R. Dolan, and Luis C. B. Crispino. Absorption of planar waves in a draining bathtub. *Phys. Rev. D*, 81:124013, 2010.
 - [17] Leandro A. Oliveira, Carolina L. Benone, Amanda L. Almeida, and Luís C. B. Crispino. Analytical investigation of wave absorption by a rotating black hole analogue. *Int. J. Mod. Phys. D*, 29(11):2041018, 2020.
 - [18] H. S. Vieira and V. B. Bezerra. Acoustic black holes: massless scalar field analytic solutions and analogue Hawking radiation. *Gen. Rel. Grav.*, 48(7):88, 2016. [Erratum: Gen.Rel.Grav. 51, 51 (2019)].
 - [19] Theo Torres, Sam Patrick, Antonin Coutant, Mauricio Richartz, Edmund W. Tedford, and Silke Weinfurtner. Observation of superradiance in a vortex flow. *Nature Phys.*, 13:833–836, 2017.
 - [20] Vitor Cardoso, Antonin Coutant, Mauricio Richartz, and Silke Weinfurtner. Detecting Rotational Superradiance in Fluid Laboratories. *Phys. Rev. Lett.*, 117(27):271101, 2016.
 - [21] Carolina L. Benone, Luís Crispino, C. B., Carlos A. R. Herdeiro, and Maurício Richartz. Synchronized stationary clouds in a static fluid. *Phys. Lett. B*, 786:442–447, 2018.