
PERSPECTIVAS PARA A FÍSICA DE ULTRALARGAS ESCALAS: INFLAÇÃO E EFEITOS RELATIVÍSTICOS

AS ASTROCIENTISTAS

 Caroline Macedo Guandalin

Instituto de Física, Universidade de São Paulo,
São Paulo, 05508-090, Brasil,
caroline.guandalin@usp.br

RESUMO

Esforços para observar as maiores escalas do Universo com levantamentos de galáxias futuros são motivados pelo desejo de detectar correlações oriundas de um possível período inflacionário e da possibilidade de restringir fenômenos que vão além da relatividade geral. Em escalas extremamente grandes, a abordagem Newtoniana é insuficiente para modelar o espectro de potências e o bispectro. Portanto, para interpretarmos corretamente as medidas em tais escalas, devemos considerar um tratamento relativístico e independente de calibre para as observáveis cosmológicas (e.g. contagem de galáxias). Revisarei as principais características físicas das escalas ultralargas (i.e., da ordem do horizonte cosmológico), dando particular atenção para possíveis equívocos na restrição de parâmetros inflacionários e para a característica mais marcante do espectro e bispectro relativísticos: a presença de momentos ímpares na expansão de Legendre. Também mostrarei, brevemente, como é possível utilizar halos contidos em um cone de luz de uma simulação de N -corpos relativística para modelar e recuperar o dipolo relativístico.

Palavras-chave estrutura em larga escala do universo, efeitos relativísticos, inflação cósmica

1 Introdução

A cosmologia é uma ciência recente, incorporando-se ao repertório científico, ao longo do século 20, com o estabelecimento da relatividade geral e com a emergência de uma comunidade científica interessada em estudos sobre a origem, constituição e evolução do universo. Hoje, somos capazes determinar parâmetros cosmológicos do modelo convencional da cosmologia, também conhecido por Λ CDM, com alta precisão. Esse modelo adota a relatividade geral como a teoria que explica como a matéria interage e colapsa gravitacionalmente, utilizando-se do princípio cosmológico (homogeneidade e isotropia espacial) para a estatística da distribuição dos campos cosmológicos (campo gravitacional, distribuição de matéria, etc) para adotar a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e resolver as equações de Einstein, extrapolando leis físicas locais para escalas cosmológicas.

A nível de um universo homogêneo e isotrópico, ou seja, sem perturbações em torno da média global, soluções das equações de Einstein implicam que, em momentos mais primitivos do universo, radiação na forma de fótons era a componente dominante, seguido por um período dominado por matéria e, finalmente, no predomínio tardio de um fluido de energia escura dominando a dinâmica do sistema. Note que isso acontece ao assumirmos a presença específica de tais componentes. Vínculos atuais nos mostram que, para esse modelo, o universo é composto, atualmente, por 31% de matéria, que engloba a matéria escura fria (CDM) e bárions, e 69% de energia escura descrita por uma constante cosmológica Λ ¹. Em termos dos parâmetros de densidade $\Omega_{X,0}$: $\Omega_{m,0} = \Omega_{\text{CDM},0} + \Omega_{\text{barions},0} = 0.31$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$, onde o índice 0 refere-se a essas quantidades hoje.

Contudo, um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico não resulta no universo observado, dado que as densidades ρ de matéria, radiação e energia escura, por exemplo, evoluem apenas temporalmente, permanecendo espacialmente constantes. Uma

¹A constante cosmológica foi originalmente introduzida por Einstein como uma modificação das equações de campo, a fim de se chegar a uma solução estática do universo. No entanto, a solução estática somente é alcançada com um ajuste fino entre as densidades de energia na forma de constante cosmológica e de matéria bariônica e escura. Qualquer desequilíbrio ínfimo entre essas quantidades resulta em uma solução dinâmica [1].

imagem mais realística é obtida ao perturbarmos ligeiramente a métrica de FLRW, explorando como as perturbações $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$, em torno da solução homogênea e isotrópica $\bar{\rho}(t)$, evoluem no espaço e tempo. Essas perturbações – que são resolvidas, por exemplo, para o campo de densidades $\rho(\mathbf{x}, t)$, usualmente descrito em termos do contraste de densidades $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(\mathbf{x}, t)/\bar{\rho}(t) - 1$, podem ser comparadas com observações através de um tratamento estatístico do campo de galáxias. Para isso, são comumente utilizadas, na cosmologia, estatística de n -pontos para descrever correlações do campo de sobredensidades δ .

Assim como a média $\bar{\delta}(z)$ e variância $\langle \delta^2(\mathbf{x}, z) \rangle$ podem ser utilizadas para descrever as propriedades do contraste de densidades², utiliza-se normalmente a função de correlação de dois pontos, $\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; z_1, z_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1, z_1) \delta(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle$, ou seu correspondente no espaço de Fourier, o espectro de potências

$$P(\mathbf{k}) \equiv \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xi(\mathbf{x}), \quad \text{ou} \quad \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(\mathbf{k}_1), \quad (1)$$

onde denotamos a função delta de Dirac como $\delta^D(x)$.

Talvez a questão mais fundamental da cosmologia, finalmente passível de ser tratada pelo rigor estatístico da ciência, seja sobre a origem do universo. Ou seja, quais foram as condições iniciais para as flutuações δ e qual o mecanismo que as geraram. O modelo mais estudado para abordar tal questão é chamado inflação, tendo ocorrido em um período extremamente quente e denso do universo de forma que necessitamos da teoria quântica para descrever os campos presentes nessa época. Dentro desse cenário, processos quânticos (e, portanto, intrinsecamente aleatórios) deram origem às flutuações quânticas necessárias para a existência de perturbações em torno do que seria uma descrição homogênea e isotrópica da matéria.

A inflação produz algumas consequências interessantes, entre as quais citamos o espectro de potências das flutuações de densidade primordiais $\mathcal{P}(k)$ sendo, aproximadamente, invariante de escala. Podemos parametrizá-lo através da equação

$$\mathcal{P}(k) \sim A_s k^{n_s-1}, \quad (2)$$

com $n_s \approx 1$. Medidas atuais nos dão $n_s = 0.968 \pm 0.006$ e, para a amplitude das perturbações primordiais, $A_s \approx 2.09 \times 10^{-9}$ [2]. Outro vínculo importante para modelos inflacionários consiste nos níveis de não-Gaussianidades (NG) presentes nas funções de correlação das perturbações primordiais, que se manifestam, no universo tardio, na distribuição de galáxias e, em tempos mais primordiais, na radiação cósmica de fundo (RCF)³. No modelo inflacionário mais simples, o universo é dominado por um único campo escalar, o *inflaton*, com termo cinético canônico na ação, rolando lentamente pelo seu potencial (*single field slow-roll, SFSR*). Em primeira ordem na teoria de perturbações, a estatística das flutuações do inflaton é, aproximadamente, descrita pela de um oscilador harmônico, ou seja, é praticamente Gaussiana. Contudo, um pequeno nível de não-Gaussianidade está presente devido às interações do inflaton com os graus de liberdade gravitacionais [3].

Desvios do cenário Gaussiano podem ser vinculados através das estatísticas de ordem mais alta (ou seja, indo além do espectro de potências, i.e. da variância da campo). Para o caso da função de correlação de três pontos, temos o bispectro $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ como o correspondente no espaço de Fourier:

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3). \quad (3)$$

As não-Gaussianidades geradas pelo acoplamento do campo inflaton com o setor gravitacional levam a um bispectro indetectável mesmo com experimentos futuros. Contudo, muitos modelos inflacionários possuem níveis de NG (chamadas de não-Gaussianidades primordiais, PNG) que poderão ser detectados em um futuro próximo. Portanto, a não-detecção ajuda a restringir o espaço teórico de modelos inflacionários e, até mesmo, alguns cenários alternativos à inflação.

No escopo da RCF, temos um grande histórico de melhorias observacionais, com a missão do satélite Planck nos dando os melhores vínculos, até o momento, sobre a inflação. Mesmo assim, poderemos alcançar vínculos competitivos, ou até melhores, do que aqueles da RCF com os levantamentos que em breve serão operacionais (e.g. Vera C. Rubin Observatory/LSST, Euclid e SKA) [4] [5] [6]. Isso ocorre porque a quantidade de informação disponível em mapas tridimensionais do universo provida por tais levantamentos é muito maior do que aquela contida nos mapas bidimensionais da RCF. Contudo, esses levantamentos não nos dão acesso direto ao campo de matéria, mas ao contraste de densidade δ_α de objetos denominados traçadores enviesados da matéria (tais como galáxias). Nesse caso,

$$\xi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; z_1, z_2) \equiv b_\alpha(z_1) b_\beta(z_2) \langle \delta(\mathbf{x}_1, z_1) \delta(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle, \quad P_{\alpha\beta}(k) = b_\alpha(z_1) b_\beta(z_2) P(k; z_1, z_2), \quad (4)$$

onde b_α e b_β são os vieses efetivos de dois traçadores α e β , nos *redshifts* z_1 e z_2 , respectivamente. Em grandes escalas, b é denominado viés linear.

²Note que aqui estamos utilizando o *redshift* z ao invés do tempo cosmológico t , uma vez que o primeiro é obtido diretamente de observações cosmológicas, enquanto t é inferido com base na história de expansão de algum modelo de universo.

³A RCF consiste nos fôtons que desacoplam da matéria quando o universo tinha ≈ 380000 anos. Antes dessa época, o universo era quente e denso ao ponto dos fôtons espalharem os elétrons, constantemente, através do espalhamento Compton. Quando a temperatura cai para $T \approx 3000$ K, a taxa de espalhamento é menor do que a taxa de expansão do universo e os elétrons conseguem ser capturados pelos núcleos atômicos formando átomos neutros. Os fôtons da RCF seguem um espectro de corpo negro cuja forma não é significantemente afetada pela expansão cósmica. Observarmos o espectro de corpo negro da RCF com temperatura $T_{RCF} \approx 2.7$ K, devido à expansão ocorrida entre a época do desacoplamento e hoje.

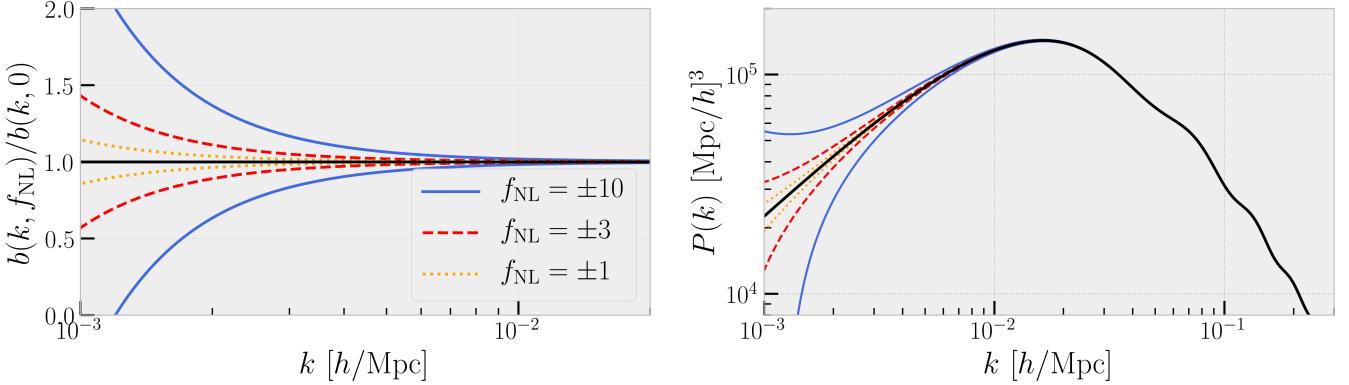


Figura 1: Efeitos das correções devido à PNG do tipo local no espectro de potências de halos com massa $M = 10^{15} [M_\odot/h]$ (direita) e no viés total (esquerda), para $p = 1$ e $z = 0$, com o viés linear $b(z, f_{\text{NL}} = 0)$ dos halos dado pelo ajuste da referência [7]. Valores positivos de $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = f_{\text{NL}}$ correspondem às curvas acima do valor fiducial (preto) $f_{\text{NL}} = 0$, enquanto que os valores $f_{\text{NL}} < 0$ correspondem à perda de potência em grandes escalas. Vale notar que $f_{\text{NL}} = \pm 10$ está descartado de acordo com as medidas do Planck: $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = -0.9 \pm 5.1$ [8]. Portanto, para obtermos correções da ordem de $\sim 8\%$ com relação a $f_{\text{NL}} = 0$ precisamos chegar a escalas de $k \sim 10^{-3} [h/\text{Mpc}]$, ou seja, da ordem de milhares de megaparsecs.

Um parâmetro muito sensível às condições iniciais da inflação e, portanto, à física do universo primordial, é o “viés dependente de escala” [9], que se manifesta no espectro de potências de traçadores enviesados da matéria (tais como halos de matéria escura, galáxias, hidrogênio neutro, etc) através de uma correção de k^{-2} :

$$\Delta b_\alpha(k, z; f_{\text{NL}}^{\text{loc}}) = f_{\text{NL}}^{\text{loc}}(b_\alpha - p) \frac{3 \delta_c \Omega_{m,0} H_0^2}{c^2 k^2 T(k) D(z)}, \quad (5)$$

onde p é um parâmetro que depende da história do traçador em questão (e.g. os autores da referência [10] obtiveram $p = 1.6$ para quasares), $\delta_c = 1.68$ é densidade linear crítica para colapso esférico em um universo Einstein-de Sitter (EdS, i.e. dominado por matéria), $T(k)$ é a função de transferência da matéria normalizada $T(k \rightarrow 0) = 1$, $D(z)$ é o fator de crescimento e $k = 2\pi\lambda^{-1}$ é o número de onda das perturbações de comprimento λ . A correção de k^{-2} emerge de modulações quadráticas locais (daí o nome PNG do tipo local) no potencial gravitacional primordial, induzidas, por exemplo, pela presença de dois ou mais campos escalares durante o período inflacionário. A amplitude dessas modulações é parametrizada pela constante de acoplamento não-linear (NL), $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$ [11, 12]. O termo característico dessa correção ao viés linear, b_α , do traçador emerge ao relacionarmos o contraste de densidade com o potencial através da equação de Poisson no espaço de Fourier:

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{3}{2} \Omega_m(a) \left(\frac{aH}{kc} \right)^2 \delta(\mathbf{k}), \quad (6)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, $a = a(z)$ é o fator de escala em um dado *redshift* z e $H = H(z)$ é o parâmetro de Hubble.

Nas referências [10] e [13], o espectro de potências foi utilizado para detectar a dependência de escala adicional no viés de quasares, resultando em $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = 36^{+18}_{-17}$ e $-51 < f_{\text{NL}}^{\text{loc}} < 21$, respectivamente. A Fig. 1 mostra o efeito do viés dependente de escala para diferentes valores de $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} \equiv f_{\text{NL}}$, assumindo um ajuste fenomenológico para o viés linear dos traçadores considerados nesse exemplo, que são os halos de matéria escura [7]. Vemos com isso que detecções do viés dependente de escala, Eq. (5), requerem escalas λ grandes, ou seja, modos de Fourier k pequenos.

Para explorarmos ao máximo o que os futuros levantamentos de galáxias têm a nos oferecer, precisamos entender completamente como as não-Gaussianidades primordiais se manifestam nas estruturas que observamos hoje, além de compreendermos as possíveis fontes de erros sistemáticos e de contaminação do sinal. Duas fontes de erro conhecidas atualmente são:

Ruído de Poisson. O ruído de Poisson, mais conhecido pelo termo *shot noise*, está associado com o fato de que observamos objetos discretos no céu, tais como as galáxias, e não uma distribuição contínua de matéria. Além disso, ele corresponde à estocasticidade intrínseca do campo de traçadores da matéria escura: como mostrado na Fig. 2 no cenário A, efeitos estocásticos fazem com que as perturbações de comprimento de onda pequenos (curvas pretas) sejam tais que os dois objetos em vermelho, localizados em picos de sobredensidade, não colapsam para formar um único objeto mais massivo, sendo atraídos para regiões opostas; já no cenário B, as pequenas escalas são uma realização diferente e os dois objetos colapsam em uma única estrutura, atraídos pela sobredensidade central, fazendo com que A contenha um objeto a mais do que B. Descrevendo a estatística dessas flutuações em pequenas escalas através de uma distribuição Poissoniana, é possível verificar que o ruído de Poisson aparece

no espectro de potências dos traçadores discretos da matéria como $1/\bar{n}$, onde \bar{n} é a densidade média de objetos em um dado volume do levantamento. Contudo, essa limitação pode ser evitada com a observação de uma alta densidade de traçadores, o que está previsto para os levantamentos futuros: por exemplo, Euclid prevê $\bar{n} \sim 10^{-3}$ galáxias [h/Mpc]³ [14], enquanto que temos $\bar{n} \sim 10^{-4}$ galáxias [h/Mpc]³ para os dados do BOSS DR11 [5]. Como não estamos interessados nas pequenas escalas, essa limitação é secundária e não nos impõe um problema, contanto que seja controlada.

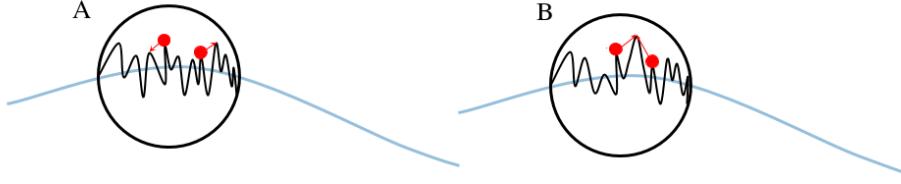


Figura 2: Para olharmos as grandes escalas do universo, calculamos a média das flutuações em pequenas escalas (*curvas pretas*) sobre uma região de raio R (*círculos pretos*) localizada no pico de uma flutuação em grande escala (*curvas azuis*). (*Esquerda*) Caso A: dois objetos (*pontos vermelhos*) localizados em picos das sobredensidades em pequenas escalas não colapsam, pois efeitos estocásticos das flutuações em pequenas escalas fazem com que eles sejam atraídos para regiões opostas. (*Direita*) Caso B: os dois objetos se fundem uma vez que as flutuações em pequenas escalas favoreceram a existência de uma sobredensidade atraindo ambos os objetos. Nesse caso, o número total de objetos é uma unidade a menos do que no caso A.

Variância cósmica. Observações cosmológicas estão sujeitas a uma limitação inerente do sistema estudado pela cosmologia, que afeta tanto a RCF quanto a estrutura em larga escala (*large-scale structure*, LSS): ela consiste no fato de que observamos apenas um universo, o qual pode ser pensado como uma realização particular em um conjunto de possibilidades. Ademais, por observarmos um volume finito do Universo, estamos limitados a um intervalo finito de escalas que podemos analisar. Tais limitações são conhecidas como variância cósmica, a qual é a maior fonte de incerteza em grandes escalas. Esse será nosso maior desafio e, portanto, devemos encontrar uma forma de contornar esse problema para obtermos vínculos robustos nos parâmetros de interesse. Uma possibilidade faz uso da técnica de múltiplos-traçadores: foi mostrado em [6] que é possível contornar a variância cósmica ao combinar diferentes tipos de traçadores da estrutura em larga escala (veja [17, 18] para trabalhos mais recentes). Tal técnica é promissora, uma vez que sinergias entre os levantamentos futuros são esperadas [19, 20, 21].

Por outro lado, possíveis contaminantes do sinal, mas que contém muita informação por si só, são:

Não-Gaussianidades secundárias. A LSS é altamente não-Gaussianiana devido à evolução gravitacional responsável pelo colapso das estruturas, que ocorre de forma altamente não-linear, em contraste com a “simplicidade” linear da RCF, onde as contribuições espúrias do setor gravitacional são minimizadas. Em grandes escalas, podemos escrever o bispectro de três traçadores α, β e γ como

$$B_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \alpha_1\beta_1\gamma_1 B_m^{\text{tree}} + \alpha_1\beta_1\gamma_2 P(k_1)P(k_2) + \alpha_1\beta_2\gamma_1 P(k_1)P(k_3) + \alpha_2\beta_1\gamma_1 P(k_2)P(k_3), \quad (7)$$

onde $\alpha_1 \equiv b_\alpha^{(1)}$ e $\alpha_2 \equiv b_\alpha^{(2)}$ são, respectivamente, os viéses linear e de segunda ordem⁴ com o mesmo valendo para β e γ , $B_m^{\text{TL}} = B_0 + B_{\text{grav}}$ é o bispectro da matéria a “nível árvore” com a possível contribuição primordial B_0 evoluída até um dado *redshift* e B_{grav} é o bispectro gravitacional:

$$B_{\text{grav}} = 2 [F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_2) + 2 \text{ perms.}] . \quad (8)$$

Aqui, F_2 é o *kernel* de segunda ordem, obtido através da teoria de perturbações, em um universo de EdS [22, 23, 24]:

$$F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} . \quad (9)$$

Contudo, esse resultado falha em capturar escalas levemente não-lineares. Por isso, muitas técnicas têm sido desenvolvidas para melhorar a compreensão desses efeitos, tais como a aplicação da teoria efetiva de campos para modelar efeitos não-lineares em escalas pequenas [25] e métodos fenomenológicos [26].

⁴Considerando-se a expansão $\delta_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_1\delta(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_2}{2}\delta^2(\mathbf{x}) + \dots$ em escalas grandes, α_1 é o viés linear e α_2 o viés de segunda ordem.

Efeitos relativísticos. Em grandes escalas, comparáveis ao raio de Hubble⁵, efeitos relativísticos associados à projeção de observáveis (e.g. flutuações na contagem de galáxias) no nosso cone de luz passado começam a emergir. No espectro de potências, esses efeitos podem dificultar uma detecção segura do viés dependente de escala, caso não sejam levados em conta na modelagem teórica [27]. No bispectro das galáxias, características únicas tais como um dipolo intrinsecamente relativístico emerge e, portanto, abrem portas para novos testes de teorias de gravitação.

Neste artigo, abordaremos a questão de como podemos extrair informação de levantamentos de galáxias, focando na interação entre os efeitos relativísticos e de não-Gaussianidades primordiais no espectro de potências de traçadores da matéria escura. Em particular, descreveremos como modelar o dipolo relativístico que emerge na correlação cruzada entre diferentes traçadores e como extraí-lo de dados reais. Para tal, utilizaremos uma simulação de N -corpos relativística contida no cone de luz passado de um observador, aproximando-nos de análises realistas de dados.

2 Efeitos relativísticos no espectro de potências de halos de matéria escura

Levantamentos de galáxias são pilares para a construção da cosmologia moderna. Eles partem do *redshift* z de objetos, tais como as galáxias, para nos dar um mapa tridimensional do Universo. Se não houvesse nenhuma perturbação ao fluxo de Hubble, ou seja, se o redshift observado z_{obs} fosse somente devido à expansão cósmica z_H (i.e. $z_{\text{obs}} = z_H$), esse mapa seria perfeito no sentido de que eles nos dariam as posições radiais corretas dos objetos mapeados; se, em adição a isso, não houvesse lentes gravitacionais, as posições angulares providas por eles nos dariam acesso à posição real das galáxias.

Contudo, como já mencionamos, existem desvios de uma métrica perfeitamente FLRW, que descreve um universo homogêneo e isotrópico: sabemos que a matéria escura e bariônica se aglomera para formar as estruturas que observamos, tais como halos de matéria escura e galáxias, levando a uma distribuição não-homogênea em escalas da ordem de $R \lesssim 100 \text{ Mpc}/h$. A presença dessas estruturas também são responsáveis por lenteamento gravitacional, alterando assim não somente a posição angular, mas a forma e luminosidade dos objetos mapeados.

Também sabemos que as galáxias estão caindo no potencial do aglomerado do qual elas fazem parte e esse efeito introduz desvios ao movimento devido somente ao fluxo de Hubble (expansão do universo): existem efeitos de *redshift* gravitacional dando origem a uma perturbação adicional à posição real, entre outros inúmeros efeitos que criam um mapeamento complicado com a posição dos objetos em um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico.

Uma das características mais marcantes dos levantamentos que estão por vir é o grande volume por eles coberto, permitindo-nos observar escalas cada vez maiores, incluindo aquelas que são comparáveis com o horizonte do universo observável. Em tais escalas, o tratamento Newtoniano não é mais preciso, uma vez que efeitos de causalidade impostos pelo limite da velocidade da luz não são levados em conta na teoria Newtoniana, a qual desconhece a existência de um horizonte cosmológico. Além disso, a inclusão de espécies relativísticas, tais como neutrinos, só podem ser propriamente modeladas no tratamento relativístico⁶. Logo, para extraíremos o máximo de potencial desses levantamentos, nossa teoria deve ser precisa o suficiente em grandes (e também pequenas) escalas.

As diferenças entre o tratamento puramente relativístico e o Newtoniano obtidas nas expectativas teóricas para as quantidades observáveis dão origem aos chamados efeitos relativísticos, os quais, se não forem propriamente modelados, podem ser erroneamente confundidos com uma detecção de não-Gaussianidade primordial [31, 32, 33].

Aqui sempre manteremos em mente o que é realmente observado pelos levantamentos de galáxias: levantamentos espectroscópicos e fotométricos nos dão um catálogo com as posições observadas, no espaço de *redshift*, $\mathbf{s} = (z_{\text{obs}}, \theta, \varphi)$, com o *redshift* sendo estimado através da técnica espectroscópica (então assume-se erro zero na medida) ou da técnica fotométrica (nesse caso, será necessário incluir as distribuições que descrevem a função de densidade de probabilidade de cada *redshift* nas medidas); mas, em ambos os casos, teremos um catálogo com a posição tridimensional \mathbf{s} dos objetos. No final, o contraste de densidade é convertido para uma sobredensidade na contagem de objetos do tipo β : $\delta_{\beta}^{(s)}(\mathbf{s}) \equiv N_{\beta}(z_{\text{obs}}, \theta, \varphi)/\bar{N}_{\beta}(z_{\text{obs}}) - 1$, onde N é o número total de objetos observado em um dado volume centrado em \mathbf{s} e \bar{N} é uma média angular.

Para relacionarmos a posição observada com a posição das galáxias devido somente à expansão do universo, podemos empregar a definição covariante de *redshift*,

$$z = \frac{(g_{\mu\nu} k^{\mu} u^{\nu})_f}{(g_{\mu\nu} k^{\mu} u^{\nu})_{\text{obs}}} - 1, \quad (10)$$

⁵Define-se o raio de Hubble como $c(aH)^{-1}$.

⁶Muitas alternativas existem para levar em conta esses efeitos, especialmente o tratamento de espécies relativísticas em simulações Newtonianas através de um “dicionário” que conecta as duas [28, 29]. Outra abordagem consiste em realizar simulações cujas equações de movimento são inherentemente relativísticas [30].

para incorporar todas as correções adicionais às Newtonianas, onde somente a velocidade peculiar \mathbf{v} das fontes (parte espacial da quadrivelocidade u^μ) é responsável pelas correções ao longo da linha de visada $\hat{\mathbf{n}}$ (como derivado em [34]): $\lambda_{\text{obs}}^{\text{pec}} \approx \lambda_f (1 + \frac{v_{\parallel}}{c})$, onde $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ é a projeção da velocidade peculiar ao longo da linha de visada. Note que assumimos $v_{\parallel} \ll c$. Rotulamos por f as quantidades calculadas na emissão dos fótons (ou seja, na fonte) e obs quando são recebidas pelo observador. Note que $k^\mu \equiv 2\pi\nu(1, -\hat{\mathbf{n}})$ é o vetor de onda dos fótons de frequência ν e direção de propagação $-\hat{\mathbf{n}}$.

O fluxo de Hubble é responsável por um *redshift* no comprimento de onda dos fótons observados λ_{obs} da forma $\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{obs}}^{\text{pec}} \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_f)}$, com t_{obs} e t_f sendo, respectivamente, os tempos cósmicos no momento da recepção pelo observador e da emissão pela fonte. Portanto, as velocidades peculiares deslocam o *redshift* observado z_{obs} daquele que seria perfeitamente cosmológico $z_H \equiv a(t_{\text{obs}})/a(t_f) - 1$ (devido ao fluxo de Hubble):

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_f} \equiv 1 + z_{\text{obs}} = \left(1 + \frac{v_{\parallel}}{c}\right) (1 + z_H). \quad (11)$$

Computando a sobredensidade de traçadores enviesados do campo de matéria escura, através da Eq. (11), obtemos a expressão usual apresentada em [34]:

$$\delta_\beta^{(s)}(\mathbf{s}) \approx \delta_\beta^{(r)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathcal{H}} \partial_r (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathcal{H} r} \left(2 + \frac{\partial \ln \bar{\phi}}{\partial \ln r}\right), \quad (12)$$

onde somente quantidades em primeira ordem na teoria de perturbação são consideradas. Chamamos $aH \equiv \mathcal{H}$. Acima, $\partial_{\ln r} \ln \bar{\phi}$ leva em conta a função de seleção do levantamento em questão. O índice r representa quantidades no “espaço real”, isso é, sem de distorções de redshift, somente na presença do fluxo de Hubble.

Restritos à teoria linear, podemos relacionar quantidades no espaço das configurações e no espaço de Fourier como

$$\begin{aligned} \delta_\beta^{(r)}(\mathbf{r}) &= b_\beta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta^{(r)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, & \mathcal{H}^{-1} \partial_r v_{\parallel} &= -f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta^{(r)}(\mathbf{k}) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ v_{\parallel} &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}} = i f \mathcal{H} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta^{(r)}(\mathbf{k}) \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, & \alpha v_{\parallel} &= i f \mathcal{H} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta^{(r)}(\mathbf{k}) \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{k} \alpha e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned}$$

onde $\alpha \equiv \partial_{\ln r} \ln(r^2 \phi_\beta)$, para um traçador β com viés linear b e função de seleção ϕ . Aqui encontramos a principal assinatura que tentaremos analisar: a presença de termos imaginários devido ao acoplamento de v_{\parallel} com termos da forma $(\mathcal{H}r)^{-1}$. Como pode ser visto do contraste de densidade Newtoniano,

$$\delta_\beta^{(s)}(\mathbf{k}) = \delta^{(r)}(\mathbf{k}) \left[b_\beta + f(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - i \frac{f}{kr} \alpha(\mathbf{r})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (13)$$

o termo imaginário aumenta para objetos mais próximos e em grandes escalas.

Contudo, considerando a definição covariante do *redshift*, Eq. (10), contribuições adicionais aparecem devido à existência de inhomogeneidades presentes entre o observador e a fonte, causando desvios na trajetória dos fótons, o que leva à perturbações no ângulo observado e magnificação das galáxias por conta de lentes gravitacionais. A correção relativística mais imediata é o *redshift (blueshift)* gravitacional dos fótons subindo (descendo) o potencial gravitacional como resultado da perda (ganho) de energia: $\lambda_{\text{obs}}^{\text{grav}} = \lambda_f (1 - \Delta\Phi/c^2)$. O efeito resultante é um *redshift* que depende apenas do potencial gravitacional $\Delta\Phi$ na galáxia, desprezando as contribuições que correspondem às perturbações devido à variação do potencial gravitacional ao longo do caminho que o fóton percorre, entre a fonte e o observador. Considerando apenas esse efeito local, o *redshift* observado se torna [35]

$$z_{\text{obs}} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_f}{\lambda_f} \approx z_H + \frac{v_{\parallel}}{c} - \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (14)$$

Realizando os mesmos passos empregados na derivação de Eq. (13), com o termo de potencial adicional no espaço de Fourier pela Eq. (6), chega-se a

$$\delta_\beta^{(s)}(\mathbf{k}) = \delta^{(r)}(\mathbf{k}) \left[b_\beta + f(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + i \left(\frac{3\Omega_m}{2} \frac{\mathcal{H}}{kc} - \frac{f}{k} \frac{\alpha(\mathbf{r})}{r} \right) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (15)$$

Desprezando variações na função de seleção e assumindo uma única linha de visada para o levantamento como um todo ($\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mu$), o auto-espectro de um traçador β é dado por

$$\langle \delta_\beta^{(s)}(\mathbf{k}) \delta_\beta^{(s)}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left[(b_\beta + f\mu^2)^2 + \left(\frac{3}{2} \Omega_m \frac{\mathcal{H}}{kc} \mu \right)^2 \right] P(k). \quad (16)$$

O segundo termo dentro dos colchetes é a correção relativística à expressão de Kaiser (primeiro termo) em decorrência do *redshift* gravitacional sofrido pelos fótons. Para se ter uma ideia da contribuição que esse termo dá ao espectro de potências, para

um levantamento como o Euclid (área 15000 deg^2 , $0 < z < 2.5$ e $k_{\min} \sim 0.001 [\text{h}/\text{Mpc}]$) a amplitude é da ordem de ~ 0.06 , enquanto que para um levantamento como o LSST (área 13800 deg^2 , $0.2 < z < 1.2$ e $k_{\min} \sim 0.002 [\text{h}/\text{Mpc}]$), esperamos algo em torno de ~ 0.01 [36]. Comparado ao termo de Kaiser (Eq. 12), o qual é de ordem 1 para ambos os casos, vemos que essa contribuição é pequena. Contudo, o espectro cruzado entre dois traçadores α e β ,

$$\langle \delta_\alpha^s(\mathbf{k}) \delta_\beta^s(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left[(b_\alpha + f\mu^2)(b_\beta + f\mu^2) + \left(\frac{3}{2}\Omega_m \frac{\mu}{k_c} \right)^2 - i \frac{3}{2}\Omega_m \frac{\mu}{k_c} (b_\alpha - b_\beta) \right] P(k), \quad (17)$$

possui uma parte imaginária intrínseca que dá origem ao termo de dipolo, muito mais fácil de ser observado uma vez que ele escala como $1/k_c$, onde chamamos $k_c \equiv ck/aH$ [35].

Levando-se em conta todas as correções proporcionais a $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ e considerando teorias onde a equação de Euler $\dot{\mathbf{v}} + \mathcal{H}\mathbf{v} + \nabla\Phi = 0$ é válida, obtemos o chamado termo Doppler⁷ A_β , que entra em adição às distorções espaciais de *redshift* padrão $\mathcal{H}^{-1}\partial_r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ (vide Eq. 12):

$$\begin{aligned} \delta_\beta^{(s)}(\mathbf{r}) &= \delta_\beta^{(r)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathcal{H}}\partial_r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \left[\frac{5s_\beta - 2}{\mathcal{H}r} + \frac{\partial(a^3\bar{n}_\beta)}{\partial \ln a} - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} - 5s_\beta \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ &\equiv b_\beta \delta^{(r)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mathcal{H}}\partial_r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + A_\beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Note que $-5s_\beta(\mathcal{H}r)^{-1}$ já está presente no trabalho de Kaiser, com $s_\beta \propto \partial_{\ln r} \ln(r^2\phi_\beta)$ sendo o chamado *viés de magnificação*. Com exceção da verdadeira perturbação de densidade δ_β , todos os outros termos aparecem devido às distorções no sistema de coordenadas que emergem ao relacionarmos as quantidades do universo homogêneo e isotrópico com aquelas que realmente observamos. Portanto, chegamos a principal equação deste trabalho:

$$\delta_\beta^{(s)}(\mathbf{k}) = \delta^{(r)}(\mathbf{k}) [b_\beta + f\mu_k^2 + if(\mathcal{H}k^{-1})A_\beta\mu_k], \quad (19)$$

com $\mu_k \equiv (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})$ representando a dependência com a linha de visada. Nossa principal objetivo será medir o dipolo induzido pela parte imaginária do espectro de potências, que detalhamos no que segue.

2.1 Aproximação de céu plano

Quando a linha de visada é a mesma para todos os objetos, i.e. $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mu$ é uma constante (aproximação de céu plano), o espectro cruzado $P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}) = \langle \delta_\alpha(\mathbf{k}) \delta_\beta^*(\mathbf{k}) \rangle$ de dois traçadores α e β é dado por:

$$P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}) = P^{(r)}(k) \left[(b_\alpha + f\mu^2)(b_\beta + f\mu^2) + A_\alpha A_\beta f^2 \mu^2 \frac{\mathcal{H}^2}{k^2} + if\mu [(b_\beta + f\mu^2)A_\alpha - (b_\alpha + f\mu^2)A_\beta] \frac{\mathcal{H}}{k} \right]. \quad (20)$$

Vemos que a isotropia é quebrada pela escolha de uma linha de visada e, portanto, $P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}) = P^{(s)}(k, \mu)$ pode ser expandido em polinômios de Legendre:

$$P^{(s)}(k, \mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell^{(s)}(k) \mathcal{L}_\ell(\mu), \quad P_\ell^{(s)}(k) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P^{(s)}(k, \mu) \mathcal{L}_\ell(\mu) \equiv P^{(r)}(k) c_\ell. \quad (21)$$

⁷A expressão completa e geral, sem a suposição da validade da equação de Euler, possui a adição de outros termos, os quais mencionamos aqui: *redshift* gravitacional $\mathcal{H}^{-1}\partial_r\Phi$ em ordem $\mathcal{H}k^{-1}$; efeito cone de luz $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ (*light-cone effect*) está associado ao fato de que, por observarmos objetos no cone de luz passado, as posições observadas são diferentes das posições que as galáxias teriam em uma hipersuperfície de tempo constante; termo de aceleração $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}$ descreve a aceleração da fonte com relação ao observador; temos também termos não-locais que expressam as distorções devido a lentes gravitacionais no volume observado, mas não consideraremos tais termos na presente análise [37] [38] [39].

onde $P_\ell^{(s)}(k)$ são os multipolos da expansão. Desprezando termos quadráticos $\mathcal{O}(\mathcal{H}/k)^2$, os coeficientes da expansão dão dados por:

$$c_0(f, b) = b_\alpha b_\beta + \frac{1}{3} f(b_\alpha + b_\beta) + \frac{1}{5} f^2, \quad (22)$$

$$c_1(k, f, b, A) = \frac{1}{5} i f \frac{\mathcal{H}}{k} [A_\alpha(3f + 5b_\beta) - A_\beta(3f + 5b_\alpha)], \quad (23)$$

$$c_2(f, b) = \frac{2}{3} f(b_\alpha + b_\beta) + \frac{4}{7} f^2, \quad (24)$$

$$c_3(k, f, A) = \frac{2}{5} i f^2 \frac{\mathcal{H}}{k} (A_\alpha - A_\beta), \quad (25)$$

$$c_4(f) = \frac{8}{35} f^2. \quad (26)$$

Enquanto que o monopolo, quadrupolo e hexadecapolo são os mesmos do caso Newtoniano, um dipolo que escala como $\mathcal{H}k^{-1}$ emerge no caso do espectro cruzado,

$$P_1^{(s)}(k) = i P^{(r)}(k) \frac{f}{5} [A_\alpha(3f + 5b_\beta) - A_\beta(3f + 5b_\alpha)] \frac{\mathcal{H}}{k}, \quad (27)$$

mas desaparece para o auto-espectro. Contudo, considerando as correções $\mathcal{O}(\mathcal{H}/k)^2$, o monopolo e o quadrupolo adquirem uma dependência de k^{-2} , fato responsável pela preocupação constante com uma possível contaminação no sinal do viés dependente de escala, como discutido anteriormente. Podemos escrever os multipolos do espectro no espaço de *redshifts* como

$$P_0^{(s)}(k) = P_0^N(k) + \Delta P_0^{\text{RE}}(k) + \Delta P_0^{\text{PNG}}(k), \quad (28)$$

$$\text{Im}[P_1^{(s)}(k)] = \text{Im}[P_1^{\text{RE}}(k)] + \text{Im}[\Delta P_1^{\text{PNG}}(k)], \quad (29)$$

$$P_2^{(s)}(k) = P_2^N(k) + \Delta P_2^{\text{RE}}(k) + \Delta P_2^{\text{PNG}}(k), \quad (30)$$

$$\text{Im}[P_3^{(s)}(k)] = P_3^{\text{RE}}(k), \quad (31)$$

$$P_4^{(s)}(k) = P_4^N(k), \quad (32)$$

onde os índices N, RE and PNG se referem aos multipolos Newtoniano (Kaiser) e as correções que aparecem devido aos efeitos relativísticos e ao viés dependente de escala do tipo local de PNG. As correções são dadas respectivamente por (para os multipolos pares, veja [33]):

$$\Delta P_0^{\text{RE}}(k) = \left[\frac{1}{3} A_\alpha A_\beta f^2 \left(\frac{\mathcal{H}}{k} \right)^2 \right] P_m^r(k), \quad (33)$$

$$\Delta P_0^{\text{PNG}}(k) = \left[\Delta b_\alpha \left(\frac{f}{3} + b_\beta \right) + \Delta b_\beta \left(\frac{f}{3} + b_\alpha \right) + \Delta b_\alpha \Delta b_\beta \right] P_m^r(k), \quad (34)$$

$$\text{Im}[\Delta P_1^{\text{PNG}}(k)] = \left[f \frac{\mathcal{H}}{k} (A_\alpha \Delta b_\beta - A_\beta \Delta b_\alpha) \right] P_m^r(k), \quad (35)$$

$$\Delta P_2^{\text{RE}}(k) = \left[\frac{2}{3} f^2 \left(\frac{\mathcal{H}}{k} \right)^2 A_\alpha A_\beta \right] P_m^r(k), \quad (36)$$

$$\Delta P_2^{\text{PNG}}(k) = \frac{2}{3} f (\Delta b_\alpha + \Delta b_\beta). \quad (37)$$

Vemos com isso que o viés dependente de escala também impõe uma correção ao dipolo relativístico. Contudo, dado que $\Delta b \sim \mathcal{O}(k^{-2})$, essas correções serão proporcionais a k^{-3} .

2.2 Correções de grandes ângulos

Ao abrirmos mão da aproximação de céu plano, devemos ter cuidado ao computar o espectro cruzado $P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \langle \delta_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta_\beta^*(\mathbf{k}_2) \rangle$:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = & P^{(r)}(k_1) \left[(b_\alpha + f\mu_{\mathbf{k}_1}^2)(b_\beta + f\mu_{\mathbf{k}_2}^2) + A_\alpha A_\beta f^2 \mu_{\mathbf{k}_1} \mu_{\mathbf{k}_2} \frac{\mathcal{H}^2}{k^2} + \right. \\ & \left. + i f [(b_\beta + f\mu_{\mathbf{k}_2}^2) A_\alpha \mu_{\mathbf{k}_1} - (b_\alpha + f\mu_{\mathbf{k}_1}^2) A_\beta \mu_{\mathbf{k}_2}] \frac{\mathcal{H}}{k} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

O primeiro termo, $P^{(r)}(k)$, vem do fato de assumirmos que o espectro de potências da matéria no espaço real é homogêneo e isotrópico e as diferentes linhas de visada são incluídas em $\mu_{\mathbf{k}_i} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i$.

Para dados contidos em um volume delimitado por uma grande área angular, essas correções devem ser levadas em conta. Seus principais efeitos podem ser resumidos no que segue:

- O espectro de potências $P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ não é mais diagonal. Podemos recuperar homogeneidade tomando o limite de céu plano ($\mu_{\mathbf{k}_1} = \mu_{\mathbf{k}_2} = \mu$);
- A parte imaginária $P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $\text{Im}[P_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] = f [(b_\beta + f\mu_{\mathbf{k}_2}^2)A_\alpha\mu_{\mathbf{k}_1} - (b_\alpha + f\mu_{\mathbf{k}_1}^2)A_\beta\mu_{\mathbf{k}_2}] \mathcal{H} k^{-1}$ não é nula mesmo para a autocorrelação de um traçador α . Nesse caso:

$$\text{Im}[P_{\alpha\alpha}^{(s)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] = A_\alpha b_\alpha f [(1 + \beta\mu_{\mathbf{k}_2}^2)\mu_{\mathbf{k}_1} - (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}_1}^2)\mu_{\mathbf{k}_2}] \frac{\mathcal{H}}{k},$$

onde $\beta = f/b_\alpha$. Portanto, um dipolo intrinsecamente geométrico aparece. No caso em que ângulos grandes são considerados, tal fato deve ser levado em conta na modelagem teórica do dipolo relativístico, Eq. (27).

2.3 Bispectro

O resultado mostrado na Eq. (18) é obtido expandindo as perturbações até primeira ordem. Expandindo as perturbações até segunda ordem [40], obtemos o bispectro das galáxias, na aproximação de observador distante [41]:

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \mathcal{K}(\mathbf{k}_1)\mathcal{K}(\mathbf{k}_2)\mathcal{K}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)P(k_1)P(k_2) + 2 \text{ permutações cíclicas}, \quad (39)$$

onde $\mathcal{K} = \mathcal{K}_N + \mathcal{K}_D$ é o *kernel* de primeira ordem das distorções de *redshift*, com o termo Newtoniano $\mathcal{K}_N = b + f\mu^2$ sendo de ordem $(\mathcal{H}/k)^0$, e $\mathcal{K}_D = iA_f\mu\frac{\mathcal{H}}{k}$ sendo o efeito Doppler de ordem $(\mathcal{H}/k)^1$. De forma semelhante, $\mathcal{K}^{(2)} = \mathcal{K}_N^{(2)} + \mathcal{K}_D^{(2)}$ corresponde às correções de segunda ordem, onde o termo Doppler $\mathcal{K}_D^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ contém potências ímpares de μ , resultando em um dipolo intrínseco no bispectro de um único tipo de traçador, em contrapartida ao caso do espectro de potências, onde devemos correlacionar traçadores diferentes para obtermos um sinal não-nulo [42].

3 Simulações de *N*-Corpos Relativísticas

Para testar as ideias descritas na seção anterior, utilizamos o código `gevolution` [30, 43], o qual faz uso da aproximação de campos fracos, válida no contexto cosmológico, para realizar simulações de *N*-corpos relativísticas, ou seja, as simulações são realizadas resolvendo-se as equações de Einstein. Vale ressaltar aqui que esse é o primeiro conjunto de simulações numéricas de *N*-corpos totalmente relativístico.

3.1 Cones de luz

Comumente simulações de *N*-corpos retornam *snapshots* com a posição e velocidade de partículas de matéria escura da simulação, cada um correspondendo a uma hipersuperfície de tempo constante (*redshift* fixo) e o mapa tridimensional das posições cartesianas dessas partículas. Contudo, tem sido cada vez mais recorrente a construção de cones de luz para a interpretação e obtenção de mapas simulados de galáxias mais realísticos [44, 45]. Diferentemente dos *snapshots*, um cone de luz nos dá acesso à posição angular dos objetos (partículas de matéria escura, halos, ou galáxias) no céu, a um determinado *redshift*, que representa uma hipersuperfície de tempo constante, podendo estarem tanto no espaço real, quanto no espaço de *redshift*. Somos então fornecidos com posições espaciais bidimensionais e a coordenada radial está associada com o *redshift* dos objetos, em contraposição ao mapa tridimensional em um tempo fixo como ocorre no caso dos *snapshots*. Halos de matéria escura são então encontrados nesses mapas, usando um algoritmo como, por exemplo, *Friends-of-Friends* (FoF), de forma que obtemos um catálogo contendo diferentes massas, posições angulares no céu, velocidades e outras informações relevantes.

Como o viés dos halos de matéria escura dependem da massa, podemos obter diferentes tipos de traçadores realizando cortes de massa nos objetos do catálogo. Trabalhamos com um cone de luz específico, compreendido no intervalo de *redshifts* $z = [0.1, 2.9]$, obtido através da simulação `gevolution`. Nesse caso, os cones são construídos *on the fly*, isto é: durante a simulação, a cada passo de integração, o código identifica as partículas de matéria escura que estão dentro de um intervalo apropriado de distância comóvel do observador, como deverão aparecer no cone de luz final; essas partículas são deslocadas por um intervalo de tempo fracional de acordo com a distância precisa ao observador, sendo então colocadas na superfície do cone de luz passado, definida pela geometria de FLRW, de forma exata. Ou seja, o código calcula de forma explícita a intersecção entre a linha de mundo de cada partícula e a hipersuperfície nula no cone de luz. Assim não é necessário salvar inúmeros *snapshots* que, além de consumirem muito tempo, ocupam muito espaço de armazenamento em disco. Com a abordagem *on the fly* também não haverá, portanto, efeitos de discretização temporal, pois dz é efetivamente zero.

Com o catálogo contendo a posição e velocidade das partículas de matéria escura, obtemos um catálogo de halos através do *halo finder Rockstar* [46] que são transportados para o espaço de *redshifts*, seguindo a expressão relativística, através de um algoritmo de *ray-tracing*, que conecta as posições das fontes com o observador através da integração da geodésica nula dos fótons.

3.2 Catálogos disponíveis

A simulação aqui utilizada possui três cones de luz distintos: um “local” (abertura de 97.4° e *redshift* máximo de $z \approx 0.08$), cobrindo um volume $V \sim 0.009 [\text{Gpc}/h]^3$; um intermediário, utilizado neste trabalho, com abertura de 25.68° , *redshift* máximo de $z \approx 3.1$ e volume total $V \sim 4.65 [\text{Gpc}/h]^3$, e um cone mais profundo (abertura $\sim 12^\circ$ e volume $V \sim 2.5 [\text{Gpc}/h]^3$, compreendendo *redshifts* até $z \sim 7$). A simulação foi realizada dentro do modelo ΛCDM , com parâmetros: $h = 0.67556$, $\omega_b = 0.022032$, $\omega_{\text{cdm}} = 0.12038$, $T_{\text{RCF}} = 2.7255 \text{ K}$, $A_s = 2.215 \times 10^{-9}$, $n_s = 0.9619$, $N_{\text{ur}} = 3.046$, e $N_{\text{ncdm}} = 0$, em uma caixa de lado $L = 2400 [\text{Mpc}/h]$ que cobre todo o cone de luz (para ver como esses cones de luz são construídos, veja a Fig. 1 de [47]). Cada partícula de matéria escura na simulação tem massa $2.64 \times 10^9 [M_\odot/h]$.

Foi considerada a região contida entre $z_{\min} = 0.1$ e $z_{\max} = 2.9$, correspondendo a um volume de, aproximadamente, $4.0 [\text{Gpc}/h]^3$ dada a cosmologia, contendo 1% do céu (i.e. $f_{\text{sky}} \sim 0.01$). Após essa seleção, sobraram 8.5×10^6 halos de matéria escura contidos numa área de 400 deg^2 . Também é possível utilizar os correspondentes cones no espaço real, ou seja, sem as distorções de *redshift* e efeitos de lenteamento gravitacional inclusos, e o catálogo de partículas de matéria escura, com 3.5×10^7 de partículas. Ambos os catálogos foram utilizados para obter uma estimativa do viés dos halos com base nas funções de correlação e espectro de potências. Para isso, calculamos as estatísticas de dois pontos halo-halo, para depois comparar com a estatística matéria-matéria, quantidades que nos retornam o viés linear b^2 através da Eq. (4).

3.3 Resultados

Nesta seção, são apresentados os resultados da referência [48], onde foi dado foco para fatias de altos *redshifts* $1.7 < z < 2.9$, separados em três *bins* de largura $\Delta z = 0.4$.

Para o cálculo das função de correlação, necessitamos de catálogos aleatórios com objetos distribuídos de forma Poissoniana dentro da geometria do levantamento, com a mesma distribuição de *redshifts* $\bar{n}(z)$ dos halos originais (dados), e muito mais densos. Com isso, podemos calcular qual a probabilidade de encontrar um par de galáxias separados por uma distância s com relação à distribuição aleatória (sem estrutura cosmológica) Poissoniana. Checamos a distribuição angular e de *redshift* dos catálogos aleatórios verificando a consistência entre ambos. Para o espectro de potências, utilizamos catálogos aleatórios com 10^8 partículas, de forma a mapear toda a região do cone. Isso foi utilizado para estimarmos P_ℓ de acordo com a técnica apresentada em [49, 50, 51], também descrita na Seção 4 do artigo em questão, aos quais referenciamos para detalhamentos sobre como estimar o espectro de potências.

Tabela 1: Amostras de halos consideradas nas nossas análises, selecionadas para corresponder à densidade numérica para cada população: $\bar{n}_0 \approx \bar{n}_1 \approx \bar{n}_2$. O *redshift* médio foi determinado a partir de todos os halos em cada fatia, dado que o *redshift* efetivo de cada amostra variou em torno de $\lesssim 0.5\%$. O procedimento para a determinação do viés dos halos pode ser encontrado no Apêndice A2 de [48]. Para os três bins de z , os volumes são tais que o modo fundamental para observação é $k_F = 2\pi/V^{1/3} \sim 7 \times 10^{-3} [\text{h}/\text{Mpc}]$.

	# halos	Massa	Bias (Tinker)	Bias (PS)	Bias (CF)	$\bar{n}(\bar{z}) [\text{Mpc}/h]^{-3}$
$\bar{z} = 1.89$						
All	480643	4.41×10^{12}	2.881	2.927	2.809	7.053×10^{-4}
H_0	160081	1.86×10^{12}	2.273	2.551	2.437	2.356×10^{-4}
H_1	160547	2.83×10^{12}	2.540	2.758	2.652	2.348×10^{-4}
H_2	160015	8.54×10^{12}	3.539	3.477	3.349	2.349×10^{-4}
$\bar{z} = 2.29$						
All	326899	3.85×10^{12}	3.473	3.469	3.196	4.666×10^{-4}
H_0	109003	1.83×10^{12}	2.803	3.020	2.772	1.556×10^{-4}
H_1	108809	2.66×10^{12}	3.114	3.270	2.993	1.553×10^{-4}
H_2	109087	7.05×10^{12}	4.212	4.154	3.827	1.557×10^{-4}
$\bar{z} = 2.69$						
All	205678	3.44×10^{12}	4.140	4.214	3.959	2.947×10^{-4}
H_0	68501	1.80×10^{12}	3.414	3.735	3.613	9.815×10^{-5}
H_1	68550	2.52×10^{12}	3.765	4.006	3.891	9.822×10^{-5}
H_2	68627	5.98×10^{12}	4.955	4.932	4.468	9.833×10^{-5}

Encontramos discrepâncias entre os vieses calculados através do cone de luz no espaço real e o ajuste fenomenológico de [7]. Utilizamos um polinômio quadrático $b_0 + b_1 x^2$ para ajustar a razão entre o espectro estimado dos halos no espaço real com o espectro teórico da matéria, definindo o viés linear dos halos como $b \equiv \sqrt{b_0}$. Motivos para a discrepância podem estar associados ao fato do ajuste de [7] ter sido feito para *redshifts* mais baixos. Por completeza, calculamos o viés através da razão entre as funções de correlação halo-halo e matéria-matéria, ajustando uma constante para escalas relativamente grandes, mas que ainda continham um número grande de pares de halos para minimizar ruído das medidas. As medidas obtidas através do espectro (PS) e função de correlação (CF) são mostradas na Tabela I para os três intervalos de *redshift*.

Obtivemos o dipolo cruzado entre os traçadores para todos os bins de *redshift*, mas mostramos apenas os resultados para a primeira fatia $\bar{z} \sim 1.89$, pois os outros resultados foram similares. Como mostrado em [52], pelo fato dos dados não estarem distribuídos em uma caixa, mas sujeitos a uma geometria não-trivial (no nosso caso, a de um cone), um dipolo geométrico se faz presente. Contudo, como podemos notar através da Eq. (27), o sinal do dipolo relativístico é antissimétrico, ou seja, $\langle \delta_\alpha(\mathbf{k}) \delta_\beta^*(\mathbf{k}) \rangle = -\langle \delta_\beta(\mathbf{k}) \delta_\alpha^*(\mathbf{k}) \rangle$. Portanto, em [53] foi proposta a utilização do estimador antissimétrico $\Delta P_1 = \langle \delta_\alpha(\mathbf{k}) \delta_\beta^*(\mathbf{k}) \rangle - \langle \delta_\beta(\mathbf{k}) \delta_\alpha^*(\mathbf{k}) \rangle \equiv P_1^{\alpha\beta} - P_1^{\beta\alpha}$, que explora o fato de que o dipolo geométrico é, em contrapartida, simétrico. Dessa forma, $\Delta P_1 = 2\langle \delta_\alpha(\mathbf{k}) \delta_\beta^*(\mathbf{k}) \rangle = 2P_1^{\alpha\beta}$ isola o sinal de interesse. Na Fig. 3 mostramos esse estimador para os halos de matéria escura descritos previamente (veja Tabela I para a descrição das populações H_0 , H_1 e H_2 consideradas). Por não estarmos no melhor regime de observação, com um levantamento de área e volume pequenos, não conseguimos detectar o dipolo nas simulações.

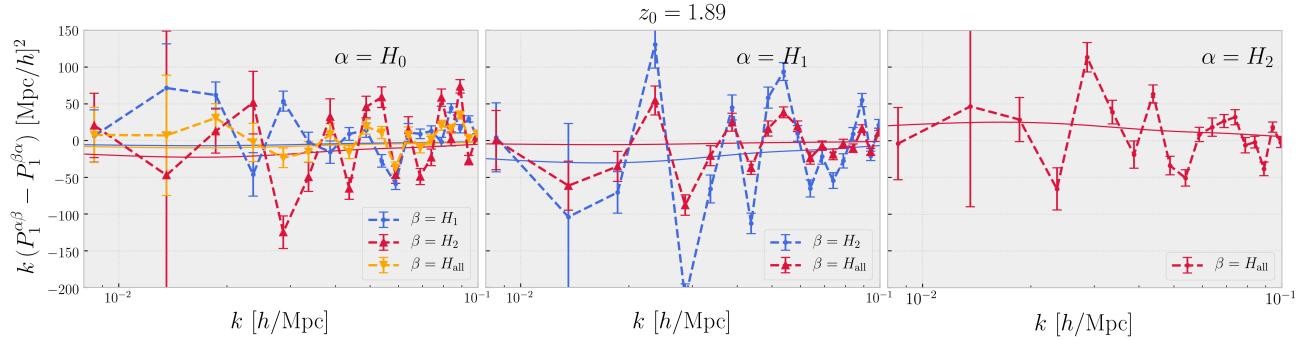


Figura 3: Dipolo estimado a partir das 4 populações de halos descritas na Tabela I para a primeira fatia de *redshift*. Como no caso do monopolio, as barras de erro foram calculadas a partir do desvio padrão do dipolo das 100 simulações log-normais mencionadas. As linhas sólidas representam a teoria, uma vez que $P_1^{\alpha\beta} - P_1^{\beta\alpha}$ é praticamente livre do impacto da função janela (simétrica). Mostramos todas as possíveis combinações de halos. Extraído de [48].

4 Observações finais

Apresentamos uma revisão sobre como não-Gaussianidades primordiais do tipo local, característica de alguns cenários inflacionários, podem ser vinculadas no espectro de potências de traçadores enviesados da matéria, através da assinatura k^{-2} que emerge em grandes escalas. Mostramos, também, como esse efeito particular se mistura com efeitos relativísticos que aparecem ao conectar as quantidades observadas em levantamentos de galáxias (e.g. *redshift*) com a teoria. Ambos os efeitos se manifestam em escalas da ordem do raio de Hubble e devem ser modelados teoricamente para a extração em dados reais.

Focamos nos efeitos relativísticos, os quais deixam um sinal característico no espectro de potências cruzado entre diferentes traçadores da matéria escura: a presença de um dipolo, como descrito na Eq. (27). Fazendo uso de um cone de luz gerado com o código de *N*-corpos relativístico *gevolution*, reproduzimos os resultados da análise de multipolos realizada em [48]⁸ onde o espectro de potências cruzado entre diferentes subpopulações de halos (que correspondem à diferentes traçadores) foi utilizado. Trabalhamos no intervalo de *redshifts* $1.7 \leq z \leq 2.9$, com o cone de luz cobrindo uma fração de 1% do céu, área semelhante à região de sobreposição de galáxias luminosas vermelhas e de linha de emissão na análise de múltiplos traçadores dos dados finais do levantamento eBOSS [54], embora esses dados sejam a baixos *redshifts* ($z \sim 1$).

Devido ao volume limitado da nossa análise, não obtivemos nenhuma detecção conclusiva da assinatura do dipolo nesse conjunto de dados. Vemos, portanto, que o desafio de observar volumes (frações) grandes do céu é de suma importância para

⁸Para uma descrição em detalhes sobre como a geometria do levantamento de galáxias, incorporada através da chamada função janela, de sobre como quantidades características das populações de traçadores empregadas na análise podem ser estimadas no cone de luz passado, referimos a quem tiver interesse o artigo [48] e as referências ali contidas.

levantamentos que desejem extrair características em escalas ultralargas: desde os efeitos relativísticos abordados nas Seções 2 e 3, até assinaturas da física do universo primordial, como descrito na Seção 1. Torna-se interessante, portanto, formas de otimizar as medidas do espectro de potências através da utilização de pesos, aplicáveis aos dados, para aumentar o sinal dos multipolos frente ao ruído intrínseco das medidas [18].

Não analisamos e nem apresentamos um método de incorporar os efeitos de grandes ângulos, descritos na Seção 2. O motivo para isso foi ao pequeno ângulo sólido compreendido pela nossa análise. Contudo, tais efeitos devem ser explorados no contexto de levantamentos tais como o Euclid, Rubin Observatory/LSST e SKA, os quais devem cobrir uma fração considerável do céu.

Chamamos a atenção para a referência [55]: quando estimamos o espectro de potências dentro do intervalo de *redshifts* mencionado, assumimos que todos os halos ali contidos possuíam o mesmo *redshift* \bar{z} , calculado a partir da média dos *redshifts* específicos de cada halo. No entanto, o trabalho mencionado mostrou que uma anisotropia dependente de escala emerge devido a essas diferenças. Embora eles tenham encontrado 4% e 40% de diferença no quadrupolo ($\ell = 2$) e hexadecapolo ($\ell = 4$), respectivamente, com efeitos desprezíveis no monopolo ($\ell = 0$), nenhuma estimativa foi feita para o dipolo ($\ell = 1$). Portanto, fica aberta a possibilidade de explorar como as linhas de visada calculadas nos diferentes *redshifts* contidos dentro do intervalo considerado para análise impacta a detecção do dipolo relativístico, bem como a de não-Gaussianidades primordiais.

Agradecimentos

A autora agradece à *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) pelo apoio financeiro (processo 2018/10396-2), aos seus coautores Julian Adamek, Chris Clarkson e Louis Coates e, pela supervisão durante o doutorado, ao seu orientador Raul Abramo e seu coorientador Philip Bull. Agradecimentos aos organizadores do evento *As Astrocientistas: Encontro Brasileiro de Meninas e Mulheres da Astrofísica, Gravitação e Cosmologia*.

Referências

- [1] Chris Smeenk. Philosophy of cosmology. In Robert Batterman, editor, *Oxford Handbook of Philosophy of Physics*, pages 607–652. Oxford: Oxford University Press, 2013.
- [2] Nabil Aghanim, Yashar Akrami, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [3] Juan Maldacena. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *Journal of High Energy Physics*, 2003(05):013, May 2003.
- [4] K.N. Abazajian, K. Arnold, J. Austermann, B.A. Benson, C. Bischoff, J. Bock, J.R. Bond, J. Borrill, I. Buder, D.L. Burke, and et al. Inflation physics from the cosmic microwave background and large scale structure. *Astroparticle Physics*, 63:55–65, Mar 2015.
- [5] Marcelo Alvarez, Tobias Baldauf, J Richard Bond, Neal Dalal, Roland de Putter, Olivier Doré, Daniel Green, Chris Hirata, Zhiqi Huang, Dragan Huterer, et al. Testing inflation with large scale structure: connecting hopes with reality. *arXiv preprint arXiv:1412.4671*, 2014.
- [6] Dionysios Karagiannis, Andrei Lazanu, Michele Liguori, Alvise Raccanelli, Nicola Bartolo, and Licia Verde. Constraining primordial non-gaussianity with bispectrum and power spectrum from upcoming optical and radio surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 478(1):1341–1376, Apr 2018.
- [7] Jeremy L. Tinker, Brant E. Robertson, Andrey V. Kravtsov, Anatoly Klypin, Michael S. Warren, Gustavo Yepes, and Stefan Gottlöber. The large scale bias of dark matter halos: Numerical calibration and model tests. *The Astrophysical Journal*, 724(2):878–886, Nov 2010.
- [8] Y Akrami, F Arroja, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-ix. constraints on primordial non-gaussianity. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A9, 2020.
- [9] Neal Dalal, Olivier Doré, Dragan Huterer, and Alexander Shirokov. Imprints of primordial non-gaussianities on large-scale structure: Scale-dependent bias and abundance of virialized objects. *Physical Review D*, 77(12):123514, Jun 2008.
- [10] Anže Slosar, Christopher Hirata, Uroš Seljak, Shirley Ho, and Nikhil Padmanabhan. Constraints on local primordial non-gaussianity from large scale structure. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(08):031, Aug 2008.
- [11] Eiichiro Komatsu and David N. Spergel. Acoustic signatures in the primary microwave background bispectrum. *Physical Review D*, 63:063002, Feb 2001.
- [12] Michele Liguori, Emiliano Sefusatti, James R Fergusson, and EPS Shellard. Primordial non-gaussianity and bispectrum measurements in the cosmic microwave background and large-scale structure. *Advances in Astronomy*, 2010, 2010.

- [13] Emanuele Castorina, Nick Hand, Uroš Seljak, Florian Beutler, Chia-Hsun Chuang, Cheng Zhao, Héctor Gil-Marín, Will J. Percival, Ashley J. Ross, Peter Doohyun Choi, and et al. Redshift-weighted constraints on primordial non-gaussianity from the clustering of the eboss dr14 quasars in fourier space. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):010, Sep 2019.
- [14] R. Laureijs, J. Amiaux, S. Arduini, J. L. Auguères, J. Brinchmann, R. Cole, M. Cropper, C. Dabin, L. Duvet, A. Ealet, B. Garilli, P. Gondoin, L. Guzzo, J. Hoar, H. Hoekstra, R. Holmes, T. Kitching, T. Maciaszek, Y. Mellier, F. Pasian, W. Percival, J. Rhodes, G. Saavedra Criado, M. Sauvage, R. Scaramella, L. Valenziano, S. Warren, R. Bender, F. Castander, A. Cimatti, O. Le Fèvre, H. Kurki-Suonio, M. Levi, P. Lilje, G. Meylan, R. Nichol, K. Pedersen, V. Popa, R. Rebolo Lopez, H. W. Rix, H. Rottgering, W. Zeilinger, F. Grupp, P. Hudelot, R. Massey, M. Meneghetti, L. Miller, S. Paltani, S. Paulin-Henriksson, S. Pires, C. Saxton, T. Schrabback, G. Seidel, J. Walsh, N. Aghanim, L. Amendola, J. Bartlett, C. Baccigalupi, J. P. Beaulieu, K. Benabed, J. G. Cuby, D. Elbaz, P. Fosalba, G. Gavazzi, A. Helmi, I. Hook, M. Irwin, J. P. Kneib, M. Kunz, F. Mannucci, L. Moscardini, C. Tao, R. Teyssier, J. Weller, G. Zamorani, M. R. Zapatero Osorio, O. Boulade, J. J. Foumond, A. Di Giorgio, P. Guttridge, A. James, M. Kemp, J. Martignac, A. Spencer, D. Walton, T. Blümchen, C. Bonoli, F. Bortoletto, C. Cerna, L. Corcione, C. Fabron, K. Jahnke, S. Ligori, F. Madrid, L. Martin, G. Morgante, T. Pamplona, E. Prieto, M. Riva, R. Toledo, M. Trifoglio, F. Zerbi, F. Abdalla, M. Douspis, C. Grenet, S. Borgani, R. Bouwens, F. Courbin, J. M. Delouis, P. Dubath, A. Fontana, M. Frailis, A. Grazian, J. Koppenhöfer, O. Mansutti, M. Melchior, M. Mignoli, J. Mohr, C. Neissner, K. Noddle, M. Poncet, M. Scodéggi, S. Serrano, N. Shane, J. L. Starck, C. Surace, A. Taylor, G. Verdoes-Kleijn, C. Vuerli, O. R. Williams, A. Zacchei, B. Altieri, I. Escudero Sanz, R. Kohley, T. Oosterbroek, P. Astier, D. Bacon, S. Bardelli, C. Baugh, F. Bellagamba, C. Benoit, D. Bianchi, A. Biviano, E. Branchini, C. Carbone, V. Cardone, D. Clements, S. Colombi, C. Conselice, G. Cresci, N. Deacon, J. Dunlop, C. Fedeli, F. Fontanot, P. Franzetti, C. Giocoli, J. Garcia-Bellido, J. Gow, A. Heavens, P. Hewett, C. Heymans, A. Holland, Z. Huang, O. Ilbert, B. Joachimi, E. Jennings, E. Kerins, A. Kiessling, D. Kirk, R. Kotak, O. Krause, O. Lahav, F. van Leeuwen, J. Lesgourgues, M. Lombardi, M. Magliocchetti, K. Maguire, E. Majerotto, R. Maoli, F. Marulli, S. Maurogordato, H. McCracken, R. McLure, A. Melchiorri, A. Merson, M. Moresco, M. Nonino, P. Norberg, J. Peacock, R. Pello, M. Penny, V. Pettorino, C. Di Porto, L. Pozzetti, C. Quercellini, M. Radovich, A. Rassat, N. Roche, S. Ronayette, E. Rossetti, B. Sartoris, P. Schneider, E. Semboloni, S. Serjeant, F. Simpson, C. Skordis, G. Smadja, S. Smartt, P. Spano, S. Spiro, M. Sullivan, A. Tilquin, R. Trotta, L. Verde, Y. Wang, G. Williger, G. Zhao, J. Zoubian, and E. Zucca. Euclid definition study report. *preprint*, ([arXiv:1110.3193](https://arxiv.org/abs/1110.3193)), 2011.
- [15] Héctor Gil-Marín, Jorge Noreña, Licia Verde, Will J. Percival, Christian Wagner, Marc Manera, and Donald P. Schneider. The power spectrum and bispectrum of sdss dr11 boss galaxies – i. bias and gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 451(1):539–580, May 2015.
- [16] Uroš Seljak. Extracting primordial non-gaussianity without cosmic variance. *Physical Review Letters*, 102(2):021302, Jan 2009.
- [17] L. R. Abramo and K. E. Leonard. Why multitracer surveys beat cosmic variance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 432(1):318–326, Apr 2013.
- [18] L. Raul Abramo, Lucas F. Secco, and Arthur Loureiro. Fourier analysis of multitracer cosmological surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 455(4):3871–3889, Dec 2015.
- [19] David Bacon, Sarah Bridle, Filipe B Abdalla, Michael Brown, Philip Bull, Stefano Camera, Rob Fender, Keith Grainge, Zeljko Ivezic, Matt Jarvis, et al. Synergy between the large synoptic survey telescope and the square kilometre array. *arXiv preprint arXiv:1501.03977*, 2015.
- [20] Thomas D. Kitching, David Bacon, Michael L. Brown, Philip Bull, Jason D. McEwen, Masamune Oguri, Roberto Scaramella, Keitaro Takahashi, Kinwah Wu, and Daisuke Yamauchi. Euclid & ska synergies, 2015.
- [21] Jason Rhodes, Robert C Nichol, Éric Aubourg, Rachel Bean, Dominique Boutigny, Malcolm N Bremer, Peter Capak, Vincenzo Cardone, Benoît Carry, Christopher J Conselice, et al. Scientific synergy between lsst and euclid. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 233(2):21, 2017.
- [22] Bhuvnesh Jain and Edmund Bertschinger. Second order power spectrum and nonlinear evolution at high redshift. *The Astrophysical Journal*, 431:495–505, 1994.
- [23] S. Matarrese, L. Verde, and A. F. Heavens. Large-scale bias in the universe: bispectrum method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 290(4):651–662, Oct 1997.
- [24] Francis Bernardeau, S Colombi, E Gaztañaga, and R Scoccimarro. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Physics reports*, 367(1-3):1–248, 2002.
- [25] Azadeh Moradinezhad Dizgah, Matteo Biagetti, Emiliano Sefusatti, Vincent Desjacques, and Jorge Noreña. Primordial non-gaussianity from biased tracers: likelihood analysis of real-space power spectrum and bispectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(05):015, May 2021.

- [26] Héctor Gil-Marín, Christian Wagner, Frantzeska Fragkoudi, Raul Jimenez, and Licia Verde. An improved fitting formula for the dark matter bispectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(02):047–047, Feb 2012.
- [27] Emanuele Castorina and Enea di Dio. The observed galaxy power spectrum in general relativity, 2021.
- [28] Christian Fidler, Thomas Tram, Cornelius Rampf, Robert Crittenden, Kazuya Koyama, and David Wands. General relativistic weak-field limit and newtonian n-body simulations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(12):022–022, Dec 2017.
- [29] Julian Adamek and Christian Fidler. The large-scale general-relativistic correction for newtonian mocks. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):026, 2019.
- [30] Julian Adamek, David Daverio, Ruth Durrer, and Martin Kunz. General relativity and cosmic structure formation. *Nature Phys.*, 12(4):346–349, Mar 2016.
- [31] Jaiyul Yoo. General relativistic description of the observed galaxy power spectrum: Do we understand what we measure? *Physical Review D*, 82(8), Oct 2010.
- [32] Obinna Umeh, Sheean Jolicoeur, Roy Maartens, and Chris Clarkson. A general relativistic signature in the galaxy bispectrum: the local effects of observing on the lightcone. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(03):034–034, Mar 2017.
- [33] Mike (Shengbo) Wang, Florian Beutler, and David Bacon. Impact of relativistic effects on the primordial non-gaussianity signature in the large-scale clustering of quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 499(2):2598–2607, Sep 2020.
- [34] Nick Kaiser. On the spatial correlations of Abell clusters. *The Astrophysical Journal: Letters*, 284:L9–L12, 9 1984.
- [35] Patrick McDonald. Gravitational redshift and other redshift-space distortions of the imaginary part of the power spectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(11):026, Nov 2009.
- [36] Mario Ballardini, William L Matthewson, and Roy Maartens. Constraining primordial non-gaussianity using two galaxy surveys and cmb lensing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(2):1950–1956, Aug 2019.
- [37] Michel-Andrès Breton, Yann Rasera, Atsushi Taruya, Osmin Lacombe, and Shohei Saga. Imprints of relativistic effects on the asymmetry of the halo cross-correlation function: from linear to non-linear scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(2):2671–2696, 11 2018.
- [38] Camille Bonvin, Lam Hui, and Enrique Gaztañaga. Asymmetric galaxy correlation functions. *Physical Review D*, 89:083535, Apr 2014.
- [39] Camille Bonvin. Isolating relativistic effects in large-scale structure. *Classical and Quantum Gravity*, 31(23):234002, 2014.
- [40] Jaiyul Yoo and Matias Zaldarriaga. Beyond the linear-order relativistic effect in galaxy clustering: second-order gauge-invariant formalism. *Physical Review D*, 90(2):023513, 2014.
- [41] Sheean Jolicoeur, Obinna Umeh, Roy Maartens, and Chris Clarkson. Imprints of local lightcone projection effects on the galaxy bispectrum. part iii. relativistic corrections from nonlinear dynamical evolution on large-scales. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03):036–036, Mar 2018.
- [42] Chris Clarkson, Eline M de Weerd, Sheean Jolicoeur, Roy Maartens, and Obinna Umeh. The dipole of the galaxy bispectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 486(1):L101–L104, 05 2019.
- [43] Julian Adamek, David Daverio, Ruth Durrer, and Martin Kunz. gevolution: a cosmological n-body code based on general relativity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(07):053, Jul 2016.
- [44] Alexander I. Merson, Carlton M. Baugh, John C. Helly, Violeta Gonzalez-Perez, Shaun Cole, Richard Bielby, Peder Norberg, Carlos S. Frenk, Andrew J. Benson, Richard G. Bower, and et al. Lightcone mock catalogues from semi-analytic models of galaxy formation – i. construction and application to the bzk colour selection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(1):556–578, Dec 2012.
- [45] Alex Smith, Shaun Cole, Carlton Baugh, Zheng Zheng, Raúl Angulo, Peder Norberg, and Idit Zehavi. A lightcone catalogue from the millennium-xxl simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470(4):4646–4661, Jun 2017.
- [46] Peter S. Behroozi, Risa H. Wechsler, and Hao-Yi Wu. The rockstar phase-space temporal halo finder and the velocity offsets of cluster cores. *The Astrophysical Journal*, 762(2):109, Dec 2012.
- [47] Louis Coates, Julian Adamek, Philip Bull, Caroline Guandalin, and Chris Clarkson. Observing relativistic features in large-scale structure surveys – ii. doppler magnification in an ensemble of relativistic simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(3):3534–3543, Apr 2021.
- [48] Caroline Guandalin, Julian Adamek, Philip Bull, Chris Clarkson, L Raul Abramo, and Louis Coates. Observing relativistic features in large-scale structure surveys – i. multipoles of the power spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 501(2):2547–2561, Dec 2020.

- [49] Kazuhiro Yamamoto, Masashi Nakamichi, Akinari Kamino, Bruce A. Bassett, and Hiroaki Nishioka. A Measurement of the Quadrupole Power Spectrum in the Clustering of the 2dF QSO Survey. *PASJ*, 58(1):93–102, 02 2006.
- [50] Davide Bianchi, Héctor Gil-Marín, Rossana Ruggeri, and Will J. Percival. Measuring line-of-sight-dependent Fourier-space clustering using FFTs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 453(1):L11–L15, 08 2015.
- [51] Román Scoccimarro. Fast estimators for redshift-space clustering. *Physical Review D*, 92(8):083532, Oct 2015.
- [52] Florian Beutler, Hee-Jong Seo, Shun Saito, Chia-Hsun Chuang, Antonio J. Cuesta, Daniel J. Eisenstein, Héctor Gil-Marín, Jan Niklas Grieb, Nick Hand, Francisco-Shu Kitaura, Chirag Modi, Robert C. Nichol, Matthew D. Olmstead, Will J. Percival, Francisco Prada, Ariel G. Sánchez, Sergio Rodriguez-Torres, Ashley J. Ross, Nicholas P. Ross, Donald P. Schneider, Jeremy Tinker, Rita Tojeiro, and Mariana Vargas-Magaña. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: anisotropic galaxy clustering in Fourier space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(2):2242–2260, 12 2016.
- [53] Florian Beutler and Enea Di Dio. Modeling relativistic contributions to the halo power spectrum dipole. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(07):048, Jul 2020.
- [54] Gong-Bo Zhao, Yuting Wang, Atsushi Taruya, Weibing Zhang, Hector Gil-Marín, Arnaud de Mattia, Ashley J. Ross, Anand Raichoor, Cheng Zhao, Will J. Percival, Shadab Alam, Julian E. Bautista, Etienne Burtin, Chia-Hsun Chuang, Kyle S. Dawson, Jean-Paul Kneib, Kazuya Koyama, Helion du Mas des Bourboux, Eva-Maria Mueller, Jeffrey A. Newman, John A. Peacock, Graziano Rossi, Vanina Ruhlmann-Kleider, Donald P. Schneider, and Arman Shafieloo. The completed sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey: a multi-tracer analysis in fourier space for measuring the cosmic structure growth and expansion rate. *preprint, (arXiv:2007.09011)*, 2020.
- [55] Andrej Obuljen and Will J. Percival. Anisotropic effective redshift and evolving clustering amplitude. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(11):006, Nov 2021.