Modelos Cosmológicos Quânticos em Minisuperespaço: Uma Revisão através do caso de Radiação

F. G. Alvarenga[1], R. Fracalossi[2] e S. V. de B. Gonçalves[3]
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil
E. V. C. Silva[4] e G. A. Monerat[5]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil
G. de O. Neto[6]
Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil
[1]flavio.alvarenga@ufes.br [2]rfracalossi@gmail.com [3]sergio.vitorino@pq.cnpq.br
[4]evasquez@uerj.br [5]germano.monerat@pq.cnpq.br
[6]gilneto@ufjf.br

Resumo

Neste trabalho propõe-se uma prescrição para formulação de modelos cosmológicos quânticos que descrevam a evolução do Universo Primordial. Tomando como exemplo um simples modelo de Universo sem curvatura espacial preenchido com fluido de radiação, aplica-se os passos necessários a elaboração de tais modelos, a saber: formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral; condições de contorno e esquemas de interpretação da Mecânica Quântica.

1 Introdução

A inexistência de uma teoria completa de gravitação quântica implica na necessidade de se testar os efeitos quânticos em diferentes regimes e modelos. Neste sentido, modelos cosmológicos quânticos são simples exemplos nos quais as ideias da gravitação quântica podem ser aplicadas, por descreverem a possibilidade de nascimento do Universo, por exemplo, via um processo de tunelamento quântico, e assim evitar a singularidade inicial: estado de tamanho zero e densidade de energia infinita que constituem problemas inerentes ao estudo da evolução temporal do Universo. A chamada cosmologia quântica [1] surge então como uma solução alternativa a este problema. Além disso, a partir do estado inicial é possível estabelecer as condições que irão determinar a evolução posterior do Universo até que o regime clássico seja alcançado.

O processo de quantização ocorre no cenário de minisuperespaço, no qual congelamos um número infinito de graus de liberdade e efetuamos a quantização dos graus remanescentes. DeWitt [2] foi quem primeiro adotou este esquema de quantização que hoje é largamente utilizado com diferentes conteúdos materiais e simetrias. Apesar disso existem problemas estruturais na teoria como a não explícita presença de uma variável do tipo tempo. Uma alternativa a essa questão reside na introdução fenomenológica de variáveis dinâmicas associadas a diferentes conteúdos materiais do Universo, com a pressão sendo expressa em termos de potencias de velocidade e uma dessas variáveis exercendo o papel do tempo. Este é o chamado formalismo de Schutz [3].

Neste trabalho revisa-se um modelo cosmológico em que o Universo está preenchido com um fluido perfeito barotrópico de radiação, como exemplo, para a implementação dos passos da prescrição da Cosmologia Quântica. O fluido fornece graus de liberdade para a introdução de uma variável tipo tempo. Isso permite transformar a equação de Wheeler-DeWitt em uma genuína equação de Schrödinger. A função de onda do Universo e o seu fator de escala do Universo serão determinados e analisados pelas interpretações da mecânica quântica de vários mundos e de de Broglie - Bohm.

2 O Formalismo

A formulação hamiltoniana da Relatividade Geral desenvolvida por Arnowitt, Deser e Misner, tornou-se conhecida como formalismo ADM. A dinâmica é revelada como a evolução de uma hipersuperfíe tridimensional, na qual os campos estão definidos. Parte-se da ação de Einstein-Hilbert com o termo de contorno:

$$S_g = \int_M d^4x\sqrt{-g}R + 2\int_{\partial M} d^3x\sqrt{h}K, \tag{1}$$

onde R é o escalar de curvatura, tomado como função of $g^{\mu\nu}$ e suas derivadas, $K = h_{ab}K^{ab}$ tal que K_{ab} é a curvatura extrínseca e h_{ab} é a métrica induzida sobre a hipersuperfíe espacial tridimensional. Acima ∂M é o contorno da variedade quadridimensional M e G é a constante gravitacional Newtoniana.

Para o Universo homogêneo e isotrópico adota-se a métrica na forma de Friedmann-Robertson-Walker (com $c = 1$ e $k = 0$):

$$ds^2 = -N(t)^2dt^2 + a(t)\left(dr^2 + r^2 d\Omega\right) , \tag{2}$$

em que $N(t)$ é a função lapso, que corresponde à componente normal da quadrivelocidade, $a(t)$ é o fator de escala do Universo. A inserção da métrica reduz a ação gravitacional a forma

$$S_g = \int dt \left(-6\frac{\dot{a}^2 a}{N} \right), \tag{3}$$

a qual mediante o formalismo canônico determina a hamiltoniana gravitacional:

$$\mathscr{H}_g = -\frac{p_a^2}{24a}. \tag{4}$$

O Universo está totalmente preenchido por um fluido perfeito de radiação com a dinâmica descrita pelo formalismo de Schultz. Este formalismo emprega a representação da quadrivelocidade do fluido em termos de potenciais escalares ϕ, θ e S:

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) , \tag{5}$$

cada um satisfazendo sua própria equação de movimento. Na expressão acima μ é a entalpia específica, S é a entropia específica. As variáveis ϕ e θ não têm significado físico claro.

A ação da matéria é especialmente simples:

$$S_f = \int d^4x\sqrt{-g}\,p\,, \tag{6}$$

onde p é a pressão, a qual está associada com a densidade de energia através da equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$. As equações de Einstein são obtidas pela variação da ação (6) mais a ação de Einstein-Hilbert em relação ao tensor métrico, enquanto variações relativas aos potenciais de velocidade fornecem as equações Eulerianas da evolução do fluido.

As relações termodinâmicas assumem a forma

$$\rho = \rho_0(1+\Pi); \mu = (1+\Pi) + \frac{p}{\rho_0}\,; \tag{7}$$

$$T_s dS = d\Pi + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \tag{8}$$

sendo Π a energia interna específica, T_s a temperatura e ρ_0 a densidade de massa de repouso do fluido.

Escrevendo

$$d\Pi + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = (1+\Pi)d[ln(1+\Pi) +$$

$$-\frac{1}{3}ln\rho_0], \tag{9}$$

identifica-se $T_s = 1+\Pi$ e $S = ln(1+\Pi)/\rho_0{}^{\frac{1}{3}}$.

Após algumas manipulações matemáticas, a pressão reduz-se a

$$p = \frac{27}{256}\mu^4 e^{-3S}. \tag{10}$$

A condição de normalização $U^\nu U_\nu = -1$ permite expressar μ em termos dos potenciais:

$$\mu = \frac{1}{N}(\dot\phi + \theta\dot S)\,. \tag{11}$$

A inserção de (10) e (11) na ação da matéria (6), estabelece a Lagrangiana do fluido:

$$\mathscr{L}_f = \frac{27}{256}(\frac{a}{N})^3\,(\dot\phi + \theta\dot S)^4\,e^{-3S}\quad. \tag{12}$$

Os momentos canônicos conjugados do fluido seguem da Lagrangiana acima,

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{27}{64}(\frac{a}{N})^3\,(\dot\phi + \theta\dot S)^3\,e^{-3S}\quad, \\ p_S &= \theta p_\phi\quad, \\ p_\theta &= 0\quad, \end{aligned} \tag{13}$$

de modo a fornecer pelo formalismo canônico a Hamiltoniana do fluido

$$\mathscr{H}_f = \frac{p_\phi^{\frac{4}{3}}}{a}e^S\,. \tag{14}$$

As transformações canônicas

$$T = p_S e^{-S} p_\phi{}^{-\frac{4}{3}}\,;\; p_T = p_\phi{}^{\frac{4}{3}} e^S\,;$$

$$\overline{\phi} = \phi - \frac{4}{3}\frac{p_S}{p_\phi}\,;\; \overline{p}_\phi = p_\phi\,. \tag{15}$$

permitem colocar a Hamiltoniana (14) em uma forma mais sugestiva:

$$\mathscr{H}_f = \frac{p_T}{a}\,. \tag{16}$$

Finalmente, (4) e (16) compõem a Hamiltonina total clássica do sistema gravitacional acoplado à matéria:

$$\mathscr{H} = -\frac{p_a{}^2}{24a} + \frac{p_T}{a}\,. \tag{17}$$

3 A Equação de Wheeler-DeWitt e as Condições de Contorno

O procedimento de quantização consiste na aplicacção dos operadores $\hat{p}_a \to -i\frac{\partial}{\partial a}$ e $\hat{p}_T \to -i\frac{\partial}{\partial T}$ em (17) de modo a impor a equação de Wheeler-DeWitt, $\hat{\mathscr{H}}\Psi = 0$, sobre a função de onda do Universo. Para o modelo de radiação, esta equação assume a forma

$$-\frac{1}{24}\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2} = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \qquad (18)$$

Ressalta-se que a interpretação da variável $t = -T$ como o tempo e da equação (18) como uma genuína equação de Schrödinger, requer que o correspondente operador

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{1}{24}\frac{\partial^2}{\partial a^2} \qquad (19)$$

seja auto-adjunto. O fator de escala a está restrito ao domínio $a > 0$, tal que a quantização no minisuperespaço diz respeito somente as funções de onda definidas no semi-eixo $(0,\infty)$. Em tais circunstâncias deve-se impor certas condições de contorno sobre as funções de onda permitidas que garantam a auto-adjuntice de (19). Neste modelo isso é efetuado com a escolha do produto interno

$$(\psi,\phi) = \int_0^\infty \psi^*(a)\phi(a)da \ , \qquad (20)$$

com domínio do operador restrito àquelas funções de onda que obdeçam à condição

$$\frac{\partial\Psi(a,t)}{\partial t}|_{a=0} = 0. \qquad (21)$$

Segue então, uma busca por soluções estacionárias da equação (18), ou seja, soluções do tipo

$$\Psi(a,t) = e^{-iEt}\psi(a), \qquad (22)$$

onde E é um parâmetro real. Assim sendo, a equação para $\psi(a)$ torna-se

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + 24E\,\psi = 0. \qquad (23)$$

A solução geral da equação (23) é

$$\psi_E(a) = C_1\, cos\sqrt{24E} + C_2\, sen\sqrt{24E}, \qquad (24)$$

entretanto a condição (21) requer $C_2 = 0$. Tal solução tem norma infinita, mas soluções de norma finita podem ser construídas pela superposição das mesmas. Assim sendo, as soluções gerais da equação de Wheeler-DeWitt (18) resultam de combinações lineares contínuas

$$\Psi(a,t) = \int_0^\infty C(E)\, e^{-iEt}\, \psi_E(a). \qquad (25)$$

Redefinindo $r^2 = 24E$ e $f(r) = \frac{r}{12}C(E) = \frac{r}{12}C(\frac{r^2}{24})$, a escolha de $f(r) = e^{-\gamma r^2}$ (γ é uma constante real positiva), obtém-se:

$$\Psi(a,t) = \int_0^\infty cos(ra)\, e^{-(\gamma+\frac{it}{24})r^2} dr$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-\frac{a^2}{4(\gamma+\frac{it}{24})}}}{\sqrt{\gamma+\frac{it}{24}}} \qquad (26)$$

4 Interpretações

É de fundamental importância o esquema de interpretação a ser adotado, uma vez que o sistema Universo não pode ser analisado pela tradicional interpretação de Copenhagen, que exige um observador externo, algo impossível se a função de onda descreve o Universo como um todo. Como alternativa propõe-se efetuar as predições cosmológicas atavés das interpretações de vários mundos e de de Broglie - Bohm [4].

4.1 Vários Mundos

Na interpretação de vários mundos na medição não existe colapso da função de onda, mas simplesmente a divisão do mundo em muitos mundos, cada um deles tendo seu próprio resultado de medição. O valor esperado do fator de escala pode ser calculado da maneira usual

$$\langle a\rangle_t = \frac{\int_0^\infty \Psi^*(a,t)\,a\,\Psi(a,t)da}{\int_0^\infty \Psi^*(a,t)\Psi(a,t)da}$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{24\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{576\gamma^2+t^2}. \qquad (27)$$

O Universo é não singular e assintoticamente correspondente ao modelo clássico, quando $t \to \infty$ [1]

4.2 De Broglie- Bohm (dBB)

Na interpretação dBB um sistema físico individual compreende uma onda propagando-se no espaço e tempo juntamente com uma partícula que move-se continuamente guiada pela onda. A onda é matematicamente descrita por $\Psi(a,t) = R(a,t)e^{iS(a,t)}$, a qual é uma solução da equação (18). A trajetória $a(t)$ é postulada por:

$$p_a = \frac{\partial S(a,t)}{\partial a}|_{a=a(t)}, \qquad (28)$$

com o movimento dirigido pela equação de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 + V + Q = 0 \qquad (29)$$

onde Q é o chamado potencial quântico:

$$Q = -\frac{1}{24R}\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}. \qquad (30)$$

Neste modelo sem termo de curvatura, o potencial clássico V é nulo.

A amplitude da onda $R(a,t)$ e a fase $S(a,t)$ são identificadas em (26):

$$R(a,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\gamma^2+\frac{t^2}{576})^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{\gamma a^2}{4(\gamma^2+\frac{t^2}{576})}}; \quad (31)$$

$$S(a,t) = \frac{a^2 t}{96(\gamma^2+\frac{t^2}{576})} + tg^{-1}\left(-\frac{t}{24\gamma}\right). \qquad (32)$$

O momento p_a pode ser obtido da equação $\dot{a} = \frac{\partial N\mathscr{H}}{\partial p_a}$, ou seja, $p_a = -12\dot{a}$. Portanto, este resultado inserido em (28) possibilita a determinação da trajetória bohmiana,

$$a(t) = a_0\sqrt{576\gamma^2+t^2} \qquad (33)$$

onde a_0 é uma constante de integração arbitrária positiva. Esta solução, evidentemente não singular, exibe a mesma dependência temporal do valor esperado (27).

O potencial quântico, calculado inserindo (31) em (30), é dado por:

$$Q(a,t) = -\frac{\gamma}{48(576\gamma^2+t^2)^2}[288\gamma a^2 - (576\gamma^2+t^2)]. \qquad (34)$$

[1] No tempo cósmico $a \propto t^{\frac{1}{2}}$, o que é revelado neste modelo em termos do tempo conforme adotado $dt' = a\,dt$, ou seja, $N(t) = a(t)$.

Ao potencial quântico está associada uma força

$$F(a,t) = -\left.\frac{\partial Q(a,t)}{\partial a}\right|_{a=a(t)} \propto \frac{1}{a^3}, \quad (35)$$

a qual possui um caráter repulsivo. Existe uma força repulsiva atuando de modo a evitar a singularidade acerca da região $a = 0$.

5 Conclusões

Rubakov e Lapchinskii [5] efetuaram inicialmente a quantização em minisuperespaço para um modelo cosmológico de Universo preenchido por um fluido de radiação empregando o formalismo de Schutz, sem efetuarem previsões cosmológicas acerca da evolução do fator de escala do Universo. Lemos [6] calculou o valores esperado para o fator de escala, via interpretação de vários mundos, através de propagadores quânticos. Tal modelo foi confirmado por Pinto Neto [7] e colaboradores utilizando a interpretação dBB. Em 2002, Fabris e colaboradores [8] generalizaram os modelos cosmológicos isotrópicos quânticos para diferentes conteúdos materiais. Neste trabalho revisou-se tais procedimentos de quantização com uma construção mais simplificada de pacote de onda, destacando o caráter não singular das soluções cosmológicas nos esquemas de interpretação de vários mundos e dBB.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem à comissão organizadora do IX Encontro Científico de Física Aplicada pela excelência do evento.

Referências

[1] J. J. Halliwell, *Quantum Cosmology and Baby Universes*. (World Scientific, Singapore, 1991).

[2] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).

[3] F. G. Alvarenga, R. G. Furtado e S. V. B. Gonçalves, S. Brazilian Journal of Physics, v. 47, p. 96 (2016)

[4] N. Pinto Neto. Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica. São Paulo, Livraria da Física (2010).

[5] V. G. Lapchinskii e V. A. Rubakov, Theo. Math. Phys. **33**. 1076 (1977).

[6] N. A. Lemos, J. Math. Phys. **37**, 1449 (1996).

[7] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto e M. A. Sagioro-Leal, Phys. Lett. A **241**, 229 (1998).

[8] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, Gen. Rel. Grav. **34**, 651 (2002).