

# Cosmologia Quântica com fluido de Van der Waals

F. G. Alvarenga<sup>1</sup> e S. V. de B. Gonçalves<sup>2</sup>

Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil

E. V. C. Silva<sup>3</sup> e G. A. Monerat<sup>4</sup>

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil

M. G. de C. Batista<sup>5</sup>

Universidade Federal de Roraima, RR, Brasil

G. de O. Neto<sup>6</sup>

Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil

<sup>1</sup>flavio.alvarenga@ufes.br <sup>2</sup>sergio.vitorino@pq.cnpq.br <sup>3</sup>evasquez@uerj.br

<sup>4</sup>germano.monerat@pq.cnpq.br <sup>5</sup>miguel.campos@ufrj.br <sup>6</sup>gilneto@ufjf.br

## Resumo

*Propõe-se a quantização de um modelo cosmológico descrevendo o Universo preenchido com um fluido de radiação e um fluido de Van der Waals como componente para explicar a expansão acelerada do Universo. Através do método espectral de Galerkin, os autoestados da equação de Wheeler-DeWitt são obtidos de modo a possibilitar a aplicação da interpretação de vários mundos da Mecânica Quântica. Para certos valores de parâmetros do modelo os resultados preliminares revelam que em nível quântico o Universo não possui singularidade, o estado de tamanho zero e densidade de energia infinita.*

## 1 Introdução

O Universo é composto prioritariamente pelo setor escuro, 70% de energia escura, 25% de matéria escura, restando apenas 5% na forma de matéria ordinária bariônica [1]. Vários trabalhos têm apresentado o fluido de Van der Waals como candidato à energia escura, seja como componente única ou em cenários em que o mesmo aparece em combinação com outros fluidos [2, 3]. A presença do fluido de Van der Waals interagindo com o campo gravitacional pode simu-

lar por exemplo, um período inflacionário onde a aceleração cósmica cresce exponencialmente e o fluido de Van der Waals comporta-se como um campo tipo *inflaton*; um período acelerado ( $a > 0$ ) mas que decresce tendendo a zero a medida que a densidade de energia do fluido de Van der Waals decai; um período desacelerado que corresponde à era dominada pela matéria com pressão positiva; e o momento atual da expansão acelerada, onde a densidade de energia escura supera a densidade de energia do fluido de Van der Waals. Em [4] tais propostas são mencionadas e um

extenso guia literário apresentado.

Por outro lado, mesmo o modelo cosmológico mais confiável em termos observacionais, o chamado modelo  $\Lambda$ CDM [5, 6] não elimina a singularidade inicial tipo *big bang* do Universo no tempo  $t = 0$ . Neste estado as divergências nas grandezas físicas, por exemplo, temperatura e densidade de energias infinitas impedem qualquer descrição do Universo na denominada época de Planck. Como alternativa, a Cosmologia Quântica [7] surge como uma teoria de condições iniciais que possibilita eliminar a singularidade inicial em função dos efeitos quânticos existentes numa época em que o Universo tinha um tamanho muito menor que o núcleo atômico.

Neste cenário formula-se um modelo cosmológico composto de dois fluidos: o fluido de Van der Waals e um fluido de radiação. Os fluidos têm papéis bem distintos, enquanto o primeiro assumirá o papel de dirigir a expansão acelerada do Universo, o segundo predominante nos primórdios no Universo exercerá o papel de tempo na dinâmica decorrente da equação de Wheeler-DeWitt, ao ser introduzido fenomenologicamente através dos potenciais-velocidades de Schutz [8].

O trabalho está dividido da seguinte maneira: na seção 2 o modelo é estabelecido através da construção da Hamiltoniana do sistema Universo com suas contribuições gravitacional e dos fluidos de Van der Waals e radiação; na seção 3 a equação de Wheeler-DeWitt é resolvida pelo método espectral de Galerkin [9].

## 2 O Modelo

A ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com o termo de contorno é expressa na forma

$$S_g = \int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K, \quad (1)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura, tomado como função da métrica  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas,  $K = h_{ab} K^{ab}$  tal que  $K_{ab}$  é a curvatura extrínseca e  $h_{ab}$  é a métrica induzida sobre a hipersuperfície espacial tridimensional. Acima  $\partial M$  é o contorno da variedade quadridimensional  $M$ .

Para o Universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (com  $c = 1$  e  $k = 1$ ):

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t) \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega \right), \quad (2)$$

em que  $N(t)$  é a função lapso, que corresponde à componente normal da quadri-velocidade, e  $a(t)$  é o fator de escala do Universo.

Seguindo o formalismo canônico, a inserção da métrica na ação (1) permite identificar a Hamiltoniana gravitacional:

$$\mathcal{H}_g = -\frac{p_a^2}{24a} - 6a. \quad (3)$$

A inclusão de conteúdo material na forma de um fluido perfeito de radiação relativístico pode ser efetuada através da representação de sua quadri-velocidade em termos dos potenciais-velocidades  $\varepsilon, \theta$  e  $S$ :

$$U_0 = \frac{1}{\mu} (\dot{\varepsilon} + \theta \dot{S}), \quad (4)$$

cada qual satisfazendo sua própria equação de movimento. Na expressão acima  $\mu$  é a entalpia específica,  $S$  é a entropia específica. As variáveis  $\varepsilon$  e  $\theta$  não têm significado físico claro.

A ação da matéria é especialmente simples:

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} p, \quad (5)$$

onde  $p$  é a pressão, a qual está associada com a densidade de energia através da equação de estado  $p = \frac{1}{3}\rho$ . As equações de Einstein são obtidas pela variação

da ação (5) mais a ação de Einstein-Hilbert em relação ao tensor métrico, enquanto variações relativas aos potenciais-velocidades fornecem as equações Eulerianas da evolução do fluido.

Novamente, o formalismo canônico fornece a Hamiltoniana do fluido:

$$\mathcal{H}_f = \frac{p_\phi^{\frac{4}{3}}}{a} e^S. \quad (6)$$

As transformações canônicas

$$T = p_S e^{-S} p_\phi^{-\frac{4}{3}}; \quad p_T = p_\phi^{\frac{4}{3}} e^S; \\ \bar{\phi} = \phi - \frac{4}{3} \frac{p_S}{p_\phi}; \quad \bar{p}_\phi = p_\phi. \quad (7)$$

permitem colocar a Hamiltoniana (6) em uma forma mais sugestiva:

$$\mathcal{H}_f = \frac{p_T}{a}. \quad (8)$$

Em [10, 11] descrições detalhadas dos passos que conduziram à (3) e (8) são apresentadas.

O fluido de Van der Waals pode agora ser introduzido no modelo a partir de sua equação de estado

$$p_{EE} = \frac{\omega \rho_{EE}}{1 - \beta \rho_{EE}} - \alpha \rho_{EE}^2, \quad (9)$$

sendo  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros livres, enquanto  $\rho_{EE}$  é a densidade de energia do fluido escuro.

A conservação do tensor momento-energia,

$$\dot{\rho}_{EE} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_{EE} + p_{EE}) = 0, \quad (10)$$

possibilita escrever a densidade de energia em termos do fator de escala do Universo  $a$ :

$$\rho_{EE} = -\frac{\alpha}{(\alpha + C_1 a^3)^2}, \quad (11)$$

onde particularizou-se (9) para o caso  $\omega = 0$ .

Inserindo (11) na densidade Lagrangiana de (5), a transformação de Legendre ( $H = \dot{a} p_a - L$ ) indica de forma imediata a Hamiltoniana do fluido escuro de Van der Waals:

$$\mathcal{H}_{vw} = \frac{\alpha a^3}{(\alpha + C_1 a^3)^2}. \quad (12)$$

Finalmente, (3), (8) e (12) compõem a Hamiltoniana total clássica do sistema gravitacional acoplado à matéria no:

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{24} - 6ka^2 + \frac{\alpha a^4}{(\alpha + C_1 a^3)^2} + p_T. \quad (13)$$

Acima adotou-se o tempo conforme  $N = a$ .

### 3 A Equação de Wheeler-DeWitt

O procedimento de quantização consiste na aplicação dos operadores  $\hat{p}_a \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial a}$  e  $\hat{p}_T \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}$  em (13) de modo a impor a equação de Wheeler-DeWitt,  $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ , sobre a função de onda do Universo:

$$-\frac{1}{24} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + V_{eff}(a) = i \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (14)$$

Acima o tempo foi reescalado para  $t = -T$  e um potencial efetivo definido como

$$V_{eff} = 6ka^2 - \frac{\alpha a^4}{(\alpha + C_1 a^3)^2}, \quad (15)$$

e exibido na figura 1.

O método espectral de Galerkin com o pacote SPECTRAL tem sido uma efetiva ferramenta para resolver a equação de Wheeler-DeWitt associada a modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com fluido perfeito [12, 13]. Como resultado da aplicação a este modelo, as figura 2 e 3 mostram respectivamente, os três primeiros autoestados de dez calculados e a densidade de probabilidade no instante  $t = 0$  construída pela

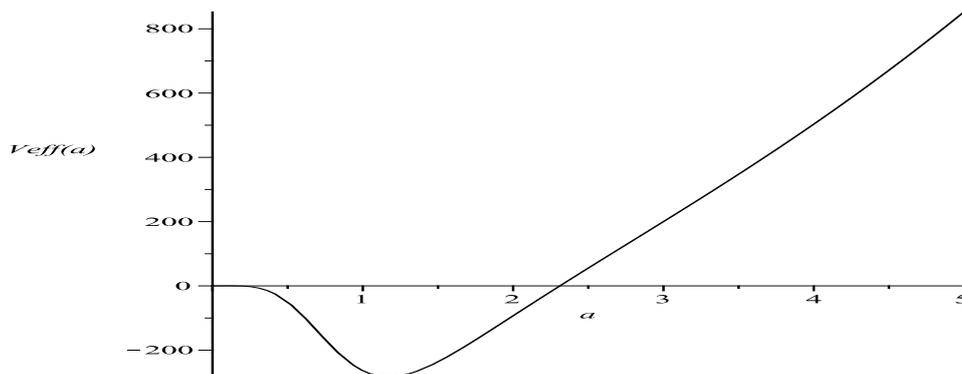


Figura 1: Potencial efetivo para o modelo quântico com fluidos de Van der Waals e radiação.

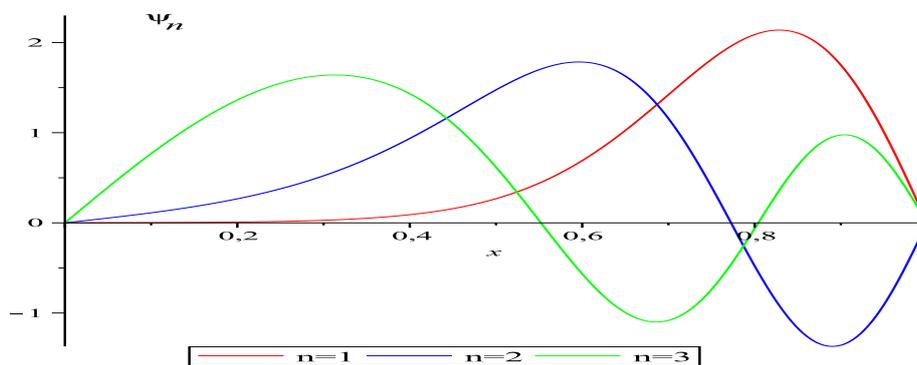


Figura 2: Três primeiros autoestados da função de onda do Universo  $\Psi_n$ .

superposição dos dez primeiros autoestados que geram um pacote de onda que satisfaça a condição de contorno  $\Psi(a = 0, t) = 0$ .

Na interpretação de vários mundos da Mecânica Quântica, o valor esperado do fator de escala pode ser calculado da maneira usual

$$\langle a \rangle_t = \frac{\int_0^\infty \Psi^*(a, t) a \Psi(a, t) da}{\int_0^\infty \Psi^*(a, t) \Psi(a, t) da}, \quad (16)$$

o qual (figura 4), revela um Universo que nasce com um tamanho finito  $a \neq 0$  antes da fase inflacionária como uma consequência do potencial efetivo (15).

## 4 Conclusões

Efetuiu-se no esquema de minisuperespaço a quantização de um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico contendo um

fluido escuro de Van der Waals e um fluido de radiação. As soluções da equação de Wheeler-DeWitt obtidas pelo método espectral de Galerkin revelam um Universo que nasce com um tamanho finito e portanto não singular no instante  $t = 0$ . O passo seguinte na investigação deste modelo será variar os demais parâmetros ( $\omega$  e  $\beta$ ) e tentar validá-lo com dados observacionais, por exemplo, condições para entrada na fase inflacionária.

### Agradecimentos

À comissão organizadora do X ECFA pela excelência do evento.

## Referências

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. (Cambridge Univer-

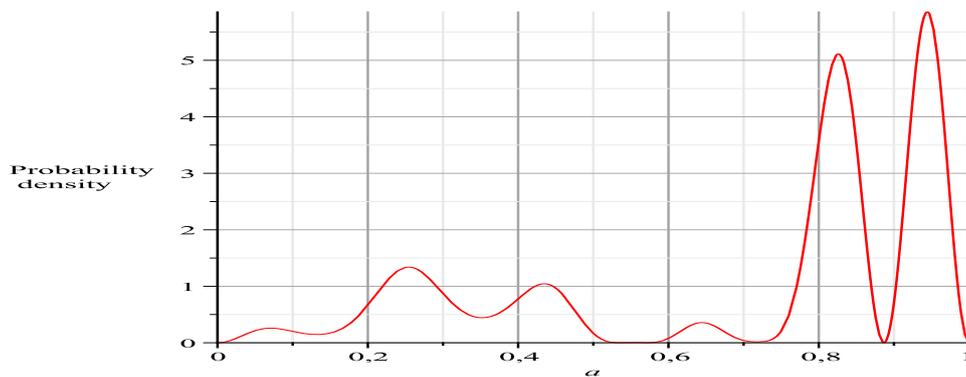


Figura 3: Densidade de probabilidade inicial  $|\Psi(a, t = 0)|^2$ .

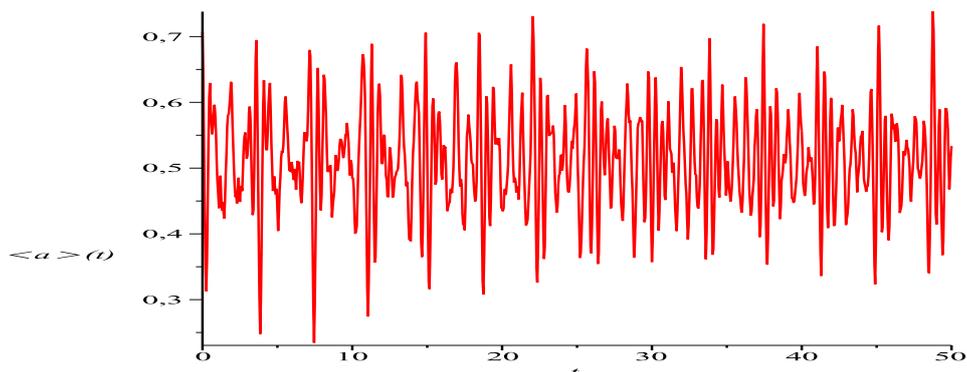


Figura 4: Valor esperado  $\langle a \rangle_t$  do fator de escala do Universo em função do tempo.

- sity Press, Singapore, 2005).
- [2] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni, S. De Martino, M. Falanga, A. Troisi, e M. Bruni. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **JCAP0504:005** (2005).
- [3] G. M. Kremer, *Phys. Rev.* **D68**, 123507 (2003).
- [4] E. Elizalde e M. Khurshudyan, *International Journal of Modern Physics D* **27**, N<sup>o</sup>4, 1850037 (2018).
- [5] P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology*. (Princeton University Press, Singapore, 2019).
- [6] N. Suzuki e et al. *The Astrophysical Journal* **746**, N<sup>o</sup>1, 85 (2012).
- [7] P. Vargas Moniz, *Quantum Cosmology - The Supersymmetric Perspective - vol. 1: Fundamentals*. (Lect. Notes Phys. 803, 1, 2010).
- [8] B. F. Schutz, *Phys. Rev.* **D2**, 2762 (1970); **D4**, 3559 (1971).
- [9] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd ed. Dover, New York (2001)
- [10] F. G. Alvarenga, R. G. Furtado e S. V. B. Gonçalves, *S. Brazilian Journal of Physics*, v. 47, p. 96 (2016).
- [11] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 651 (2002).
- [12] G. Oliveira-Neto, G.A. Monerat, E.V. Corrêa Silva, C. Neves, L.G. Ferreira Filho, *Int. J. Theor. Phys.* **52** 2991 (2013).
- [13] E.V. Corrêa Silva, G.A. Monerat, G. de Oliveira Neto, L.G. Ferreira Filho, *Comput. Phys. Commun.* **185** 380 (2014).