

Acoplamento do Método de Integração Radial com a Técnica de Elementos de Contorno por Interpolação Direta na solução de problemas de Helmholtz

Serafim, L.D.B.¹; Loeffler, C.F.¹; Pinheiro, V. P.^{1*}

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: vitor.pinheiro1987@gmail.com

Resumo

O vigente artigo apresenta o acoplamento entre duas técnicas associadas ao método de elementos de contorno utilizadas na transformação de integrais de domínio em integrais de contorno em problema com operadores diferenciais não auto adjuntos: o método de integração radial (MIR) e a interpolação direta com funções de bases radiais (MECID). O MIR executa sua transformação baseado numa sutil mudança de variáveis. Esta técnica normalmente demanda funções de base radial como recurso auxiliar e assemelha-se ao procedimento da dupla reciprocidade, no qual apenas a variável primal é interpolada. Em relação ao MECID, sua principal característica reside na interpolação do núcleo completo da integral de domínio, incluindo não apenas a variável primal, incluindo a solução fundamental. Neste contexto o MIR é utilizado para substituir o uso da função primitiva que auxilia na transposição da integral de domínio ao contorno na abordagem do MECID. A eficiência desta proposta combinada é medida solucionando a equação de Helmholtz no que tange a determinação do espectro de autovalores. As vantagens esperadas foram confirmadas pelos testes numéricos executados: o custo computacional é substancialmente reduzido e a acurácia do método é melhorada, em especial para malhas mais pobres.

Palavras-Chave: Equação de Helmholtz; Problemas de Autovalor; Método de Elementos de Contorno; Integração Radial; Interpolação Direta;

Abstract

This paper shows the combination of two boundary element techniques whose the principal aim is the transformation of domain integrals into boundary integrals: the radial integration method (RIM) and the direct integration with radial basis method (DIBEM). Rim performs this transformation using a suitably change of variables. When is used in problems with unknown variables, the RIM usually requires the radial basis functions as auxiliary resource, following a similar procedure to the Dual Reciprocity model, in which the primal variable is interpolated. Concerning DIBEM, its main feature is to interpolate the complete kernel of the domain integral, including not only the primal variable but the fundamental solution as well. Here, the RIM is used to substitute the primitive auxiliary interpolation function employed exclusively to transform the domain integral into boundary integral in the DIBEM approach. Evaluation of the efficacy of the proposed composition is done solving the Helmholtz Equation, including the direct frequency response and the eigenvalue problem. The expected advantages are confirmed by numerical tests performed: the computational cost is strongly reduced and the increase in accuracy is meaningful improved, particularly if simpler meshes are used.

Keywords: Helmholtz Equation; Eigenvalue Problems; Boundary Element Method; Radial Integration; Direct Interpolation

1 Introdução

A solução de modelos matemáticos cujo operador diferencial não é auto adjunto permanece como um grande desafio para o avanço do método de elementos de contorno (MEC) [1]. A técnica da Dupla Reciprocidade (MECDR) proposta por volta de 1982 [2] foi o primeiro grande passo para um tratamento mais generalizado destas integrais de domínio. Através de um engenhoso esquema de aproximação parcial do núcleo das integrais via funções de bases radiais [3], a integral do domínio para o contorno fazendo uso de uma função primitiva de interpolação. Embora muito importante, a MECDR apresenta diversas limitações, em especial em problemas dinâmicos.

Na sequência, Gao (2002) propõe o Método da Integração Radial (MIR), que se utiliza de uma elegante transformação de coordenadas para representar a integral de domínio em termo radiais de angulares. Desta forma, o método consegue transferir a integral do domínio para o contorno e na sequência aproximar a função do campo primal por um somatório de funções de bases radiais, tal como é feito na técnica da dupla reciprocidade. Todavia, o custo computacional do MIR é alto, uma vez que sua metodologia envolve o sucessivo cálculo do valor das integrais para cada ponto fonte [8].

Na sequência Loeffler (2015) propõe a Técnica de Interpolação Direta (MECID), que utiliza uma filosofia fundamentada em aproximar todo o núcleo da integral de domínio por funções de bases radiais, em detrimento do MECDR, incluindo a solução fundamental. O MECID vem se mostrando promissor em diversas aplicações como problemas como forças de corpo, advectivos-difusivos, com efeitos inerciais, nos quais a técnica de mostra efetiva. A eficácia do acoplamento entre a integração radial (MIR) e a técnica de interpolação direta (MECID) em problemas de Helmholtz em um problema de autovalor é aqui testada.

2 Formulação Integral

A equação de Helmholtz pode ser considerada como uma simplificação da Equação da Onda Acústica, apresentada em [6], onde busca-se determina a amplitude estacionária u produzida em um sistema por uma excitação variável, cuja frequência ω seja conhecida.

$$\nabla^2 u(\mathbf{X}) = -\frac{\omega^2}{k^2} u(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Na Equação 1, k representa a velocidade de propagação da onda acústica no meio contínuo. Multiplicando-se a Equação 1 por uma função auxiliar u^* , denominada de solução fundamental, integra-se ao longo domínio.

$$LE = \int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = LD \quad (2)$$

Tanto na técnica MECDR quanto no MECID o núcleo não auto adjunto da integral do lado direito na Equação 2 é aproximado via funções de bases radiais [5]. Ambas as técnicas, por simplicidade, utilizam a solução fundamental de Laplace/Poisson [7], que não depende da frequência, o que permite que uma matriz de inércia explícita seja gerada, tal como ocorre em elementos finitos.

O tratamento clássico do MEC, difundido na literatura [1], é dado ao lado direito (LE), e usando o Teorema da Divergência as integrais são levadas ao contorno conforme a equação 3.

$$LE = c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma \quad (3)$$

Neste ponto, o foco é concentrado no lado direito onde a integral de domínio pode ser alvo de aproximações por várias técnicas. Uma explicação sucinta da MIR e do MECID é dada na sequência.

3 Método de Integração Radial - MIR

O MIR baseia-se numa elegante mudança de coordenadas para transformar a integral de domínio alvo em uma integral de contorno [8]. A integral de domínio a ser aproximada, do lado direito (LD) da Equação 2 pode ser escrita em coordenadas polares, conforme na Equação 4 e de acordo com a Figura 1.

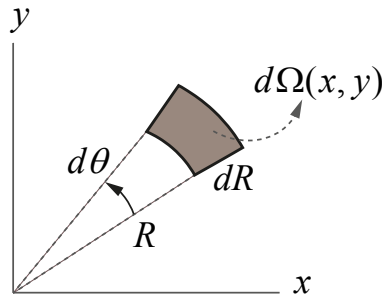


Figura 1: Esquema de Coordenadas Polares

$$LD = \int_{\theta} \int_0^{R^{\Gamma}} u(R, \theta) u^*(\xi; R, \theta) R dR d\theta \quad (4)$$

E por conveniência da sequência do artigo, vamos destacar a integral radial, núcleo da angular, como uma variável isolada, tal como a seguir na equação 5.

$$H_{\Gamma}^{\xi}(\theta) = \int_0^{R^{\Gamma}} u(R, \theta) u^*(\xi; R, \theta) R dR \quad (5)$$

A partícula angular pode ser transferida para o contorno, utilizando um jacobiano, baseado na lógica na Figura 2.

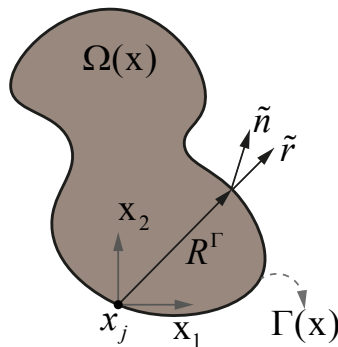


Figura 2: Transformação de Coordenadas

A Figura 2 mostra a colocação de um ponto X^j de interpolação, cuja distância

radial até o contorno é denominada de R^{Γ} . O vetor unitário na direção de R^{Γ} é chamado de \tilde{r} e o vetor normal externo ao contorno de \tilde{n} . A transformação da partícula integradora angular, e automaticamente, a transferência da integral para o contorno se dá através da seguinte transformação da equação 6.

$$d\theta = \frac{\tilde{n} \cdot \tilde{r}}{R^{\Gamma}} d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (6)$$

Todavia, o MIR gera integrais que não são de fácil solução, sendo necessária uma varredura de alto custo computacional, o que torna sua utilização isolada restrita a casos mais simples.

4 Técnica da Interpolação Direta - MECID

Ao utilizar o MECID todo o núcleo da integral de domínio é interpolado utilizando funções de bases radiais tal como na equação 7.

$$u(R, \theta) u^*(\xi; R, \theta) \cong \sum_j \alpha_j^{\xi} F^j(R; \theta) \quad (7)$$

Como na técnica MECID o núcleo aproximado conta com a presença da solução fundamental u^* é estratégico evitar a coincidência entre pontos fonte e pontos campo por conta da singularidade do logaritmo natural na Equação 8.

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r}{2\pi} \quad (8)$$

Para tanto usa-se um procedimento de regularização que pode ser apreciado em detalhes em [9]. Este procedimento basicamente soma e subtrai um termo do lado direito LD, da integral de domínio da Equação 2, resultando na equação 9.

$$LD = \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} [u(X) - u(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega + \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (9)$$

A primeira integral da Equação 9 é pode ser pode ter seu núcleo aproximado por funções de bases radiais e levada ao contorno com o uso de uma função primitiva segundo pela lógica MECID. Quanto a segunda integral, esta pode ser facilmente tratada via tensor de Galerkin [7].

5 Formulação Híbrida

Por simplicidade a formulação acoplada será mostrada sobre a integral de domínio sem regularização, para tornar a exposição mais sintética. O RIM leva a integral de domínio ao contorno geometricamente, e utilizando a notação introduzida pela equação 5, geramos a equação 10:

$$LD = \int_{\Gamma} H_{\Gamma}^{\xi}(\theta) \frac{\tilde{n} \cdot \tilde{r}}{R^{\Gamma}} d\Gamma(X) \quad (10)$$

A aproximação do termo $H_{\Gamma}^{\xi}(\theta)$ por funções de bases radiais é feita com MECID sobre 10, resultando na expressão 11.

$$H_{\Gamma}^{\xi}(\theta) \cong \alpha_j^{\xi} \int_0^{R^{\Gamma}} F^j(R; \theta) R dR \quad (11)$$

Após o processo de discretização, pode-se escrever e aproximação via MECID, dada pela equação 7, com a seguinte sentença matricial, dada pela equação 12.

$$[F][\alpha] = [\Lambda][u] \quad (12)$$

Na Equação 12, $[\Lambda]$ é uma matriz diagonal ligada a solução fundamental u^* . A matriz de coeficientes de ponderação $[\alpha]$ pode ser calculada pela Equação 13.

$$[\alpha] = [F]^{-1} [\Lambda][u] \quad (13)$$

O uso no método híbrido MECID/MIR utiliza o melhor de cada técnica, no tangente a reduzir os custos computacionais no lado do MIR, e dispensar o uso de uma primitiva da função de base radial no MECID, uma vez que as integrais já encontram-se no contorno

no momento em que a aproximação é imposta. Tais modificações tendem a aumentar a precisão do MECID.

O sistema linear final resultante de to tratamento do MEC sobre a Equação de Helmholtz resulta na estrutura da equação 14 a seguir, onde $[M]$ é uma matriz de inércia.

$$[H][u] - [G][q] = \frac{\omega^2}{k^2} [M][u] \quad (14)$$

Para problemas de autovalor, em que o potencial u é prescrito no contorno e q são nulos, pode-se reorganizar o sistema da forma da equação 15 a seguir. As matrizes $[\bar{H}]$ e $[\bar{M}]$ são descritas detalhes em [4].

$$\left\{ [\bar{H}] - \frac{\omega^2}{k^2} [\bar{M}] \right\} [u] = 0 \quad (15)$$

6 Estudo de Caso

Neste estudo de caso, como pode ser observado pela estrutura da equação 15, o foco é determinar numericamente valores da frequências naturais ω que obedecem tal sentença.

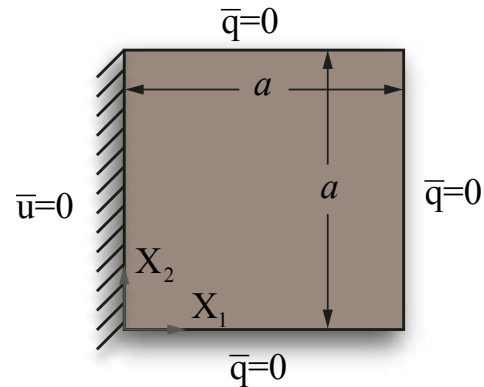


Figura 3: Problema-Teste

Considere para tanto o domínio quadrado, Figura 3 acima, com aresta a unitária e cuja velocidade de propagação k também seja unitária. Os valores analíticos das frequências naturais para o vigente problemas são dadas pela expressão 16 a a seguir.

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (16)$$

A metodologia consiste em testar a robustez na matriz de inércia gerada, analisando a precisão com a qual o método acoplado calcula as frequências naturais. Para tanto o algoritmo são usados elementos de contorno lineares, com nós duplos e com três malhas com diferentes números de pontos no contorno (NP) e nuvens diferentes de pontos internos (IP). Os erros médios relativos a cada frequência natural são calculadas de acordo com a diferença para o resultado analítico, dividido pelo valor exato.

O primeiro resultado trazido pela Figura 4 demonstra os resultados no MECID clássico para três malhas diferentes, com resultados das primeiras vinte frequência naturais.

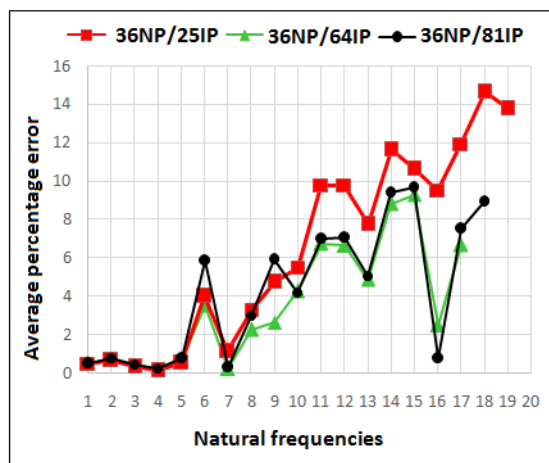


Figura 4: Malha 36 EC- MECID

Seguida da Figura 5 abaixo, que traz os resultados para as mesmas malha utilizando o complemento MECID/MIR.

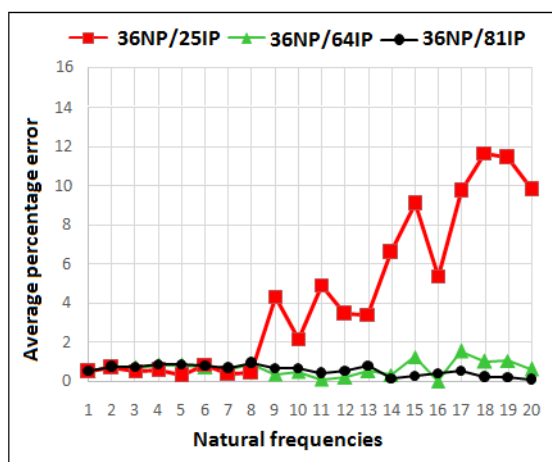


Figura 5: Malha 36 EC- MECID/MIR

As Figuras 4 e 5 trazem um

comparação direta entre o MECID clássico e o MECID/MIR realizada em uma malha pobre, com apenas 36 elementos nós no contorno. O paralelo demonstra que os resultados a partir da quinta frequência são substancialmente menores melhores na configuração MECID/MIR, reduzindo substancialmente os níveis de erros médios. Os ganhos são substancialmente maiores quando se inserem mais pontos internos, como pode se observar nas curvas verde de 64IP e preta com 81 IP.

Na sequência testa-se uma malha de refinamento intermediário intermediária com 84 nós no contorno, para as três configurações crescentes de pontos internos. Os resultados gerados são mostrados nas Figura 6 e 7 a seguir.

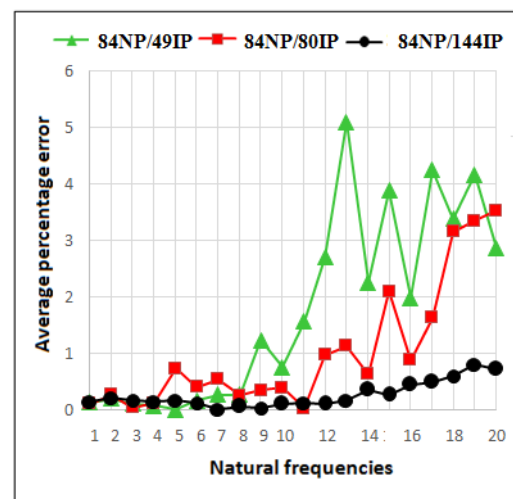


Figura 6: Malha 84 EC- MECID

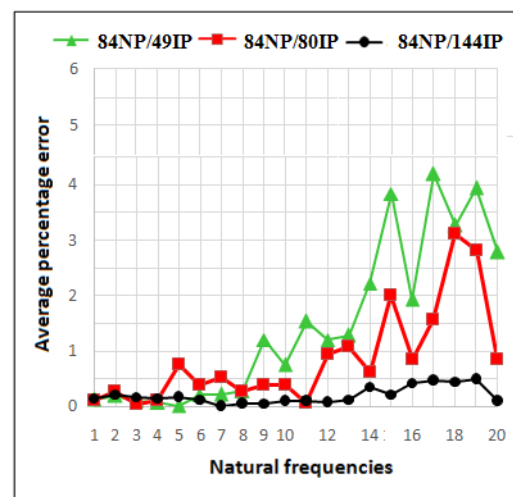


Figura 7: Malha 84 EC- MECID/MIR

É possível perceber que os resulta-

dos gerados pela MECID/MIR ainda permanecem melhores do que o MECID clássico, entretanto o ganho de performance neste caso, com uma malha mais refinada no contorno, mostra-se menor para todo o espectro de frequência testado.

7 Considerações Finais

Os resultados encontrados com o método acoplado MECID/MIR são satisfatórios tal como esperado, apresentando uma melhor precisão principalmente em malhas pobres. Para malhas mais refinadas, com mais nós de contorno ou mesmo uma maior nuvem de pontos internos uma comparação mais apurada deve ser feita, já que os testes aqui indicam para uma tendência não vantajosa de usar o acoplamento neste caso, já que o MECID clássico utilizando a primitivas das funções de bases radiais já apresenta boa eficiência neste contexto.

Referências

- [1] Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques, First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [2] Partridge P. W., Brebbia C.A., Wrobel L.C. The Dual Reciprocity, Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, UK, 1992.
- [3] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modeling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, vol. 50, pp. 97-108.
- [4] Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, Vol. 61, pp. 218-225.
- [5] Buhmann, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations, first ed., Cambridge University Press, New York, USA, 2003.
- [6] Graff, K. Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publ. New York, USA, 1975.
- [7] Brebbia, C. A., Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London, UK, 1980.
- [8] Gao, X., 2002. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization, Engineering Analysis with Boundary Elements, 26, pp. 905-916.
- [9] Loeffler, C. F., Mansur, W. J. (2017). A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, 74, 14-18.