

Abordagem de Torção Generalizada pela Teoria da Elasticidade: Uma Análise Numérica da Torção de Elementos de Seção Retangular Estreita

Pinheiro, V. P.¹; Loeffler, C.F.¹; Andrez, J.R.²; Melo, L.D.V.²; Garcia, W.S.^{2*}; Neves, N.S.³;

1 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

2 Programa de Iniciação Científica em Métodos Numéricos, Universidade Vila Velha, Vila Velha, ES, Brasil.

3 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: william.souza.garcia@gmail.com

Resumo

No contexto da engenharia estrutural observa-se elementos de máquinas e estruturas frequentemente submetidos a esforços torsionais. Nesta linha, há uma grande difusão de programas comerciais baseados em distintas técnicas numéricas, que permitem a solução de problemas complexos. Todavia, destaca-se a importância de uma base teórica consistente, que permita a interpretação adequada de resultados bem como geração de sensibilidade física acerca do fenômeno em análise. No vigente artigo executa-se uma investigação numérica acerca de torção de elementos de seção retangular, com vínculos engastado-livre. As simulações são feitas pelo programa ANSYS Mechanical e apresentam boa concordância com solução analítica de tensões prevista pela Teoria da Elasticidade. Por fim, realiza-se a parametrização dos testes numéricos variando a razão B/H, recaindo-se forma linear nas previsões teóricas para perfis estreitos.

Palavras-Chave: Torção; Teoria da Elasticidade; Simulação Numérica.

Abstract

Keywords: Torsion; Theory of Elasticity; Numerical Simulation

1 Introdução

A mecânica implícita no fenômeno da torção é relevante para uma ampla gama de aplicações de engenharia, tais como: dimensionamento de eixos de máquinas, vigas submetidas a esforços combinados, pilares de estruturas, centro de torção de edificações, entre outras [1].

A teoria matemática transmitida para engenheiros, a nível de graduação, pela mecânica dos sólidos elementar, nem sempre faz-se suficiente para a compreensão e análise de problemas de en-

genharia mais avançados. Neste tocante, um conhecimento mais elaborado acerca de matérias como a mecânica do contínuo [2], teoria da elasticidade [3] e também certa fundamentação matemática em métodos numéricos se faz necessária [4].

No contexto atual da engenharia, fundamentado pela indústria 4.0, o uso de programas comerciais e algoritmos numéricos para a solução de problemas por parte dos engenheiros tem natureza cotidiana [8]. Com isto posto, o vigente artigo visa, delinear a importância do uso

acoplado entre ferramentas computacionais e base físico-matemática na geração e interpretação assertiva de resultados, usando para tanto um problema elástico de torção generalizado. O vigente artigo pretende analisar numericamente a teoria simplificada de torção de eixos retangulares estreitos e confirmar os comportamentos previstos pela Teoria da Elasticidade.

2 Torção Generalizada

O procedimento matemático para tratamento da torção de eixos com seção transversal arbitrária foi contribuição de St. Venant [7]. Nesta proposta utiliza-se a ideia de uma função de empenamento [6], que ocorre apenas na torção de eixos não-circulares, tal como o elemento seção retangular de interesse na figura 2 a seguir.

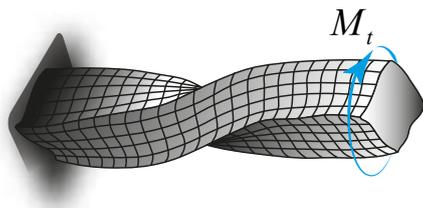


Figura 1: Elemento de Seção Retangular sob Torção

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

A equação 1 pode ser combinada às equações elásticas de equilíbrio estático [7], sentenças constitutivas e a função de empenamento, dando origem ao seguinte modelo geral.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (2)$$

A equação 2 pode representar a torção de um eixo de seção arbitrária através de uma equação de Poisson, onde G representa o módulo de elasticidade transversal do material e θ contabiliza o ângulo de torção por unidade de comprimento. A condição de contorno impõe a nulidade da função-tensão no contorno da seção.

3 Analogia de Membrana

Todavia, a elegância e generalidade da equação 2 esbarra em certas dificuldades matemáticas quando pretende-se solicitar uma seção de geometria transversal mais complicada por torção [6]. Para contornar tais dificuldade utiliza-se a denominada analogia de membrana, proposta por Prandtl [5], e ilustrada na figura 3.

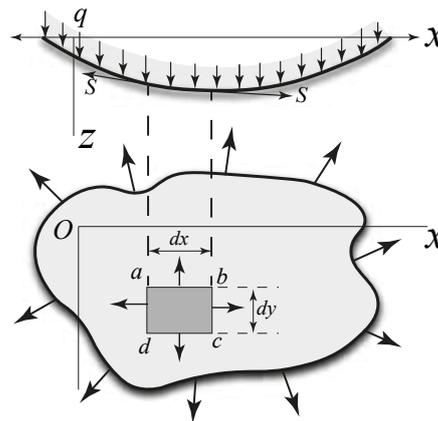


Figura 2: Membrana de L.Prandtl

A lógica de Prandtl fundamenta-se em solucionar o problema correlato de uma membrana cujos bordos são tracionados com uma tensão S e submetida a uma carga transversal distribuída q [6]. Tais condições podem ser matematizadas na equação diferencial abaixo.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (3)$$

Na equação 3, a variável z representa o deslocamento de cada ponto da membrana devido a aplicação de carga, que por sua vez equivale ao valor da função-tensão ϕ em cada ponto do eixo torsionado.

4 Predições Analíticas

Considere um eixo retangular cotas de altura e base igual a $2a$ e $2b$, respectivamente, e no sistema de coordenadas cartesianas posicionado de acordo com a figura 4.

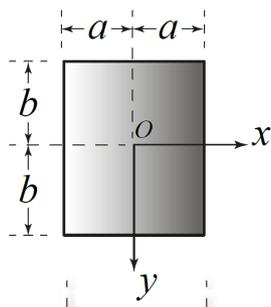


Figura 3: Seção Transversal e Sistema de Coordenadas

A proposição de uma solução torção de eixos retangulares pode ser feita em série conforme a equação 4 [5].

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2a} Y_n \quad (4)$$

Aplicando-se a analogia de membrana, resulta, após alguns algebrismos na seguinte resposta em termos de função-tensão.

$$\phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \xi(x, y)$$

$$\xi(x, y) = \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (5)$$

A diferenciação da equação 5 em relação a y resulta na seguinte expressão para a uma das distribuições de cisalhamento.

$$\tau_{zy} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \xi(x, y) \quad (6)$$

O ângulo de torção θ presente na equação 6 pode ser calculado mediante a expressão 7, onde k pode ser encontrado na literatura em função da razão b/a .

$$\theta = \frac{kT}{G(2a)^3 (2b)} \quad (7)$$

Todavia, em problema práticos de engenharia, por hora, estamos interessados em analisar situações físicas que recaem por similaridade sobre a denominada teoria de torção de seções estreitas, vide [5] e

[7]. Para tanto considere a representação de uma seção retangular estreita a seguir na figura 4.

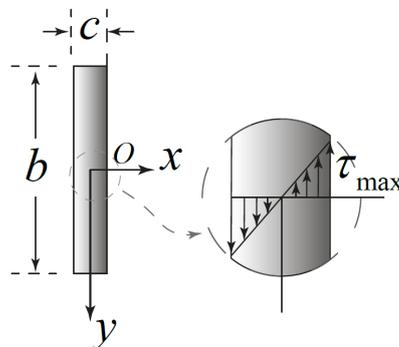


Figura 4: Seção Estreita e sua Distribuição de Tensão

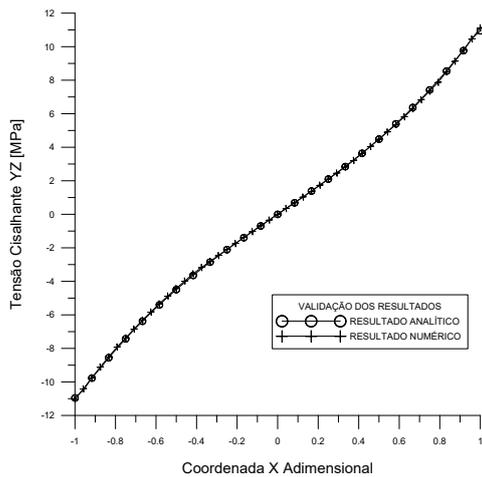
A teoria preconiza que é possível gerar uma solução bem mais simples para perfis estreitos através da analogia de membrana, recaindo na solução de um cabo parabólico [5]. O perfil de tensão em uma linha horizontal na simetria da seção simplifica-se da equação 6 para o perfil linear dado abaixo, na medida que a razão b/a cresce.

$$\tau_{xy} = 2G\theta x \quad (8)$$

5 Estudo de Caso

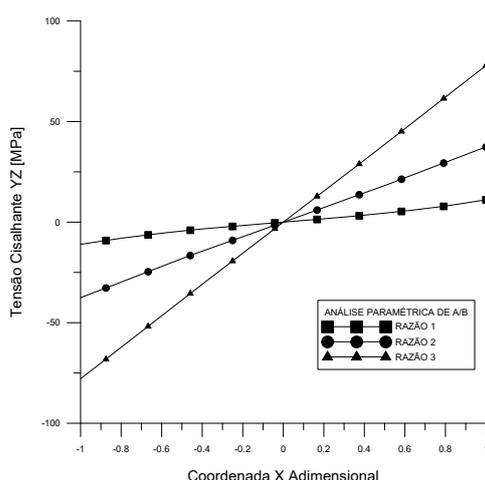
Neste protejo pretende-se investigar numericamente a aproximação proposta pela teoria de perfis estreitos, afim de constatar se a solução via ANSYS Mechanical, utilizando método de elemento finitos, ilustra de forma verossímil as predições analíticas.

A validação das simulações por elementos finitos consiste na análise gráfica das distribuições de tensões, comparando os resultados gerados pelo programa com a solução analítica de referência.



Uma análise da figura 5 permite constatar que as curva numérica e analítica apresentam ótima aderência. A tensão τ_{zy} em questão apresenta seus pontos de máximo em $x = \pm a$. Uma vez validado, pode-se confiar no modelo numérico para geração de resultados.

Na sequência efetua-se uma análise paramétrica do perfil de tensão τ_{zy} em relação a razão b/a também na linha $y = 0$. Os incrementos na razão geométrica foram diminutos para exibir com mais riqueza de detalhes a mudança no formato do perfil de tensão.



Observa-se na figura 5 que a medida que o perfil do elemento submetido a torção torna-se estreito, a distribuição de tensão τ_{zy} , antes dada pela expressão 6, aproxima-se do comportamento da 8, da teoria simplificada.

6 Considerações Finais

A priori pode-se destacar que a linearidade do modelo diferencial que descreve a torção de elementos retangulares em regime elástico facilita na geração de resultados numéricos muito precisos, e que tenham boa aderência com as previsões analíticas.

A análise paramétrica mostrou-se bem sucedida em mostrar a degeneração da solução analítica geral para o perfil linear uma vez que a seção transversal torna-se estreita. Entretanto, o ponto de extração de dados é favorável a um bom resultado, o que leva a uma expectativa de futuras análise mais próximas da extremidade do perfil no intuito de identificar possíveis limitações da teoria simplificada.

Referências

- [1] SHIGLEY, J.E. Shigley's mechanical engineering design. McGraw-Hill Education, 2011.
- [2] REDDY, J.N. Principles of Continuum Mechanics: A Study of Conservation Principles with Applications. Cambridge University Press, 2010.
- [3] LOVE, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press, 2013.
- [4] HUGHES, T.J.R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Courier Corporation, 2012.
- [5] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. Teoria da Elasticidade, Rio de Janeiro Guanabara Dois, 1980.
- [6] DEN HARTOG, J. P. Advanced Strength of Materials, 1952.
- [7] SOKOLNIKOFF, I.S. Mathematical theory of elasticity. McGraw-Hill Book company, 1956.

- [8] REDDY, J.N. An Introduction to the Finite Element Method. New York, 1993.
- [9] GURTIN, M.E. The Linear Theory of Elasticity: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. Springer, Berlin, Heidelberg, 1973.