

# Campo elétrico do capacitor de placas retangulares finito

Helder, H. Ch. S.<sup>1</sup>; Kariston, A. P.<sup>1</sup>; Lucas, N.<sup>1</sup>; Kesley, S.<sup>1</sup>; Eloi Silva<sup>2</sup>

1 Núcleo Básico de Engenharia, Faculdade Centro Leste, Rodovia ES 010, km 6, Manginhos – Serra - ES

2 Departamento de Química, Universidade Federal do Espírito Santo, Av. Fernando Ferrari 514, Goiabeiras - Vitória – ES - 29075-910

## Resumo

Este trabalho apresenta expressões exatas para as componentes dos campos elétricos de um capacitor de placas retangulares finitas, para qualquer ponto dentro e fora das placas, os resultados computacionais utilizando o programa *Mathematica* para os campos elétricos mostram a influência dos efeitos de borda sobre a distribuição do campo elétrico.

Keywords (Palavras chaves): campo elétrico, dipolo elétrico, capacitor, efeito de borda.

## 1. Introdução

O capacitor de placas planas infinitas é um tema muito conhecido dos livros de física básica [1], no qual o campo elétrico é constante dentro das placa  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$  e zero fora delas, sendo  $\sigma$  a densidade superficial de cargas nas placas. Pode ser provado, que o mesmo campo seja obtido para um capacitor de placas circulares com o raio da placa  $R \gg z$ , onde  $z$  é a distância de separação entre as placas. No entanto, o caso de um capacitor onde a distância entre as placas é da mesma ordem de grandeza que as dimensões das placas tem resistido ao cálculo analítico exato, conhecendo-se apenas métodos numéricos baseados em diferenças finitas a fim de resolver a equação de Poisson correspondente [2,3]. Apresentamos os resultados computacionais de um cálculo analítico exato dos campos elétricos de um capacitor de placas planas retangulares cujas dimensões são comparáveis com a distância de separação entre as placas, um resultado que não era conhecido na literatura. Nossos cálculos estão baseados em princípios básicos do campo elétrico de um elemento diferencial de carga e nas técnicas de integração. Na seção 2, descrevemos o procedimento do cálculo do campo elétrico e na seção 3 apresentamos os resultados computacionais dos mesmos. Na seção 4 discutimos os resultados e concluímos com alguns comentários.

## 2. Campo elétrico de um capacitor de placas retangulares

A Figura 1 ilustra o método do cálculo do campo elétrico num ponto arbitrário  $P(x,y,z)$ . Escolhemos elementos de superfície nas placas  $dS' = dx'dy'$  nas quais está distribuída cargas elementares  $dQ' = \sigma dS'$ . Ambas as cargas se encontram na mesma posição  $(x',y')$  no sistema de coordenadas associadas as placas. Com isto em mente, escrevemos as componentes dos campos elétricos:

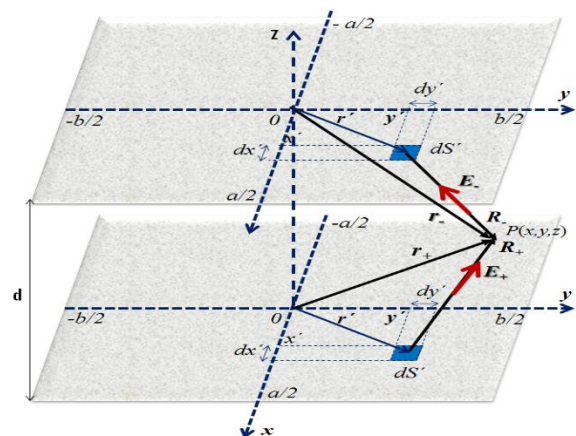


Figura 1: Duas placas condutoras com dimensões  $a \times b$  e densidade de cargas  $\sigma$  constante, a placa inferior contendo cargas positivas e a superior negativas.

$$E_x = k\sigma \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (d-z)^2)^{3/2}} \right) (x-x') dx' \quad (1)$$

$$E_y = k\sigma \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (d-z)^2)^{3/2}} \right) (y-y') dx' \quad (2)$$

$$E_z = k\sigma \int_{-b/2}^{b/2} dy' \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{z}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{d-z}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (d-z)^2)^{3/2}} \right) dx' \quad (3)$$

onde o fator  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ .

### 3. Resultados computacionais

O cálculo exato das integrais (1) – (3) foram obtidas com ajuda do *Mathematica 9.0* [4,5], e as expressões são muito longas para serem escritas aqui. Em vez disso, são mostrados os gráficos para  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $d = 1$ , e os campos foram calculados como  $E_x/(k\sigma)$ ,  $E_y/(k\sigma)$  e  $E_z/(k\sigma)$ .

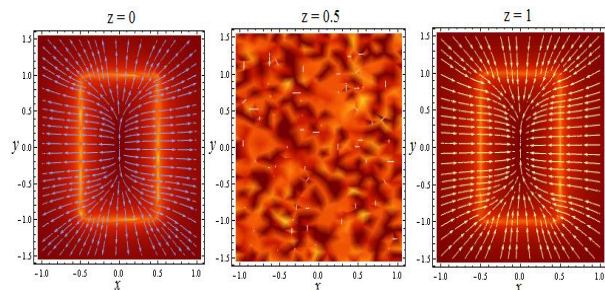


Figura 2: Gráficos das componentes  $E_x$  vs  $E_y$  do campo elétrico para  $z = 0, 0.5$  e  $1$  respectivamente.

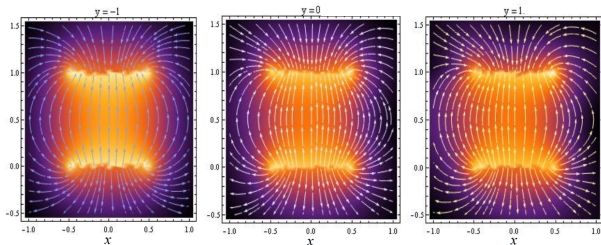


Figura 3: Gráficos das componentes  $E_x$  vs  $E_z$  do campo elétrico para  $y = -1, 0$  e  $1$  respectivamente.

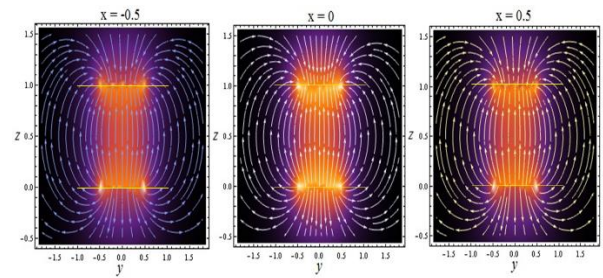


Figura 4: Gráficos das componentes  $E_y$  vs  $E_z$  do campo elétrico para  $x = -0.5, 0$  e  $0.5$  respectivamente.

### 4. Análise dos resultados

A Figura 2 mostra que as componentes do campo no plano XY ( $E_x = -\partial\phi/\partial x$ ,  $E_y = -\partial\phi/\partial y$ ) são diferentes de zero em todos os pontos do espaço exceto no plano intermédio  $z = 0.5$ . Isto é facilmente compreensível dado que todos os pontos que formam o plano equipotencial  $\phi(x,y,0.5) = 0$ . Deste modo, observam-se os efeitos de borda do campo elétrico nos planos  $y = -1, 0, 1$ , onde a componente x do campo começa a se manifestar nas bordas das placas e dentro das placas o campo é essencialmente ao longo do eixo z. Na Figura 4, mostra-se as componentes  $E_y$  vs  $E_z$ . Outra vez os efeitos de borda são mais evidentes quando olhados nos planos  $x = -0.5, 0, 0.5$ .

### 5. Agradecimentos

Agradecemos a FAPES pelo apoio financeiro e ao CCE-UFES por nos permitir usar seus recursos computacionais para desenvolver esta pesquisa e ao Núcleo Básico da UCL por toda ajuda fornecida.

### 6. Referências

- [1] TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Physic for Scientists and Engineers*. W. H. Freeman and Company, 2008.
- [2] PARKER, G. W. *Computers in Physics*, v.5, p. 534-540, 1991.
- [3] BUENO-BARRACHINA, J. M; CAÑAS-PAÑUELAS, C. S; CATALAN-IZQUIERDO, S, *Journal of Energy and Power Engineering* v5, p. 373-378, 2011.
- [4] Disponível em < [www.Wolfram.com](http://www.Wolfram.com) > acesso em: 02 de Março de 2014.
- [5] TROTT, M, *THE MATHEMATICA GUIDEBOOK for Symbolics*, Springer, 2006.