

# Análise da Imposição de Diferentes Condições de Apoio na Solução de Problemas de Vigas através de Simulações Bidimensionais com o Método dos Elementos de Contorno

Freitas, A. B.<sup>1</sup>; Loeffler Neto, C. F.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

\* e-mail: carlosloeffler@bol.com

---

## Resumo

As vigas estão entre os principais elementos estruturais utilizados na engenharia, sendo amplamente utilizadas na construção civil e na composição do arcabouço de máquinas e equipamentos mecânicos. No entanto, o modelo matemático mais utilizado para descrição de seu comportamento mecânico se baseia numa teoria unidimensional. Deste modo, muitas incompatibilidades surgem no projeto devido à prescrição de condições de contorno que se distanciam das situações reais e de outros aspectos geométricos não cobertos pelas simplificações do modelo. Nesse trabalho, uma análise é feita a fim de verificar quantitativamente os efeitos das simplificações da teoria unidimensional, aproveitando as potencialidades de um modelo discreto bidimensional do Método dos Elementos de Contorno(MEC) [1]. Particularmente são examinados os efeitos das prescrições das condições de contorno, que usualmente são gravemente simplificadas. Exemplos de vigas com carregamentos de diversas formas e diferentes condições de contorno são simulados numericamente. Foram usadas malhas com elementos de contorno lineares e alto grau de refinamento, cujos resultados tiveram boa concordância com as soluções obtidas pela teoria matemática da elasticidade(TME), especialmente na solução do campo de tensões.

## Abstract

The beams are among the main structural elements used in engineering and are widely used in buildings and the compositions of machinery framework and mechanical equipment. However, the most used mathematical model for the description of the mechanical behavior is based on a one-dimensional theory. Thus, many incompatibilities arise in the project due to the prescription of boundary conditions that are distant from the real situation and other geometric aspects not covered because of the simplifications of the model. In this work, an analysis is made in order to quantitatively evaluate the effects of the one-dimensional theory simplification, taking advantage of the potentials from a two-dimensional discrete model of the Boundary Element Method (BEM). The effects of the boundary conditions, which are usually severely simplified, are particularly examined. Examples of beams with loads of different shapes and different boundary conditions are simulated numerically. Meshes with linear boundary elements and a high degree refinement are used, in which the results showed good agreement with the solutions obtained by the mathematical theory of elasticity (MTE), especially in the solution of the stress field.

Palavras chave: Método dos Elementos de Contorno, Análise de Vigas, Problemas de Elasticidade.

---

## 1. Objetivo

Este trabalho aproveita as potencialidades de um modelo discreto bidimensional do MEC [1] para avaliar as limitações resultantes das aproximações existentes na teoria unidimensional de vigas, dada pela teoria da resistência dos materiais (TRM), particularmente

examinando os efeitos das prescrições das condições de contorno, que usualmente são gravemente simplificadas. Exemplos de vigas com carregamentos de diversas formas e diferentes condições de contorno são examinados através da simulação numérica. As simulações do MEC usaram malhas lineares refinadas, cujos resultados tiveram boa concordância com as

soluções obtidas pela TME, especialmente na solução do campo de tensões.

## 2. Análise de Simulação

O exemplo escolhido examina uma viga bi apoiada com carregamento constante, conforme mostrado no quadro (a) da figura 1. Para o campo de tensões normais, este problema possui solução analítica pela TME [1], desde que seja aplicado um perfil de tensões cisalhantes parabólico, conforme mostrado no quadro (b). Nesta condição, nota-se uma pequena diferença entre as tensões horizontais dadas pela TRM e a TME. Mas para os deslocamentos, há grande diferença, pois a TRM despreza qualquer distribuição de tensões cisalhantes nas faces, pelo fato da viga ser considerada esbelta, e despreza também a compressão adicional das fibras, valor este mais intenso quanto mais próximo da aresta superior. Havendo a prescrição do perfil parabólico de tensões cisalhantes, a TME fornece resultados com boa concordância com o MEC, conforme mostra a Fig. (2), tanto nas tensões quanto nos deslocamentos.

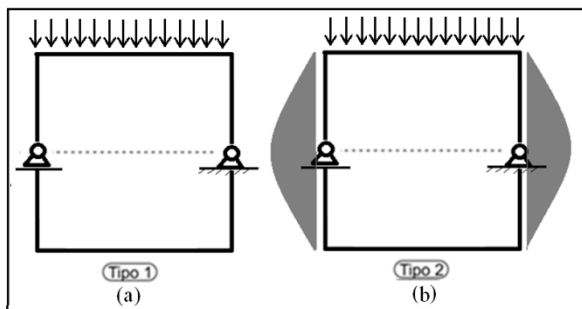


Figura 1: Quadro (a) modelo no qual as arestas verticais sem tensões cisalhantes atuantes; (b) modelo em que atuam tensões cisalhantes nas arestas verticais

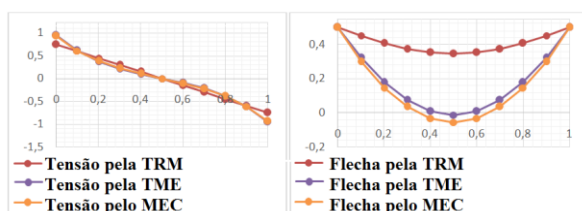


Figura 2: Resultados comparativos para a viga com tensões cisalhantes impostas nas arestas verticais

No caso de não se prescrever nenhuma distribuição de tensões cisalhantes equilibrantes e os pontos de apoio serem tomados como pontuais, como exposto no quadro (a), as diferenças se amplificam. A TME não possui recursos para representar precisamente condições de deslocamento nulo contínuo nas arestas verticais [2]. Assim, diferentes curvas de deslocamento aparecem entre o MEC e a TME, conforme mostrado na Fig. (3).

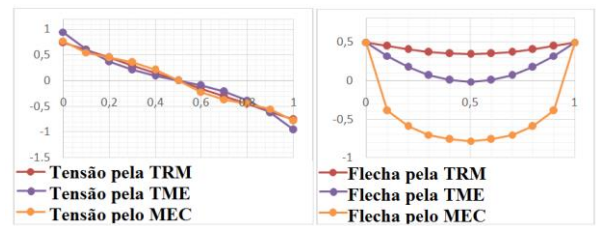


Figura 3: Resultados comparativos para a viga sem tensões cisalhantes impostas nas arestas verticais

Um segundo exemplo analisa outra viga sob carregamento constante, porém engastada em uma extremidade e livre na outra, conforme mostra a figura 4(b). A TME possui uma solução analítica para o caso mostrada na figura 4(a), tendo as tensões verticais e horizontais prescritas na face engastada. Nesta condição, observa-se concentrações de tensões nos apoios prescritos para o MEC, o que configura uma diferença entre as tensões normais dadas pela TRM e a TME, conforme figura 5. Além disso, para os deslocamentos também há uma grande diferença, pois não está prescrito uma condição de equilíbrio de momentos, apenas se prescreveu esforços obtidos na TME.

Para o caso de se engastar completamente a face fixa, as concentrações de tensões migram para as laterais, graças ao excesso de rigidez somado por efeitos advindos do coeficiente de Poisson, conforme mostra a figura 6. Analogamente ao exemplo anterior, a TME não possui recursos para representar precisamente condições de deslocamento nulo contínuo nas arestas verticais [2], enquanto que para a TRM isso nem vem a ser considerado. O resultado é um perfil de deslocamentos para o MEC intermediário ao que se observa pela TRM e TME.

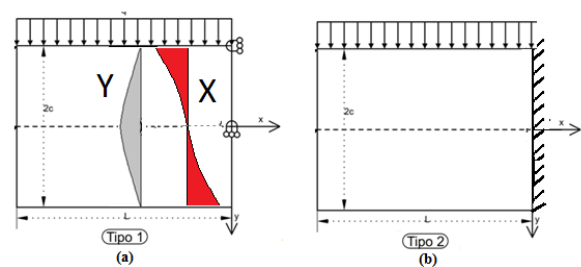


Figura 4: Quadro (a) modelo com pequenos apoios e tensões normais e cisalhantes prescritas no engaste; (b) modelo em que face engastada foi completamente engastada.

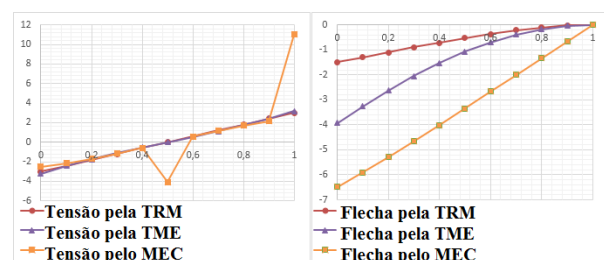


Figura 5: Resultados comparativos para a viga com tensões impostas na aresta vertical.

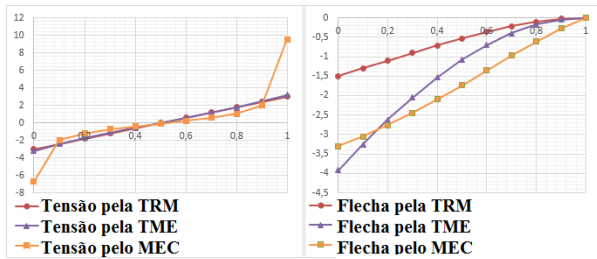


Figura 6: Resultados comparativos para a viga engastada em sua extremidade.

### 3. Conclusões

Nesta pesquisa vários exemplos, com cargas concentradas e distribuídas com perfis lineares e parabólicos foram examinados e as conclusões foram similares: há significativa discrepância nos valores de deslocamento tanto na TRM quanto na TME, mas

principalmente na primeira, que subestima os valores calculados. Também há apreciáveis diferenças nos valores das tensões normais, particularmente quando o carregamento aplicado é mais complexo.

### 4. Referências

- [1] BREBBIA, C. A. "The boundary element method for engineers". London: Pentech, 1984.
- [2] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. "Theory of elasticity". 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.