

Paradoxo dos Gêmeos: Uma abordagem da dilatação temporal segundo o Efeito Doppler com uma álgebra do Ensino Médio

Luiz Henrique Gobbi

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brazil

gobbigobbi3@gmail.com

Flávio Gimenes Alvarenga

Departamento de Ciências Naturais, Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, ES, Brazil

f.g.alvarenga@gmail.com

Resumo

As consequências dos postulados de Einstein, tais como a dilatação do tempo, a contração do espaço e a relatividade da simultaneidade levam a algumas situações aparentemente absurdas. A estas situações dar-se-á o nome de "Paradoxo". Neste presente artigo, tem-se um resumo do mais famoso Paradoxo da Relatividade Restrita - o Paradoxo dos Gêmeos. Faz-se aqui uma abordagem do mesmo, buscando apresentar uma explicação simplificada, baseada no efeito Doppler, voltada para estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Paradoxo dos Gêmeos, Cinemática Relativística, Coeficiente de Lorentz, Contração Espacial.

The consequences of Einstein's postulates, such as time dilation, contraction of space and the relativity of simultaneity lead to some seemingly absurd situations. To these situations will give the name of "Paradox". In this article, there is a summary of the most famous paradox of relativity - the Twin Paradox. It does up here an approach of it, seeking to present a simplified explanation, based on the Doppler effect, aimed at high school students.

Keywords: Twin Paradox, Relativistic kinematics, Coefficient of Lorentz, Space Contraction.

1 Introdução

PAUL LANGEVIN (1872 - 1946).

O paradoxo dos gêmeos está ligado ao fenômeno da dilatação dos tempos e foi proposto, em 1911, pelo físico francês

Basicamente a ideia é a de 02 irmãos gêmeos, 'A' e 'B', em que um deles embarca em sua espaçonave e viaja a uma

velocidade próxima à da luz.

No caso iremos adotar a convenção de que quem viaja é o irmão 'B', a uma velocidade de 80% da luz.

A esta velocidade, o fator de dilatação de Lorentz é de

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,80.c)^2}{c^2}}} = \frac{5}{3} .$$

Vamos supor que o relógio do irmão que permaneceu na Terra (Δt) marque que a viagem de ida e volta do irmão que embarcou na nave durou 10 anos.

Assim o intervalo de tempo medido pelo relógio próprio do 'B' será dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10}{\frac{5}{3}} = 6 \text{ anos}.$$

Portanto, quando os gêmeos se reencontrarem, o irmão 'B' (que viajou) estará 4 anos mais novo que o gêmeo 'A' (que ficou na Terra).

Este efeito é conhecido como *Dilatação do Tempo*. Trata-se de um fenômeno puramente relativístico e iremos explicá-lo através do *Efeito Doppler*.

Portanto não estamos abordando ainda o *Paradoxo dos Gêmeos*, ao qual citaremos mais adiante.

2 O efeito Doppler

Vamos supor que cada irmão envia (automaticamente e através de seu relógio próprio) sinais luminosos, para o outro irmão, em intervalos, no seu tempo próprio, de um ano.

Durante a sua viagem de ida, o relógio próprio do irmão 'B' emite 03 pulsos de luz, que foram enviados a 'A'.

"Instantaneamente", ele retorna e na volta acontece o mesmo, ou seja, o seu

relógio novamente emite mais 3 pulsos de luz (perceba que o 6º pulso é dado já no reencontro com seu irmão 'A').

2.1 O efeito Doppler durante a viagem de ida

Vamos analisar inicialmente somente a viagem de ida do irmão 'B'. Não há divergência quanto aos sinais: 'B' envia 03 e 'A' recebe os 03 sinais.

No entanto, quando a fonte se afasta do observador (no caso de 'B' estar partindo), a relação entre as frequências dos pulsos, dadas pelo *Efeito Doppler Relativístico* [1], é dada por

$$f_A = f_B \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} ,$$

onde:

f_A = frequência recebida pelo A.

f_B = frequência emitida pelo B.

Assim, teremos que

$$f_A = f_B \cdot \sqrt{\frac{c - 0,8c}{c + 0,8c}} = \frac{f_B}{3} .$$

Isso indica que a relação dos pulsos anuais próprios, entre 'B' e 'A', é de 3:1; ou seja, durante a viagem de ida, a frequência de 03 pulsos anuais do relógio de 'B' corresponde a 01 pulso anual do relógio de 'A'.

Isso corresponde a dizer que cada pulso anual do relógio de 'B' corresponde a 03 pulsos anuais do relógio de 'A'.

Vamos representar esta situação na figura 1, onde vemos que a linha espaço-tempo 'B' é uma reta inclinada (em relação ao eixo ct), o que indicaria à sua

velocidade $0,8c$ [2]. Marcamos nesta linha os 03 sinais anuais emitidos pelo seu relógio próprio.

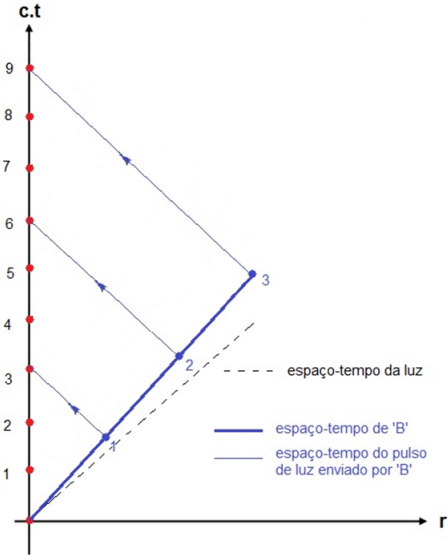


Figura 1: Diagrama espaço x tempo do irmão 'B' na sua viagem de ida

Observe na figura que 'A' vê 'B' afastar-se por 09 anos, quando que, para o próprio 'B', foram 03 anos decorridos.

2.2 O efeito Doppler durante a viagem de volta

Agora vamos analisar somente a viagem de volta do irmão 'B'.

Também não há divergência quanto aos sinais: 'B' envia 03 e 'A' recebe os 03 sinais.

Agora, no entanto, quando a fonte se aproxima do observador, a relação entre as frequências dos pulsos é dada por

$$f_A = f_B \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 3 \cdot f_B \quad .$$

Assim a situação é ao contrário. A relação dos pulsos anuais próprios é de

1:3, ou seja, durante a viagem de volta, a frequência de 01 pulso anual do relógio de 'B' corresponde a 03 pulsos anuais do relógio de 'A'.

Isso corresponde a dizer que cada 3 pulsos anuais do relógio de 'B' corresponde a 01 pulso anual do relógio de 'A'.

A representação da viagem de volta está na figura 2, onde vemos que 'B' muda de referencial, cuja linha espaço-tempo é uma reta inclinada negativamente, correspondendo à sua velocidade $-0,8c$ [2].

Também marcamos nesta linha os 03 sinais anuais emitidos pelo seu relógio próprio.

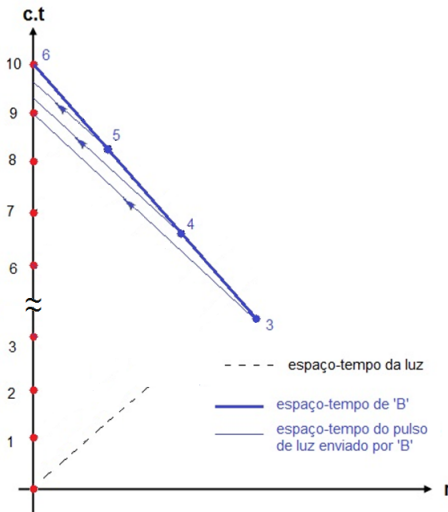


Figura 2: Diagrama espaço x tempo do irmão 'B' na sua viagem de volta

Note que, agora, que o irmão 'A' vê 'B' voltar em 01 ano, quando que, para o próprio 'B', foram novamente 03 anos. A dilatação aparece quando se percebe que 'A' vê 'B' afastar-se por 09 anos (visto que cada pulso de luz anual do relógio de 'B' leva 03 pulsos de luz anuais no relógio de 'A') e retornar em 01 ano (visto que os 03 pulsos de luz anuais de 'B' ocorrem em 01 pulso de luz anual de 'A'), embora

'B' tenha, no seu relógio próprio, se afastado por 03 anos e retornado em 03 anos.

Pode-se entender que, no tempo próprio de 'B', passaram-se 06 anos, ou seja, o relógio de 'B' diz que ele esteve fora por 06 anos, enquanto o do 'A' diz que 10 anos foram decorridos.

Ignorando o efeito das acelerações, podemos dizer que o 'A' sempre está num referencial inercial, enquanto que 'B' está em 02 referenciais inerciais diferentes, um partindo (+ 0,8c) e outro retornando (-0,8c).

Na figura 3, vemos a situação completa com os 02 irmãos gêmeos se reencontrando no 6º pulso anual de 'B' (correspondente ao 10º pulso anual de 'A').

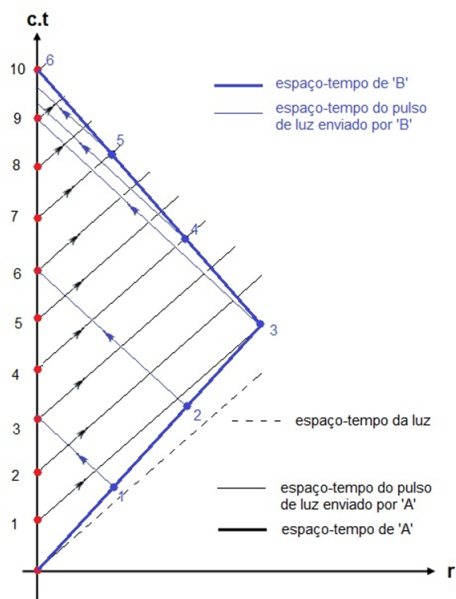


Figura 3: Diagrama espaço x tempo completo

Note que a linha espaço-tempo de 'A' é o próprio eixo ct, visto que ele está em $x = 0$.

Marcamos nesta linha os 10 sinais anuais emitidos pelo seu relógio próprio.

Os sinais de 'A' são retas inclinadas à 45º em relação aos eixos e dirigidas à nave do 'B'.

Observe 05 coisas:

- As linhas espaço-tempo se encontram, visto que o 'B' reencontra o 'A' que ficou na Terra.
- Note a dilatação do intervalo de tempo do relógio de 'B'.
- 'B' não recebe nenhum sinal de 'A' na sua viagem de ida.
- 'B' recebe 09 sinais na sua viagem de volta (incluindo o sinal no ponto de conversão).
- 'A' recebe 06 sinais de 'B', sendo 03 no último ano do seu relógio próprio.

Reforçando, não há divergência quanto aos sinais: 'B' envia 06 e 'A' recebe 06. 'A' envia 10 e 'B' recebe 10.

3 O Paradoxo

O paradoxo está em que se poderia alegar que o princípio seria simétrico, ou seja, o gêmeo que viajou ('B') poderia afirmar que foi o irmão Terrestre ('A') quem viajou.

Assim, se para o 'B' passaram-se 6 anos (no seu relógio próprio), para o 'A' passar-se-iam

$$\Delta t = \frac{6}{\frac{5}{3}} = 3,6 \text{ anos.}$$

Percebe-se que o tempo, que é mais lento no referencial S' para um observador no referencial S, também é mais lento no referencial S para um observador no referencial S'.

Assim temos uma contradição lógica.

4 A Solução

A explicação do paradoxo está no fato da situação parecer (incorretamente) ser simétrica.

A variação dos sistemas inerciais (de $+0,8c$ para $-0,8c$), isto é, a aceleração que o 'B' sofre, não é simétrica.

Embora haja necessidade de da Teoria da Relatividade Geral para solucionarmos o paradoxo, existem experiências a nós acessíveis, como a experiência prática feita em 1972, pelo físico JOSEPH C. HAFELE e o astrônomo RICHARD E. KEATING [3].

Foram colocados 02 relógios atômicos em 02 aviões (um indo para oeste e outro para leste) e um no equador.

A experiência comprovou, conforme mostra a tabela 1, que os 02 relógios que viajaram se mostraram com diferenças da ordem de centenas de nano segundos, em relação ao relógio que permaneceu na Terra (no caso o relógio que ficou no Equador).

Tabela 1: Velocidade X Atraso dos aviões

Referencial	Veloc. (m/s)	Atraso (ns)
Para oeste	-135	7
No equador	465	80
Para leste	1065	421

Interessante perceber que o avião que voa para oeste tem uma velocidade negativa. Isto se deve ao fato de que a velocidade do Concorde é de 600 m/s e a velocidade tangencial de rotação da Terra (no equador) é de 465 m/s e o planeta gira para leste.

Com isso, obtivemos as seguintes

desincronizações entre os relógios que viajaram (em relação ao relógio no equador):

- Avião indo para oeste: + 73ns (piloto ficando mais velho).
- Avião indo para leste: - 341ns (piloto ficando mais novo).

Mesmo adicionando o efeito da dilatação temporal gravitacional

$$\Delta t' = (1 + \frac{gh}{c^2})\Delta t \quad ,$$

onde temos que $h = 15Km$ e $g = 9,81m/s^2$, temos um avanço no relógio de $109ns$.

Com isso, teríamos os seguintes resultados:

- Avião indo para oeste: + 182ns (piloto ficando mais velho).
- Avião indo para leste: - 232ns (piloto ficando mais novo).

Isto comprovou, experimentalmente, que **foram os relógios que viajaram nos aviões que perderam as sincronias**.

5 Referências

- [1] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein Relativity*. 1992. Oxford University Press.
- [2] RESNICK, Robert and WATANABE, Shigeo. *Introdução à Relatividade Especial*. 1971, p. 220. Ed. Universidade de São Paulo.
- [3] HAFELE, Joseph Carl and KEATING, Richard. *Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains*. 1972. Revista Science, n. 177, p. 166-168.