

ESTRATÉGIA DE CONTROLE ÓTIMO COM HORIZONTE DE TEMPO MÓVEL

L. S. SANTOS¹, D. M. PRATA².

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Química - PEQ – COPPE.

²Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Química e de Petróleo.

E-mail para contato: lizandrossantos@gmail.com

RESUMO – O objetivo desse trabalho é simular uma estratégia de aplicação de controle ótimo de processos químicos sujeitos a perturbações. O objetivo da camada de controle ótimo é calcular a trajetória ótima (ações de controle) de maneira a garantir que o processo atinja o ponto ótimo no mínimo intervalo de tempo possível. Logo, o tempo também é considerado como um parâmetro de otimização. A camada de controle ótimo é constituída por um modelo algébrico diferencial acoplado a um algoritmo de ponto interior. O mesmo modelo também é utilizado para simular a planta, porém considera-se que as variáveis de estado possuem ruídos de medição. Os resultados mostram a performance computacional do algoritmo de otimização é primordial para a configuração da estratégia para aplicação em tempo real.

1. INTRODUÇÃO

A aplicação de otimização dinâmica em tempo real (DRTO) envolve geralmente problemas de estimação de parâmetros, Controle Preditivo Não Linear (NMPC) e reconciliação de dados. Para a implementação em tempo real, a performance computacional de cálculo é primordial, pois, como o objetivo é aplicar a solução ótima em um intervalo (horizonte) de tempo pré-estabelecido, no mínimo o cálculo da otimização deve ser muito inferior a esse intervalo (Diehl, 2011). Por exemplo, em estratégias MPC, que utilizam modelos linearizados, possibilita-se quantificar as ações de controle em segundos. Já na realidade atual, DAOPs (*Differential Algebraic Equations*) com elevada dimensão (até milhares de variáveis) apresentam um elevado custo computacional. Além disso, ao aplicar a solução ótima, sua validade pode rapidamente ser perdida, pois perturbações sobre o processo podem afetar o sistema, e a solução ótima computada perder a validade. A implementação *online* implica em maiores dificuldades de estabilidade numérica devido à presença de incertezas (variações nas condições iniciais, parâmetros desconhecidos ou perturbações de processo). Diehl (2011) estudou aspectos que afetam a estabilidade de sistemas de otimização dinâmica em malha fechada. Algumas estratégias (Huang, 2010) sugerem a divisão do DRTO em duas camadas, com a DAOP realizada em malha aberta em uma camada superior (otimização econômica) acoplada a uma camada de MPC inferior para corrigir ações de controle.

Observa-se que há uma crescente preocupação em sofisticar os algoritmos para solução de tais

problemas, tornando cada vez mais viável a aplicação industrial. Nota-se que os aspectos mais preocupantes dizem respeito principalmente a tratamento de problemas com arcos singulares, restrição de trajetória, descontinuidade no perfil de controle, convergência numérica.

Neste trabalho apresentamos uma estratégia baseada no método de *single shooting*. O objetivo é esboçar em cenário simples onde a aplicabilidade da otimização dinâmica em tempo real possa se tornar viável. Em tal estratégia calcula-se a ação de controle ótimo, por um horizonte de tempo variável, que é um dos parâmetros do problema de otimização. As ações de controle são então aplicadas ao processo, por um horizonte de tempo pré-definido, sendo novamente calculadas por meio de um novo ciclo de otimização. O custo computacional para realização da otimização também é incorporado ao sistema, desconta-se esse período de tempo do horizonte de otimização.

O trabalho se estrutura na seguinte maneira: No Tópico 2 apresenta-se a formulação matemática de um problema de otimização dinâmica. No Tópico 3 apresenta-se estratégia sugerida para aplicação do controle ótimo. O tópico 4 discute os resultados obtidos em um exemplo ilustrativo. O Tópico 5 apresenta as conclusões e sugestões.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O problema de otimização dinâmica é estruturado como:

$$\min_{\mathbf{u}(t), t_f, \mathbf{p}} J = \min_{\mathbf{u}(t), t_f, \mathbf{p}} \left[\varphi(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}) \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } \quad & \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) = 0 \\ & \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \leq 0 \\ & \mathbf{e}(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \leq 0 \\ & \mathbf{u}^{\min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}^{\max} \\ & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t_0), t_0 < t < t_f \end{aligned} \quad (2)$$

em que: $J \in \mathbb{R}$ é a função objetivo, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_h}$ é o sistema DAE, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g}$ são as restrições de trajetória, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n_e}$ são as restrições finais, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a variável de controle, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é a variável de estado diferenciável, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a variável algébrica, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ são possíveis parâmetros independentes do tempo e t é a variável tempo.

No método *single shooting* a variável de controle é discretizada e configura o conjunto das variáveis de decisão do problema de otimização dinâmica, enquanto as equações de estado se mantêm na sua estrutura de DAE/EDO original, sendo solucionadas por métodos de integração específicos. A variável de controle pode ser parametrizada por funções locais como expansão polinomial de Lagrange, *splines* etc. (Biegler, 2010).

Com a parametrização da variável de controle, o problema de otimização dinâmica é solucionado numericamente a cada iteração do NLP por um método numérico de integração (por ex.: Runge Kutta ou BDF). Métodos de otimização como SQP e Ponto Interior (Nocedal, 2001) podem ser aplicados para solução do DAOP. Note que a cada iteração do NLP, é necessário um número finito de avaliações do funcional objetivo φ e seu gradiente em relação às variáveis de decisão. O cômputo dos gradientes normalmente é realizado por técnicas como (i) análise de sensibilidade, (ii) equações adjuntas e (iii) diferenças finitas (Schlegel, 2004).

3. ESTRATÉGIA

O esquema da proposta de otimização é ilustrado na Figura 1.

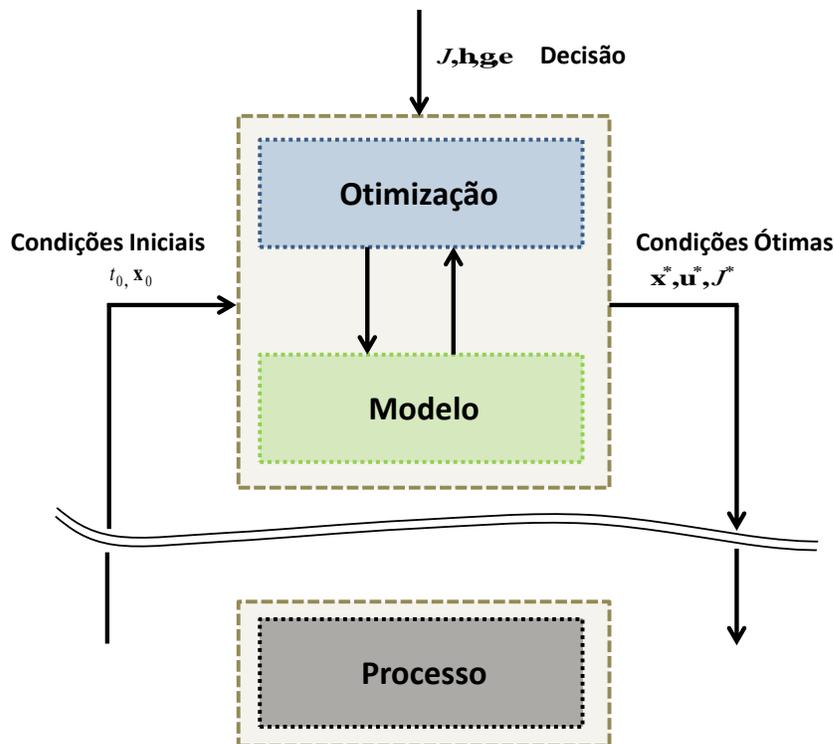


Figura 1 – Estratégia de Controle Ótimo

De acordo com a Figura 1, o problema possui duas camadas: camada de otimização e processo. Na camada de otimização formula-se um problema de controle ótimo, conforme introduzido no Tópico 2. O mesmo modelos algébrico diferencial é utilizado em ambas as camadas. Considera-se aqui que o processo possui variabilidades que são introduzidas incorporando ruídos em algumas variáveis de processo. A presença de erros e distúrbios pode provocar desvio da solução em relação à solução ótima, o que implica em gerar um novo ciclo de otimização para atualização das ações de controle. Tal esquema é representado na Figura 2.

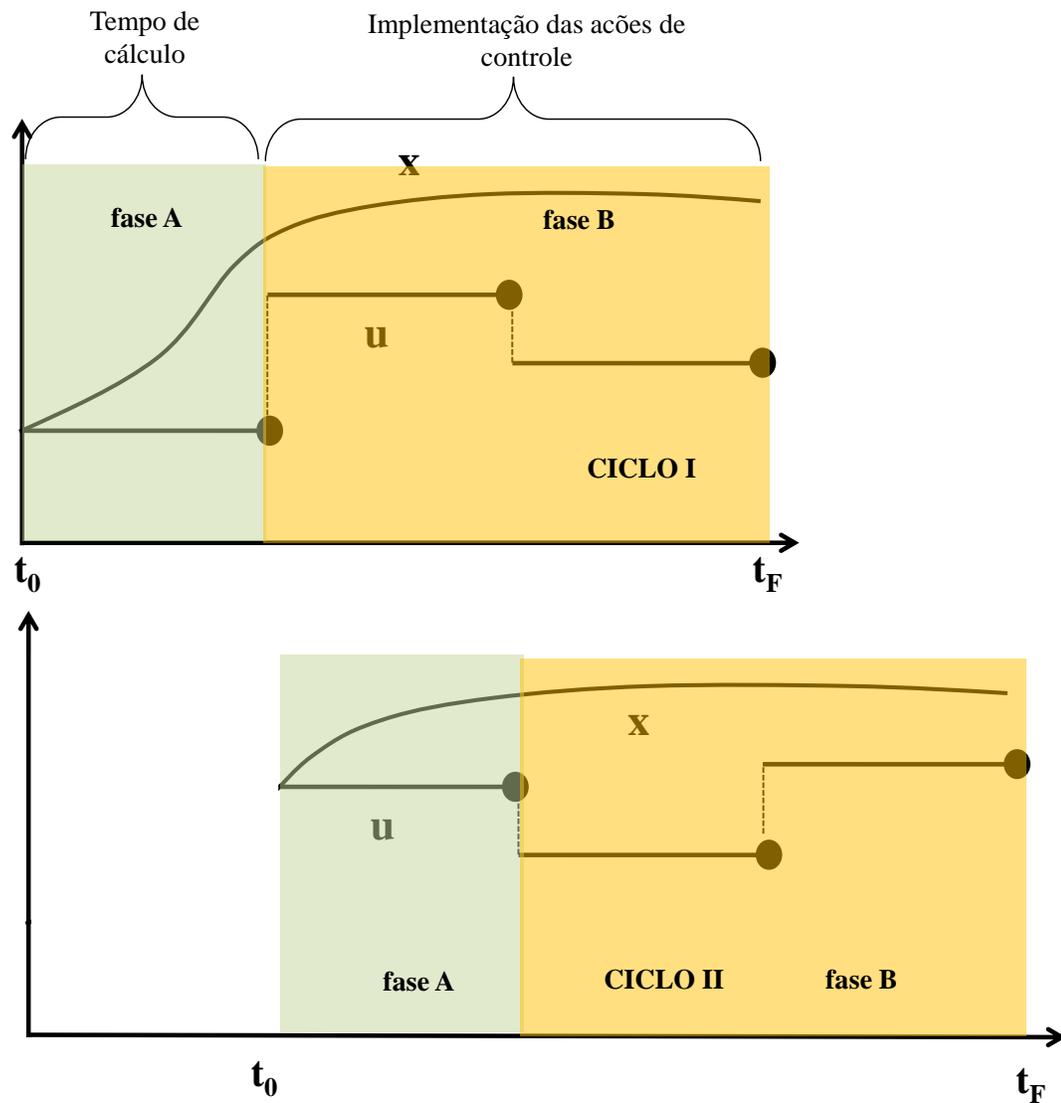


Figura 2 – Ilustração: Horizonte de Tempo das Ações de Controle.

A Figura 2 ilustra dois ciclos de otimização. Nota-se no primeiro ciclo que o custo computacional para o cômputo das ações de controle também é incorporado ao sistema. Nesse período, não há possibilidade do algoritmo de otimização perturbar a variável de controle, logo, considera-se um valor fixo (ou congelado) do perfil de controle que é previamente conhecido no processo. Por consequência, o cálculo de otimização é realizado de fato após este período. A figura 2 ilustra esse momento, que é a interface entre a fase a e fase b. Observa-se que ao fim de um ciclo de otimização, o algoritmo inicia um segundo ciclo descontando-se já o próprio período de cômputo das ações de controle.

A possibilidade de se construir um algoritmo robusto, e ao mesmo tempo eficiente

computacionalmente implica na redução no intervalo de tempo, representado pela fase a da Figura 2. Logo, em caso de atualização de novas ações de controle, o algoritmo recupera possíveis desvios que possam ocorrer dentro desse intervalo de tempo.

Para implementação utilizou-se a rotina *fmincon* do Matlab. A rotina SUNDIALS foi utilizada como DAE solver.

4. EXEMPLO ILUSTRATIVO

O problema, também estudado por Quinto (2010) deste tópico é um reator PFR que consiste em duas reações catalíticas em série:



A formulação do problema é apresentada a seguir:

$$\max_{u(t)} [n_c(t_f)] = \max_{u(t)} [J] \quad (4)$$

$$\frac{dn_a}{dt} = u \cdot (10n_b - n_a) \quad (5)$$

$$\frac{dn_b}{dt} = u \cdot (n_a - 10n_b) - (1-u) \cdot n_b \quad (6)$$

sujeito a:

$$n_c = 1 - n_a - n_b \quad (7)$$

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (8)$$

$$n_a(0) = 1, n_b(0) = 0 \quad (9)$$

em que

$$u = \frac{\text{cat1}}{\text{cat1} + \text{cat2}} \quad (10)$$

é a mistura de catalisadores. Todas as variáveis do problema são normalizadas.

As restrições da variável de controle são dadas por:

$$u_{\min} = 0 \text{ e } u_{\max} = 1 \quad (11)$$

O tempo final t_f é considerado livre, portanto é também uma parâmetro de otimização. Nota-se que as condições iniciais são válidas somente para o primeiro ciclo de otimização, sendo obviamente atualizadas a cada ciclo. A cada intervalo de otimização utiliza-se, em princípio, oito estágios de discretização da variável de controle.

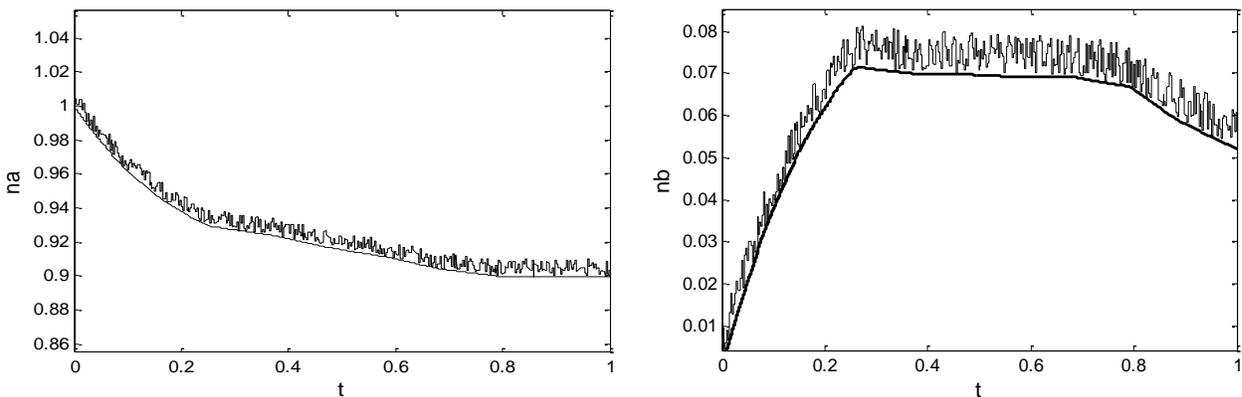
As Figuras 3 e 4 ilustram o resultado de três ciclos de otimização (variáveis de estado e controle). Para todos os ciclos mostra-se o resultado ótimo e o resultado do processo sujeito a ruídos. Para efeitos de modelagem, considera-se que a Equação (5) é sujeita a ruídos de processo, tal que:

$$\frac{dn_a}{dt} = u \cdot (\kappa \cdot n_b - n_a) \quad (12)$$

em que:

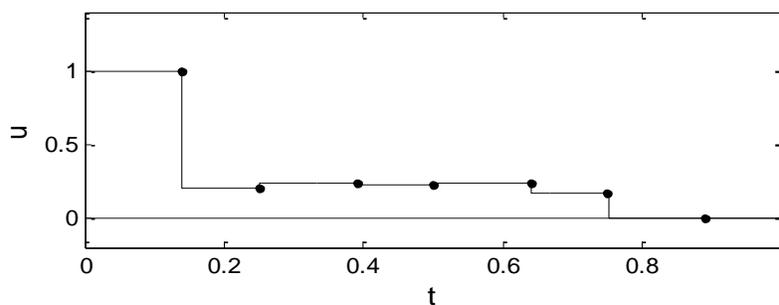
$$\kappa = 10 + \varepsilon \quad (13)$$

onde ε é considerado um ruído branco presente no processo.



(a) variável de estado n_a

(a) variável de estado n_b



(c) perfil de controle ótimo.

Figura 3 – Ciclo I: Variáveis de estado e controle.

A Figura 3 ilustra as variáveis de estado e controle obtidas no primeiro ciclo de otimização. Nota-se, nas variáveis de estado, que o perfil ruidoso representa o comportamento real do processo, enquanto que o perfil suave ilustra o resultado ótimo. De fato, tal discrepância pode desviar o processo do ponto ótimo. Nesse caso específico, a função objetivo ótima obtida resultou em 0,0480528, enquanto que o correspondente valor obtido no processo foi de 0,0480132.

O custo computacional para obter a solução ótima foi de aproximadamente 13 segundos, ou 0,21 minutos. Considerando que o horizonte ótimo corresponde a 1 minuto, pode-se afirmar que as ações de controle ótimo só são iniciadas de fato a partir desse período. Logo, o ciclo II de otimização inicia logo após 0.21 minutos, porém com os próximos 0,21 minutos restringidos a terem o mesmo perfil de controle obtido no ciclo anterior. Porém, essa é uma estimativa, pois o novo cálculo pode demorar mais que este período. A Figura 4 ilustra o perfil ótimo obtido no ciclo II. As novas condições iniciais são $n_a(0) = 0,93$ e $n_b(0) = 0,07$.

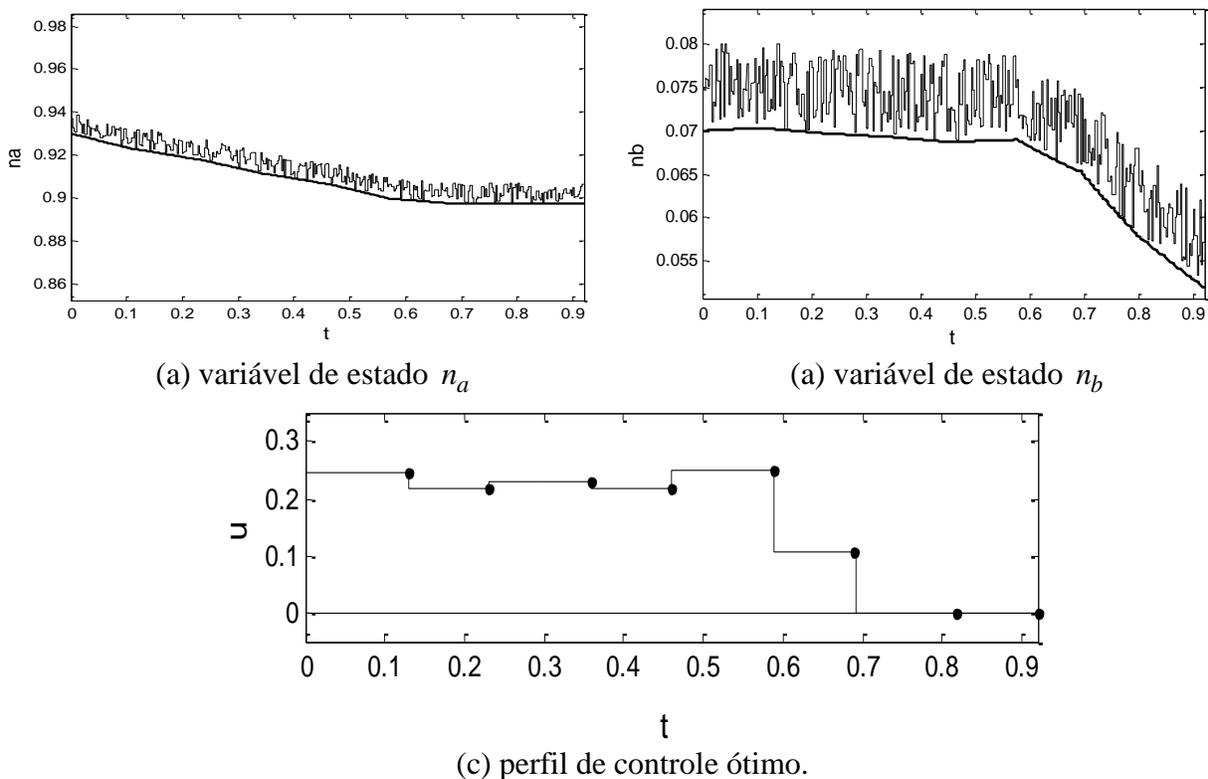


Figura 4 – Ciclo II: Variáveis de estado e controle.

Na Figura 4 nota-se que o tempo final da otimização resultou em 0,92. Conforme esperado, o perfil de controle ótimo, assim como dos estados foi alterado. Enfatiza-se que o custo computacional desse novo ciclo foi ligeiramente inferior ao ciclo anterior: 0,16 minutos. Logo, as ações de controle para o próximo ciclo poderiam ser implementadas antes do período estimado de 0,21 minutos.

5. CONCLUSÕES e SUGESTÕES

Neste trabalho aplicou-se uma estratégia de controle ótimo para otimização em tempo real. Em particular o método *single shooting* foi utilizado, considerando-se um número predefinido de estágios de discretização. Foi possível demonstrar que o computo da otimização deve ser realizado em um intervalo de tempo suficiente para aplicação das ações de controle. Ademais, dependendo das condições do processo, que certamente apresentará desvios em relação ao modelo algébrico diferencial, a necessidade de atualização das ações de controle é necessária, exigindo-se ainda mais da eficiência do algoritmo de otimização.

O algoritmo evidencia que avanços numéricos podem ser propostos para futuras implementações de otimização em tempo real. Obviamente, não foram avaliados aqui outros aspectos preocupantes que desencorajam tal procedimento, como qualidade e disponibilidade das medições, reconciliação e estimação de estados.

Como sugestões, acredita-se que a implementação de algoritmos visando otimização dinâmica em tempo real, já considerando os aspectos acima citados esclareceria as principais dificuldades para aplicação de tal procedimento, o que leva a preferência da indústria por utilização de modelos linearizados e simplificados como MPCs.

6. REFERÊNCIAS

- BIEGLER, L.T. Nonlinear Programming Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, Society for Industrial and Applied Mathematics. MOS-SIAM Series on Optimization, 2010.
- DIEHL, M. Numerical Optimal Control. Optimization in Engineering Center (OPTEC). Leuven, Belgium, 2011.
- SCHLEGEL, M. Adaptive discretization methods for the efficient solution of dynamic optimization problems. Tese de Doutorado. Rheinisch-Westfaelische Technische Hochschule, Aachen, Deutschland, 2004.
- HUANG, R. Nonlinear Model Predictive Control and Dynamic Real Time Optimization for Large-scale Processes. Tese de Doutorado. Carnegie Mellon University. Pittsburgh, PA, EUA., 2010.
- QUINTO, T. Abordagem Algébrico-Diferencial da Otimização Dinâmica de Processos com Índice Flutuante. Dissertação de Mestrado. Programa de Engenharia Química-COPPE-UFRJ, 2010.