Descripción Algebraica de Herramientas de Diseño Digital: Un Puente Entre la Enseñanza Matemática y el Diseño Paramétrico a Partir de la Irrupción de la Computadora en la Evaluación

Gastón Ibarburu[1], Romina Mangini[2], Lucía Lempesi[1]

[1] Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Udelar, Montevideo, Uruguay
gaston.ibarburu@gmail.com; lempesil@gmail.com
[2] Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Udelar, Montevideo, Uruguay
romina.mangini@hotmail.com

Abstract. During the pandemic, virtual tests had to be implemented, which led to the forced incorporation of GeoGebra in geometry courses of Architecture and Design degrees, therefore enabling the treatment of subjects that were unthinkable with pen and paper. In this context, this work explores the possibilities of recreating commands of design software with mathematical expressions, using GeoGebra as an interface that can be easily applied in Math courses of the region. The result is a synthetic map of commands described in a mathematical language, which may work as a translation bridge between the worlds of Math and Software, thus contributing to the connection of Mathematics with both thought and practice of Design and Architecture.

Keywords: Shape Grammars, Multiple Variable Functions, Design software, GeoGebra, Mathematics education.

1 Introducción

1.1 Contexto y Origen del Desafío

La incorporación forzada durante la pandemia de evaluaciones virtuales con computadoras puso de facto sobre la mesa la posibilidad de evaluar procesos que antes, con lápiz, papel y calculadora, eran inviables. En particular en los cursos de Geometría de FADU-Udelar, permitió evaluar la capacidad de comprender y manipular geometrías complejas, concentrando el esfuerzo del estudiante en la comprensión de conceptos y dejando al ordenador la mayoría del costo de cómputo.

Este escenario resulta particularmente atractivo para las carreras de FADU en la medida que facilita el acercamiento de las matemáticas a la praxis del diseño y la arquitectura en la manipulación de geometrías complejas.

Este trabajo, teniendo como antecedentes las experiencias realizadas aisladamente en los cursos de Arquitectura y Diseño Industrial, vincula expresiones matemáticas con las técnicas computacionales de control o desarrollo de geometrías complejas utilizadas comúnmente en el medio. Se tomarán como referencia las nomenclaturas y comandos de Rhinoceros, buscando describirlos en términos matemáticos, con el objetivo de conformar un mapa conceptual útil para la incorporación de la Matemática a las carreras mencionadas.

1.2 Multiplicidad de lenguajes

En el software de diseño paramétrico existe, por un lado, un lenguaje oculto de descripción de la geometría en términos analíticos, que es lo que está por detrás de una interfaz amigable orientada al modelado y a la manipulación de la forma. Las particularidades de esta interfaz están asociadas a las distintas marcas, pero las claves matemáticas en formato de NURBS en la codificación interna se ha generalizado, por tratarse de un estándar instalado en diversas industrias y por su capacidad de definir formas complejas con muy bajo costo computacional NOTA TEDESCHI.

Por otro lado, en las escuelas de Arquitectura y Diseño, en particular en la enseñanza de Matemática, se trabaja con un abanico de recursos algebraicos, de alcance limitado, y construido con poco tiempo relativo en la carrera y teniendo como única base la formación previa que traen los estudiantes desde secundaria. Esto ha sido constatado por el equipo tanto en la FADU de Uruguay como en las Universidades nacionales del Mercosur, entre las cuales existen intercambios habituales. Estas herramientas, cotejadas con el arsenal de posibilidades que el software de diseño pone al alcance de los estudiantes, resultan a priori poco atractivas o aparentan ser poco útiles para los estudiantes.

A nuestro entender, si bien pueden cumplir el fin de entrenar el razonamiento abstracto, los estudiantes no las ven como herramientas aplicables. Y por otro lado, los razonamientos que logramos construir en las aulas pueden quedar aislados del ejercicio profesional, como una codificación diferente de la realidad, en la cual no interesa qué estructura formal describe la forma si no con qué comando se construye. Si seguimos el razonamiento inverso, uno podría intentar reconstruir la gramática de los comandos, pero la lógica con la que estos operan puede resultar críptica, oculta tras las interfases, dejando al usuario a suerte del ensayo y error o de construcciones manuales que aproximan con parches las posibilidades del software a su imaginación.

1.3 Objetivos y alcance del trabajo

Para superar esta falsa dicotomía, este trabajo analizó una lista preliminar de comandos básicos de curvas y de creación de superficies e identificó los requerimientos conceptuales matemáticos que están por detrás, definiendo curvas y superficies como funciones de varias variables, manteniéndose dentro de un marco matemático razonable para el público estudiantil de las carreras de Arquitectura y Diseño de Udelar.

Dado que el universo matemático desplegado por detrás del software es inabarcable, con el fin de acotar el alcance del trabajo se propuso un primer nivel de reconocimiento de comandos, y se planteó una estructura tentativa de ecuaciones que los definen a nivel general. Se expone una aproximación a geometrías que puedan describirse en términos de operaciones formales análogas a los comandos, pero desde la manipulación de ecuaciones, mediadas por la interfaz de GeoGebra, en términos complementarios a las manipulaciones visuales planteadas por las interfases de diseño.

2 Metodología

La metodología consistió en analizar los comandos disponibles en software para la creación de curvas y superficies y proponer una formulación matemática análoga. Con el fin operativo de tener una nomenclatura con la cual trabajar, se tomaron como referencia los comandos del software Rhinoceros, entendiendo que más allá de las denominaciones específicas de cada comando se trata de un software de amplio uso en el medio profesional y que los comandos utilizados existen en formatos similares o idénticos en otros programas . La lista de comandos de curva y superficie considerada es la que figura en el listado oficial de herramientas de modelado de Rhinoceros .

Se realiza una síntesis conceptual de la lista de comandos que describe cada operación en términos formales abstractos, y se prefiguran dichas operaciones en términos matemáticos de curvas o superficies. Las mismas se definen matemáticamente a partir de funciones de varias variables según Abella, Et Al . Se llama curva al recorrido de una función de R1 en R3, es decir el conjunto de puntos de un espacio de tres dimensiones que resulta de aplicar la función a un conjunto de partida de una dimensión (el dominio de la función). De manera similar, se llama superficie al recorrido de una función de R2 en R3, es decir el conjunto de puntos de un espacio de tres dimensiones que resulta de aplicar la función a un conjunto de partida de dos dimensiones.

Una vez finalizado el proceso de abstracción formal de los comandos, ya contando con una prefiguración de sus implicancias matemáticas, se selecciona un conjunto de comandos a profundizar de acotar el alcance del trabajo. No se tuvieron en cuenta comandos de texto ni comandos que operen sobre superficies existentes previamente, tales como empalmar o achaflanar. Además sólo se profundizaron casos cuyas implicancias matemáticas pueden definirse con expresiones algebraicas usualmente trabajadas en los cursos de primer año de carreras universitarias de Arquitectura y Diseño del país, de manera que este aspecto no introduzca nuevas dificultades a un eventual proceso de aplicación de los resultados.

Se consideraron los contenidos trabajados en los cursos de Geometría y Cálculo Diferencial del Plan 2015 de la carrera de Arquitectura, que incluyen ecuaciones de cónicas y las funciones que surgen de despejar las variables, así como también expresiones polinómicas y trigonométricas. A su vez, teniendo en cuenta que el software utilizado en estos cursos es GeoGebra, se tuvo en cuenta el nivel de complejidad de las expresiones en términos de longitud y de cantidad de funciones concatenadas, de manera de que los resultados puedan ser replicados utilizando los comandos Curva y Superficie de dicho software.

Las expresiones de las funciones, tanto de curvas (un parámetro) como de superficies (dos parámetros), se construyen de manera de identificar qué rol cumple cada parámetro en la generación de la forma, y qué rol cumple cada coeficiente en la expresión. Se partió de formas sencillas como cilindros o curvas extruidas, y se analizará la posibilidad de introducir coeficientes que varíen en función de los propios parámetros, lo cual permitirá generar variantes de las curvas o superficies de partida con el fin de adaptarlas a las particularidades de los comandos. Esto permite definir “familias” de funciones que compartan su estructura base, o conexiones entre funciones que utilicen un mismo recurso, y ordenarlas por niveles de complejidad en términos de los conocimientos matemáticos requeridos.

3 Resultados

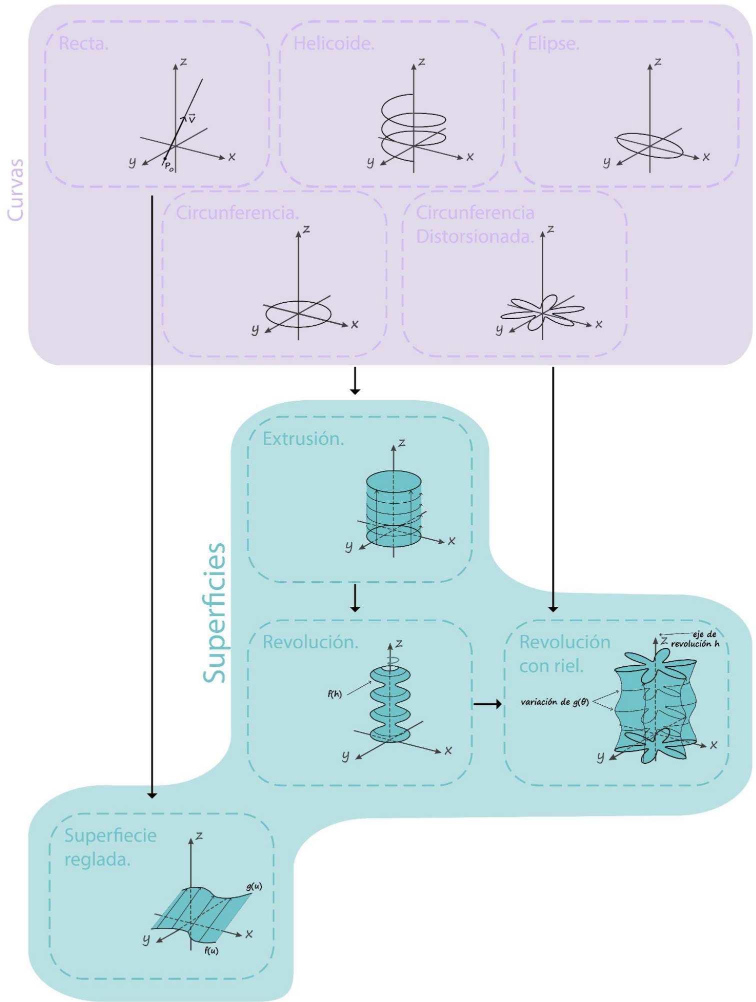

Figura 1. Gráfico síntesis de las superficies y curvas desarrolladas (autoría propia).

3.1 Gráfico Síntesis

En este apartado se desarrollan los resultados obtenidos, que pueden sintetizarse en la Figura 1. El gráfico ordena los distintos comandos desarrollados por órden de complejidad y por cómo se vinculan entre sí.

3.2 Análisis de comandos de curvas.

Lista de comandos tomada de
https://www.rhino3d.com/features/#model-creation-tools.

Línea, polilínea, rectángulo y polígono: refieren a uno o varios segmentos de recta, que pueden construirse en GeoGebra con métodos tradicionales, del tipo $X = P_0 + \lambda\vec{V}$, siendo P_0 un punto del segmento, y $\vec{V}$ un vector cualquiera paralelo al segmento. La definición del dominio de la función en un intervalo continuo acotado, es decir el rango del parámetro, determina los extremos del segmento. No se analiza esta operación en profundidad, pero sí su aplicación en la definición de otros comandos.

Círculo, arco, elipse: Si bien la parametrización de una circunferencia no es una novedad, constituye una base de interés para la realización de alteraciones con fines de diseño, por lo que se selecciona este caso para analizar estas posibilidades.

Hélice, espiral: estos casos se interpretan matemáticamente como variaciones de la ecuación de la circunferencia, por lo que serán desarrollados en conjunto.

Curva de forma libre, cónico, interpolación de puntos, puntos de control (vértices), trazado a mano alzada: estos comandos refieren a distintas maneras de construir curvas arbitrarias, que luego determinan la manera en que pueden manipularse. Rhinoceros trabaja en formato NURBS, Non Uniform Rational Basis Splines.

El caso particular “curva por puntos de control” podría imitarse con relativa facilidad en GeoGebra realizando los cálculos para curvas de Bézier de tercer grado, pero resulta sumamente engorroso trabajar estas expresiones en este software, y más aún combinarlas con otros recursos. No se profundiza en este tipo de objetos por exceder el alcance del trabajo.

3.3 Análisis de comandos de superficies.

Extrusión: Estira una curva en una dirección determinada. Un caso relevante que deriva de este comando es la construcción del cilindro. Si bien se trata de un comando sencillo, su potencial para el modelado es fundamental, y puede construirse combinando cualquier curva con el concepto base de la ecuación de la recta, por lo que se analiza en profundidad.

Superficie reglada: Para un par de curvas cuyos puntos varíen en función del mismo parámetro, construye los segmentos de recta que unen cada par de puntos. Estas superficies pueden construirse utilizando los conceptos de ecuación de la recta, y tienen un gran potencial de diseño, por lo que se analizan en profundidad. El comando **Rectángulo** se considera un caso particular de superficie reglada.

Superficie desde curvas planas. Une curvas planas coplanares. Puede interpretarse como un caso particular de superficie reglada entre curvas.

Superficie de transición con igualación de tangencia. El comando ajusta una superficie a través de curvas de perfil seleccionadas que definen la forma de la superficie. Dado que existen diferentes maneras de definir las curvas, una descripción matemática dependería de las particularidades de cada caso, por lo que el comportamiento de este comando no es abarcable dentro del alcance de este trabajo.

De todas formas, como aproximación a la definición de superficies en base a curvas libres, es posible definir una superficie como la interpolación de puntos entre las curvas, de la misma manera que una curva puede definirse como interpolación entre puntos. Esta línea de trabajo queda pendiente para ser desarrollada en otra ocasión.

Revolución, revolución por carril. Surge de girar el conjunto de puntos de una curva alrededor de un eje cualquiera. En el caso de revolución por carril, revoluciona una curva de perfil alrededor de una curva de carril, que define el borde de la superficie y escala proporcionalmente los radios de cada sección circular. Ambas tienen gran potencial de diseño y pueden realizarse con las herramientas que manejan los estudiantes, por lo que son analizadas en profundidad.

Desde 3 o 4 puntos, desde 3 o 4 curvas, desde red de curvas, plano deformable, barrido a lo largo de un carril con igualación de borde, barrido a lo largo de dos carriles con continuidad de borde, mezclar, parche, drapear, cuadrícula de puntos, mapa de alturas. Se trata de distintos métodos de interpolación de puntos o de uniones de curvas, con definiciones en base a curvas NURBS. No se profundiza en estos comandos porque su complejidad excede el alcance de los cursos definidos.

Cinta. Construye un desfase de la curva y genera una superficie reglada entre la curva nueva y la curva original. El concepto de desfase implica nuevamente la construcción de un sistema ortonormal de coordenadas tangente a la curva en cada punto y resulta de interés el vínculo entre la distancia del desfase y el radio de curvatura en cada punto de la curva, pero ambos aspectos exceden los contenidos establecidos en el recorte, por lo que no se profundizan.

Desarrollable. Construye superficies de manera que sean desarrollables en un plano. La comprensión de esta definición desde el punto de vista matemático involucra conceptos de curvatura de superficies muy avanzados para los estudiantes, por lo que no es analizado en este trabajo.

3.4 Casos desarrollados.

Círculo, arco, elipse. La circunferencia puede construirse con la parametrización clásica $X = (r \cdot cos\theta, r \cdot sen\theta, 0)$, donde r es un valor de radio dado. Nótese que la expresión de z es 0 independientemente del parámetro, por lo que la curva está incluida en el plano XoY.

Si el dominio es el conjunto $[0, 2\pi]$ la curva es la circunferencia completa. Modificar el dominio permite definir arcos, de manera análoga a los segmentos, y sustituir r por valores de semiejes genera una elipse. Vale notar que al realizar algunas alteraciones, como ingresar semiejes con valores diferentes, el significado del parámetro θ deja de ser el ángulo del punto en relación al origen y al eje x.

Helicoides, espirales. Estas curvas pueden construirse con modificaciones sencillas a la ecuación tipo de la circunferencia. Si se deja variar la altura de la curva en función del ángulo, en una expresión del tipo $X = (r \cdot cos\theta, r \cdot sen\theta, a \cdot \theta)$, el punto “asciende” además de girar, produciendo un helicoide, donde r es un radio dado y a es la “velocidad de ascenso”. Por otro lado, si la altura se mantiene fija pero el radio varía en función del ángulo, en una expresión del tipo $X = (b \cdot \theta \cdot cos(\theta), b \cdot \theta \cdot sen(\theta), 0)$ se obtiene una espiral dado que el punto se “aleja del centro” además de girar, siendo b en este caso la “velocidad a la que se aleja”.

Otras variantes de la circunferencia. Definiremos como “circunferencias distorsionadas” a el conjunto de curvas cerradas que pueden construirse a partir de la ecuación de la circunferencia introduciendo variaciones a la posición de cada punto en función del parámetro θ, que originalmente es interpretado como el ángulo de giro. Definiremos circunferencias de radio variado planas los casos en que la única variación se introduce en el valor del radio, y tienen ecuaciones del tipo

$$X = (f(\theta) \cdot cos\theta, f(\theta) \cdot sen\theta, 0) \tag{1}$$

en donde $f(\theta)$ determina el perfil de la curva. Nótese que, si el dominio es el conjunto $[0, 2\pi]$ para que la curva sea cerrada se debe cumplir que $f(0) = f(2\pi)$.

Definiremos también circunferencias de radio variado no planas a los casos en que se introducen variaciones en la altura, con ecuaciones del siguiente tipo:

$$X = (f(\theta) \cdot cos\theta, f(\theta) \cdot sen\theta, h(\theta) \tag{2}$$

en la cual $h(\theta)$ determina las variaciones en altura de cada punto.

Extrusión. Para una curva cualquiera parametrizada, la extrusión puede realizarse desplazando los puntos de la curva con un vector estirado por un segundo parámetro. Si la curva tiene ecuación $P = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, entonces la curva extruida con dirección de vector $\vec{v}$ tiene ecuación

$$P = (f_1(t) + \lambda \vec{v}_x, f_2(t) + \lambda \vec{v}_y, f_3(t) + \lambda \vec{v}_z) \tag{3}$$

Cilindro. La interpretación más sencilla de esta superficie es la extrusión de la curva circunferencia a lo largo de un eje z, sumando el vector $(0,0,1)$ "estirado" por un parámetro, en una expresión del tipo $X=(r\cdot cos(\theta)+0\cdot h, r\cdot sen(\theta)+0\cdot h, 0+1\cdot h)$, que eliminando los términos anulados se lee

$$X=(r\cdot cos(\theta), r\cdot sen(\theta), h) \quad (4)$$

Superficies de revolución. Las superficies de revolución pueden conceptualizarse matemáticamente de dos maneras. Una de ellas, de carácter general, determina para cada punto de la curva a revolucionar una circunferencia, en un plano perpendicular al eje de revolución y cuyo centro es la proyección ortogonal del punto sobre el eje. Esta construcción requeriría determinar un sistema ortonormal de vectores o trabajar con matrices de rotación.

Dado que, como se mencionó antes, estos conceptos escapan a los manejados en los cursos, se plantea una aproximación más sencilla y menos general, que define la superficie como un cilindro de eje paralelo a un eje coordenado y de secciones con radio variable en función de la posición en el eje. Esta subclase de superficies de revolución puede escribirse en el formato

$$X=(f(h)\cdot cos(\theta), f(h)\cdot sen(\theta), h) \quad (5)$$

que surge de sustituir el r fijo de la ecuación del cilindro por una función $f(h)$. El resultado es equivalente a revolucionar la curva del tipo $X=(f(h),0,h)$, contenida en el plano $y=0$, alrededor del eje Oz.

Revolución con riel. A los efectos de emular el comando Revolución con riel, puede introducirse en la ecuación de una superficie de revolución (Ec. 5) una variación análoga a la definida en las curvas del tipo "Circunferencia distorsionada plana" desarrolladas anteriormente (ver Ec. 1). En este caso, la función $g(\theta)$"estira" la curva de revolución al variar su posición angular θ, sobre el perfil de riel que se desee obtener.

El resultado es equivalente a tomar como base la extrusión de la Circunferencia distorsionada plana e introducir un factor de escala para las secciones, $f(h)$, que varía respecto a la posición de la sección en el eje de revolución (h), y es el siguiente,

$$X=(g(\theta)\cdot f(h)\cdot cos(\theta), g(\theta)\cdot f(h)\cdot sen(\theta), h) \quad (6)$$

donde $f(h)$ determina las variaciones del radio de la sección de la superficie según la posición a lo largo del eje, y $g(\theta)$ determina el perfil de riel que describe la curva “revolucionada” al girar alrededor del eje.

Superficie reglada. La construcción de una superficie reglada $\mathcal{R}$ entre dos curvas, $C_1 : X_1 = f(u)$ y $C_2 : X_2 = g(u)$, surge como la aplicación directa de la ecuación de la recta que pasa por un punto de cada curva. Tomando cualquiera de los dos puntos como punto base y el vector $X_1\vec{X}_2$ como director puede escribirse su ecuación como $\mathcal{R} : X = h(u, \lambda) = X_1 + \lambda \cdot X_1\vec{X}_2$, que también puede tener la forma

$$\mathcal{R} : X = h(u, \lambda) = f(u) + \lambda \cdot (g(u) - f(u)). \qquad (7)$$

Esta ecuación no es particularmente novedosa, pero resulta necesario hacer algunas aclaraciones importantes para poder utilizarla en un contexto de diseño intencionado. En primer lugar, que el parámetro λ puede interpretarse como la posición a lo largo de las rectas que unen ambas curvas, y los valores de $\lambda \in [0, 1]$ corresponden a los puntos de los segmentos *entre* las curvas. Extender el dominio en λ permitiría continuar las rectas que unen las curvas en cualquiera de las dos direcciones. El otro aspecto que debe ser tenido en cuenta es la sincronización del movimiento de los puntos X_1 y X_2 sobre las respectivas curvas a las que pertenecen, en función del parámetro u. Dependiendo de la parametrización de cada curva, los valores de u determinan cuáles puntos de una curva se unen con cuáles de la otra. En caso de querer corregir una relación determinada, es necesario realizar un cambio de variable en las curvas.

4 Discusión de Resultados

4.1 Alcance del trabajo

Se obtuvo un análisis sintético a nivel general de los comandos de creación de curvas y superficies del software Rhinoceros, y se propone un conjunto breve de tipos de funciones de varias variables que describen algunos de ellos en términos matemáticos.

Si bien el diseño ayudado por algoritmos mantiene una mayor facilidad en términos comparativos para manipular geometrías, la descripción en términos matemáticos mantiene el carácter abstracto y sintético, inherentemente parametrizado, que plantea alternativas en la definición de la forma, libres de las definiciones particulares de los programas. Las experiencias realizadas con estudiantes previas a este trabajo auguran esta liberación, pero queda pendiente ensayar este nuevo marco teórico en un curso para poder evaluar con rigurosidad el resultado. Aunque pueda resultar dificultosa, la manipulación en estos términos parece tener el potencial de dar mayor control al usuario y liberarle de las restricciones de los comandos específicos.

4.2 Dificultades y Ventajas Identificadas

En términos concretos, la aproximación a las curvas NURBS podría ser trabajada en los cursos objetivo, pero inicialmente parecen construcciones engorrosas para interfases de carga manual de datos.

En particular, la definición a trozos de las funciones hace prácticamente imposible su manipulación en un software que no está diseñado para ello. Sin embargo, las conceptualizaciones que pueden trabajarse en Curvas de Bézier pueden ser extrapolables a las NURBS y ayudar a construir intuición sobre comandos como “re parametrizar” curvas o “PuntosDesdeUV”.

También pueden plantearse alternativas sencillas dentro de GeoGebra para el diseño de formas libres, tales como curvas simplificadas de Bézier de tercer grado o interpolación de polinomios por listas de puntos, que abren una serie de posibilidades a explorar. Estas posibles construcciones combinadas con las estructuras definidas o con otras potenciales abren un abanico de posibilidades que amerita ser explorado en trabajos futuros.

4.3 Perspectivas y Potenciales

En líneas generales, si bien el trabajo tuvo un alcance acotado, constata la existencia de un camino fértil a seguir explorando. El resultado constituye una primera versión de un mapa de comandos y expresiones vinculados, que deberá continuar desarrollándose, pero que tiene la capacidad de oficiar de traductor entre los lenguajes abstractos de las matemáticas y los del diseño paramétrico, y ayuda a la codificación de la forma en términos abstractos, constituyendo un insumo para el nuevo escenario de incorporación total de la computadora al proceso de aprendizaje. El tiempo de cómputo ya no se interpone entre el estudiante y la comprensión del espacio, si no que facilita la aparición de la geometría y habilita la iteración instantánea entre código y visualización. La radicalidad de la incorporación de las evaluaciones virtuales, además de obligarnos a replantear nuestra manera de entender los aprendizajes, podría habernos abierto una oportunidad para acompasar la aceleración de la complejidad contemporánea.

5 Referencias

Abella (2015). Cálculo Diferencial e Integral con funciones de varias variables. Montevideo, Universidad de la República, Facultad de Ciencias.

Pottman (2007). Architectural geometry. Pennsylvania: Bentley Institute Press.

Robert McNeel & Associates (TLM, Inc.). Herramientas de Creación de modelos. https://www.rhino3d.com/features/#model-creation-tools.

Tedeschi (2014). AAD_Algorithms-Aided Design. Potenza: Le Penseur.