

Um estudo de estrelas de nêutrons utilizando o modelo relativístico Sigma- Ômega

Borges, W. M.^{1*}; Spalenza, W.²;

¹ Licenciatura em Física, Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica, ES, Brasil.

² Laboratório de Física Teórica e Computacional (LFTC), IFES Cariacica, ES, Brasil.

* e-mail: wellington.m00@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo teórico sobre as propriedades da matéria nuclear, visando descrever a estrutura de estrelas de nêutrons com base no modelo relativístico de campo médio Sigma-Ômega, proposto por John Dirk Walecka na década de 1970. Essas estrelas, objetos compactos de alta densidade, possuem uma composição rica em partículas como nêutrons, prótons, elétrons e partículas mediadoras de interação. O modelo de Walecka é formulado a partir de uma lagrangiana que descreve as interações entre núcleons, mediadas pelos campos mesônicos sigma (escalar) e ômega (vetorial). Por meio das equações de movimento obtidas a partir do formalismo de Euler-Lagrange, aplica-se a aproximação de campo médio para simplificar o sistema, resultando em expressões que relacionam os campos com as densidades do sistema. Utilizando o tensor energia-momento, derivam-se as equações de estado da pressão e da densidade de energia, que são resolvidas numericamente. Os resultados obtidos são então aplicados às equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), permitindo analisar a relação massa-raio e o comportamento estrutural desse tipo de objeto astrofísico.

Abstract

This work presents a theoretical study on the properties of nuclear matter aimed at describing the structure of neutron stars using the relativistic mean-field Sigma-Omega model, proposed by John Dirk Walecka in the 1970s. These compact objects exhibit extremely high densities and a complex composition of particles such as neutrons, protons, electrons, and interaction-mediating particles. Walecka's model is based on a Lagrangian formulation that describes interactions among nucleons, mediated by the mesonic fields sigma (scalar) and omega (vector). From the equations of motion derived via the Euler-Lagrange formalism, the mean-field approximation is applied to simplify the system, resulting in expressions that relate the fields to the system's densities. Using the energy-momentum tensor, the equations of state for pressure and energy density are obtained and solved numerically. The results are then applied to the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations to analyze the mass-radius relation and the structural behavior of such astrophysical objects.

Keywords (Palavras chaves): Walecka Model (Modelo de Walecka), Nuclear Matter (Matéria Nuclear), Relativistic Mean-Field (Campo Médio Relativístico)

1. Introdução

A investigação das propriedades das partículas elementares de forma teórico-fenomenológica é algo conhecido desde o início do século XX, quando se tentava determinar as massas de partículas como o elétron, o próton, o nêutron e outras que levaram os físicos a desenvolverem o que hoje chamamos de Mecânica Quântica. Essa teoria é amplamente utilizada por físicos, químicos, biólogos e diversos outros

cientistas, servindo inclusive como base para a compreensão da tabela periódica dos elementos.

O conhecimento da Mecânica Quântica atingiu seu auge a partir da década de 1930, com Dirac como pioneiro e outros físicos notáveis, que desenvolveram a Mecânica Quântica Relativística. Essa teoria trouxe contribuições significativas para o estudo teórico das energias, motivando os experimentalistas a buscarem comprovações para as previsões teóricas. A Mecânica

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

Quântica Relativística destacou-se como uma das teorias de maior sucesso, pois todas as suas previsões foram confirmadas experimentalmente, incluindo o cálculo preciso da energia do elétron com suas correções, as explicações para o efeito Zeeman, a descoberta da primeira antipartícula - o pósitron (a antipartícula do elétron) - e muitas outras.

A partir da década de 1930, os físicos começaram a teorizar sobre partículas ainda mais fundamentais que o próton e o nêutron, aprofundando-se na estrutura da matéria. Foi nesse contexto que surgiu a Teoria de Campos (TC), que engloba a Física de Partículas Elementares de altas energias. Essa teoria divide-se em quatro áreas principais: a Eletrodinâmica Quântica (EDQ), a Teoria Eletrofraca, a Cromodinâmica Quântica (CDQ), o chamado modelo padrão de partículas elementares. Em resumo, essas teorias descrevem as partículas que compõem a estrutura atômica e nuclear e, consequentemente, a estrutura do Universo como um todo [1].

Com base nisso, este trabalho tem como objetivo estabelecer as conexões entre a Teoria de Campos e suas aplicações no estudo de estrelas de nêutrons, que são objetos compactos que apresentam condições físicas extremas, o que os tornam importantes objetos de estudos para compreender a natureza das partículas e são um excelente laboratório para entendermos a física além do modelo padrão.

2. Estrelas de Nêutrons

No ciclo evolutivo estelar, estrelas com massa entre 8 e 25 massas solares ($M_{\odot}$), ao fim de suas vidas, explodem numa supernovas, restando um caroço compacto com raio de 10km a 15km. Esses remanescentes de estrelas possuem uma densidade na ordem de 10^{15} g/cm^3 e a massa média de $1,5 M_{\odot}$.

Apesar de serem chamadas de estrelas de nêutrons, esses objetos, na verdade, possuem em sua estrutura outras partículas além de nêutrons, como prótons e outros bárions, elétrons, múons (entre outros léptons), além das partículas mediadoras de interação como os mésons Sigma e Ômega, os quais serão abordados neste trabalho, dentre outros.

Algumas estrelas de nêutrons podem girar em alta velocidade em torno de seu próprio eixo, devido à conservação do momento angular proveniente de seu surgimento e apresentam campo magnético muito intenso. Alguns modelos preveem que as estrelas de nêutrons tenham uma camada superficial de ferro e elétrons, uma camada mais interna comporta por partículas bariônicas, como prótons, nêutrons, por exemplo, e léptons, como elétrons, neutrinos e múons, conforme na Figura 1.

Algumas teorias sugerem que no núcleo das estrelas de nêutrons podem conter partículas bariônicas e mésons condensados, devido à alta densidade. Outras teorias sugerem que exista no núcleo desses objetos astrofísicos um plasma de quarks e glúons livres, ou seja, a matéria estaria numa condição tão extrema que não teria condições de formar partículas.

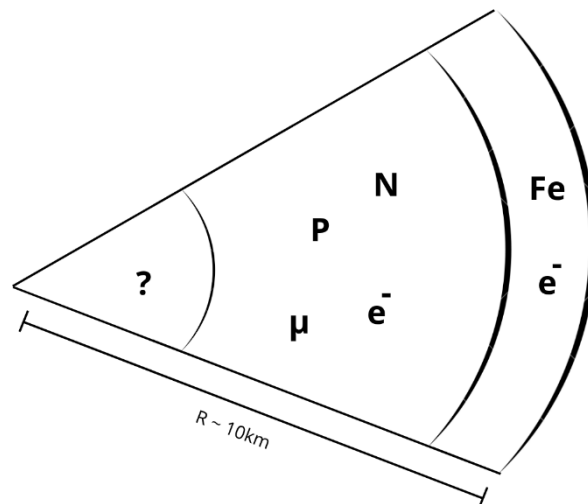


Figura 1: Representação esquemática da estrutura de uma estrela de nêutrons.

3. Modelo Sigma-Ômega

Nos anos de 1970 John Dirk Walecka desenvolveu um modelo teórico para descrever a estrutura nuclear e as interações entre nucleons. O modelo Sigma-Ômega, também conhecido como modelo de Walecka baseia-se em um modelo nuclear relativístico de campo médio. Neste modelo os campos mediadores sigma (σ) e ômega (ω) representam interações de curto alcance (repulsão) e longo alcance (atração), respectivamente.

Este modelo busca estudar a matéria em condições extremas como, por exemplo, no interior de estrelas atômicas, pois permite uma boa descrição dos fenômenos da estabilidade nuclear [2].

No modelo de Walecka, os nucleons (prótons e nêutrons) são descritos pela lagrangiana de Dirac, que incorpora seus campos fermiônicos e massas correspondentes. Os mésons mediadores são representados por: (1) o campo escalar σ (sigma) através da lagrangiana de Klein-Gordon, e (2) o campo vetorial ω (ômega) pela lagrangiana de Proca, que inclui o termo de massa. Enquanto os nucleons são férmions (spin 1/2), os mésons σ e ω correspondem, respectivamente, a bósons escalares (spin 0) e vetoriais (spin 1)[3].

A interação eletromagnética é incorporada via lagrangiana de Maxwell na sem fonte. A combinação dessas contribuições lagrangianas, considerando os

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

dois tipos de núcleons (prótons e nêutrons) e os dois léptons relevantes (elétrons e múons), resulta na formulação completa da Lagrangiana de Walecka (Equação 1) [3][4].

$$L_W = \sum_{b=1}^2 \bar{\psi}_b (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu + g_\sigma \sigma - m_b) \psi_b + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m_l) \psi_l + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} \Omega^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1)$$

A interação entre os bárions (prótons e nêutrons) se dá através dos mediadores sigma e ômega. Esta interação depende da distância entre eles, ou seja, quanto mais próximos maior vai ser a interação com mediador escalar ômega, que indica a repulsão, já quando afastamos uma partícula da outra entramos num regime em que o méson vetorial sigma atua atraindo as partículas. Além disso, é possível perceber que, tanto a lagrangiana de Proca (méson vetorial ômega) quanto a lagrangiana de Maxwell apresentam o tensor de campo vetorial, com isso eles podem ser expandidos conforme a Equação 2 e 3 abaixo.

$$\Omega^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} = (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)(\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) \quad (2)$$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3)$$

Esta notação será importante para a aplicação de Aproximação de Campo Média, na seção seguinte.

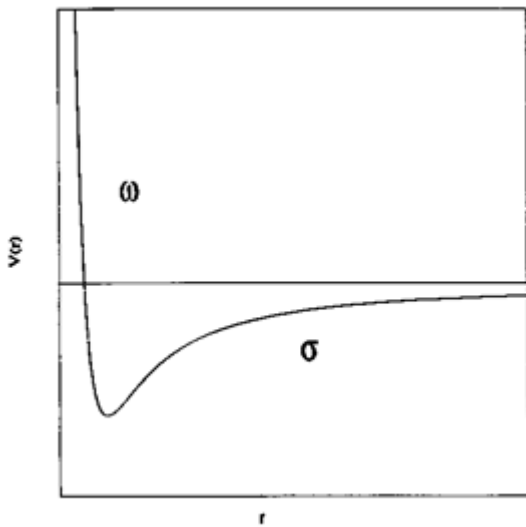


Figura 2: Representação esquemática do potencial nuclear de Yukawa em função da distância de separação em relação à origem, indicando a região de domínio dos mésons apresentados no modelo de Walecka em sua formulação original [4].

Na Figura 2 é apresentado um esquema do potencial nuclear de Yukawa em função da distância, é possível perceber que há uma região de domínio dos mésons no modelo original proposto por John Dirck Walecka.

4. Equações de campo

Utilizando a equação e Euler-Lagrange (Equação 4) aplicando à lagrangiana de Walecka, podemos extrair as equações de movimentos para cada campo.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \partial_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k q_i)} \right] = 0 \quad (4)$$

Para o campo sigma:

$$m_\sigma^2 \sigma + \partial_\mu \partial^\mu \sigma = g_\sigma \sum_{b=1}^2 \bar{\psi}_b \psi_b \quad (5)$$

Para o campo ômega:

$$m_\omega^2 \omega^\nu + \partial_\mu \Omega^{\mu\nu} = g_\omega \sum_{b=1}^2 \bar{\psi}_b \gamma^\nu \psi_b \quad (6)$$

Para o campo \$\psi_b\$:

$$\sum_{b=1}^2 (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu + g_\sigma \sigma - m_b) \psi_b = 0 \quad (7)$$

Para o campo \$\psi_l\$:

$$\sum_{b=1}^2 (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m_l) \psi_l = 0 \quad (8)$$

5. Método de Aproximação de Campo Médio

Em um caso ideal em que a matéria nuclear é estática, homogênea e em seu estado fundamental, podemos analisar os prótons e nêutrons submetidos a uma ação média de interações nucleares [5]. Com isso, trabalharemos com valores médios para os campos mesônicos, em que sigma e ômega se comportam como um campo clássico e que dependem do tempo, ou seja:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle = \sigma \quad (9)$$

$$\omega^\mu \rightarrow \langle \omega^0 \rangle = \omega_0 \quad (10)$$

Utilizando a de movimento do campo sigma, na Aproximação de Campo Médio, o campo sigma se toma constante. Com isso, a derivada em sigma é nula e podemos reescrever a Equação 5 como:

$$m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \sum_{b=1}^2 \bar{\psi}_b \psi_b \quad (11)$$

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

Sabendo que a densidade escalar das partículas é dada por

$$\rho_s = \bar{\psi}_b \psi_b \quad (12)$$

e podemos definir que o campo sigma é:

$$\sigma = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s \quad (13)$$

Para o méson vetorial ômega (Equação 6), na Aproximação de Campo Médio será descrito como:

$$m_\omega^2 \omega = g_\omega \sum_{b=1}^2 \bar{\psi}_b \gamma^0 \psi_b \quad (14)$$

$$\rho_b = \bar{\psi}_b \gamma^0 \psi_b \quad (15)$$

$$\omega = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_b \quad (16)$$

6. Tensor Momento-Energia

Para encontrarmos a equação de estado da matéria nuclear, devemos utilizar o tensor energia-momento, que é definido como:

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu q_i)} \partial_\nu q_i \quad (17)$$

em que q_i representa cada campo e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Aplicando o Tensor Momento-energia na Lagrangiana de Walecka e considerando um sistema ideal obtemos uma matriz diagonal no qual as componentes apresentam a densidade de energia (ε) e a pressão (p).

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (19)$$

Os valores de ε e p são determinados pelos campos médios de σ e ω na Aproximação de Campo Médio. Com isso, tiramos que a pressão total e densidade de energia total são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_T = & \frac{1}{2}(m_\omega^2 \omega + m_\sigma^2 \sigma) + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sum_b \int_0^{K_b} k^2 \left[g_\omega + \sqrt{k^2 + (M_b^*)^2} \right] dk + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sum_l \int_0^{K_l} k^2 \sqrt{k^2 + m_l^2} dk \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} p_T = & \frac{1}{2}(m_\omega^2 \omega^2 - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{3\pi^2} \sum_b \int_0^{K_b} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + (M_b^*)^2}} dk + \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \sum_l \int_0^{K_l} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_l^2}} dk \end{aligned} \quad (21)$$

Em que K_l e K_b são momentos de Fermi para os léptons e bárions, respectivamente e M_b^* a massa efetiva, que é definida por:

$$M_b^* = m_b - g_\sigma \sigma \quad (22)$$

7. Equações de Equilíbrio de TOV e Discussões

Para a obtenção das equações de estado da matéria nuclear (Equações 20 e 21), será necessário resolver a integração para o momento de Fermi. Pelo fato de não haver uma solução analítica simples para essas equações, elas serão aplicadas a uma resolução numérica.

Essas equações de estado da pressão total e da densidade total de energia serão utilizadas para alimentar a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (Equação 23). Para isso será considerado uma estrela esfericamente simétrica, estático e com comportamento de um fluido perfeito.

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{[\varepsilon(r) + p(r)][m(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r^2 \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]} \quad (23)$$

Em que a equação de massa $m(r)$ contida no raio é determinada por:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr' \quad (24)$$

Para este trabalho será adotado o sistema natural de unidades, que é amplamente utilizado em teoria quântica de campos. Dessa forma $G = c = 1$.

A partir dos valores gerados pela Equação 23 será possível estudar a relação massa-raio da estrela e compreender a estrutura de estrelas atômicas.

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

8. Conclusão

O presente trabalho apresenta um estudo teórico inicial sobre o comportamento da matéria nuclear em condições extremas, utilizando o modelo relativístico de Sigma-Ômega, aplicado à descrição de estrelas de nêutrons. Até o momento, foi realizada uma análise do modelo teórico, abrangendo a formulação lagrangiana, as equações de movimento, a aplicação da aproximação de campo médio e a obtenção das equações de estado a partir do tensor energia-momento.

Este estudo apresenta uma etapa preliminar de um trabalho mais amplo, que tem como objetivo final realizar uma análise numérica das equações obtidas. A partir dessa análise, serão determinados valores para grandezas como pressão, densidade de energia e relação massa-raio das estrelas de nêutrons. Os resultados numéricos serão comparados com dados observacionais obtidos por meio de telescópios e outros instrumentos astrofísicos, buscando verificar a consistência do modelo Sigma-Ômega na descrição desses objetos compactos.

Portanto, o trabalho desenvolvido até o momento concentrou-se na revisão teórica e na dedução das equações fundamentais, as quais servirão como base para as próximas etapas, que incluirão a implementação computacional e a análise dos resultados obtidos.

9. Referências

[1] RYDER, Lewis. Introduction Quantum Field Theory. 2n Edition. London: Cambridge Press, 2002.

[2] GLENDENNING, Norman K. Compact stars: nuclear physics, particle physics, and general relativity. 2nd ed. New York, NY: Springer, c2000. xviii, 467 p. (Astronomy and astrophysics library). ISBN 9781461270454.

[3] WALECKA, J. D. A theory of high condensed matter. Annals of Physics, New York, v. 83, n. 2, p. 491-529, Apr. 1974.

[4] BACOBSEN, Rafael Bán. Plasma de Quarks e Glúons no Interior de Estrelas de Nêutrons. 2007. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

[5] GOMES, L. C.; WALECKA, J. D.; WEISSKOPF, V. F. Properties of nuclear matter. Ann. Phys., New York, v. 3, n. 3, p. 241-274, Mar. 1958.