

# Revisitando os problemas de interferência no projeto cinemático de engrenagens anelares com dentes internos

Loeffler, C. F.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória,  
ES, Brasil.

e-mail: loefflercarlos@gmail.com

---

## Resumo

As engrenagens anelares ou de dentes internos apresentam um vasto campo de aplicação, impulsionado pela larga aplicação em redutores compactos de vários estágios, usados em diversas máquinas de potência e, especialmente, na robótica. Contudo, seu projeto cinemático é composto por muitas particularidades, que tornam seu projeto mais complexo do que as engrenagens de dentes externos. Para agravar a situação, os livros voltados ao tema praticamente não abordam, limitando-se a expor caracteres muito gerais, insuficientes para auxiliar a confecção de projeto eficiente. Isto obedece a uma tendência da engenharia moderna, em que os conhecimentos mais aprofundados ficam restritos ao ambiente industrial e a massa de profissionais especializados. Assim, este texto resgata algumas informações importantes sobre a cinemática do acoplamento de engrenagens anelares, colhidas em referências específicas, de pouca penetração no meio acadêmico.

*Palavras-chave: Engrenagens anelares, engrenagens de dentes internos, cinemática do engrenamento.*

## Abstract

Internally toothed ring gears have a wide range of applications, driven by their widespread applications in compact multi-stage reducers used in various power machines, especially in robotics. However, their kinematic design is composed of many particularities, making their design more complex than externally toothed gears. To make matters worse, books on the subject barely cover them, limiting themselves to presenting insufficient general characteristics to assist an efficient design. Following modern engineering trends, more in-depth knowledge is restricted to the environment and the critical mass of professionals from companies specializing in designing transmission components. Therefore, this text retrieves some important information on the kinematics of the coupling of ring gears, gathered from specific references, which have little penetration in the academic environment.

*Keywords: Annular spur gear, internal tooth gears, kinematic design of spur gears.*

---

## 1. Introdução

Não obstante haver diversos dispositivos modernos voltados para a transmissão de potência com redução de velocidades na atualidade, como as CVTs, que produzem uma redução continuamente variável, as engrenagens continuam a ser os componentes mais efetivos para essa finalidade. Sua robustez e durabilidade, sua manutenção mais simples, a abundância dos meios de produção e o elevado domínio tecnológico e científico agregados, são vantagens ainda não alcançadas por outros

equipamentos afins. Suas aplicações em veículos de alto desempenho e máquinas operatrizes arrojadas demonstram sua efetividade.

Existem várias modalidades de engrenagens: cilíndricas com dentes retos e helicoidais; engrenagens cônicas variadas e engrenagens que acoplam com parafusos, ditos sem fim. Todavia, existe outra forma de classificação, que se refere ao fato dos dentes se situarem externamente ou internamente. São as necessidades geradas pelas aplicações que induzem à tipologia mencionada.

As engrenagens com dentes internos ou anelares tem grande aplicação em sistema de redução compostos por engrenagens planetárias e solares, conforme mostra a Figura 1:



Figura 1: Sistema de redução solar/anelar/planetárias

Isto ocorre porque o acoplamento tais componentes é garantido pelo envolvimento de uma engrenagem anelar com dentes internos, cujo centro de curvatura também aponta para o centro geométrico do conjunto, conforme demonstra a Figura 1.

Os conjuntos de redução solar/planetárias/anelar sempre encontraram aplicações em importantes segmentos da indústria naval e aeronáutica, pois são capazes de promover grandes reduções de velocidade com razões de contato ou grau de recobrimento elevadas, garantindo alta durabilidade. Há algumas décadas eram aplicadas em navios e aeronaves e comumente ostentavam um porte elevado e, evidentemente, alto custo. Com o desenvolvimento da robótica, conjuntos deste tipo de menor tamanho e constituídos por vários estágios organizados axialmente, sua aplicação se amplificou grandemente. Razões de transmissão da ordem de centenas passaram a ser bastante acessíveis em muitas aplicações. Um modelo deste tipo é mostrado na figura 2 a seguir:

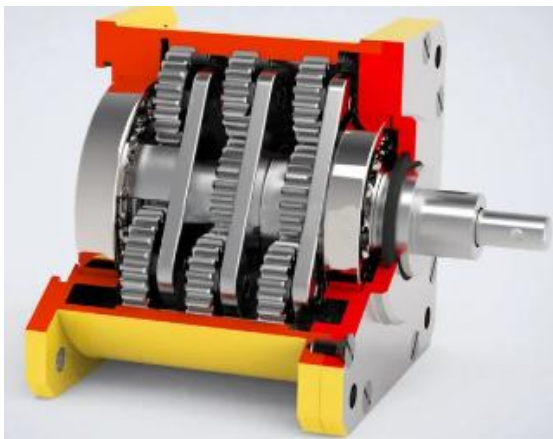


Figura 2: Corte de um sistema de redução solar/anelar/planetárias com três estágios

A arquitetura das engrenagens anelares é bastante especial, comparadas às apresentadas pelas engrenagens cilíndricas comuns. Isto ocorre não apenas por poderem apresentar dentes internos e externos, que demandam especial cuidado na fabricação e agregam um custo também mais elevado; a principal razão se prende a existência de restrições geométricas adicionais àquelas usualmente apresentadas nas engrenagens cilíndricas de dentes externos, que demandam um cuidado especial tanto na fabricação quanto no projeto cinemático.

Não obstante poderem apresentar um denteado helicoidal, este estudo será voltado para dentes retos, de mais simples e precisa modelagem matemática, bem como de fabricação mais acessível.

## 2. Vantagens das engrenagens anelares de dentes internos

Comparadas com engrenagens de dentes retos externas, as engrenagens internas têm várias vantagens quando podem ser usadas [1]. Por exemplo:

- 1 - Para uma relação de velocidade específica, o arranjo da engrenagem interna é bem mais compacto, pois a distância entre centros é menor, não sendo a soma dos diâmetros primitivos da coroa e do pinhão. Necessariamente, pela sua própria arquitetura, o conjunto tem um centro comum;
- 2 - Como os dentes se movimentam mais próximos e na mesma direção, há menos deslizamento dos dentes uns sobre os outros; o campo de ação das forças de atrito é mais restrito e isso implica em menos desgaste e maior eficiência;
- 3 - Como a engrenagem interna envolve a aproximação dos dentes durante o contato ao invés de um afastamento relativo, a razão de contato ou grau de recobrimento é significativamente maior do que para a mesma quantidade de dentes num engrenamento externo [2]. Daí resulta uma transferência mais gradual de carga de dente para dente e consequentemente um funcionamento mais silencioso. Também os dentes terão maior vida útil para uma dada carga de pequena magnitude ou, então, a mesma vida útil de um engrenamento externo que suportaria uma carga maior;
- 4 - Por causa da superfície côncava do dente interno, a superfície real em contato é maior (grau de osculação aumentado), tendendo a dividir melhor o esforço. Note que, matematicamente, o contato seria pontual; porém, na realidade, são duas superfícies côncavas que se deformam e assim geram uma superfície de contato maior. Esse fator permite suportar uma carga mais

elevada para a mesma tensão de superfície e assim proporcionar maior vida útil;

5 - Os dentes das engrenagens internas são geometricamente mais robustos do que os das engrenagens de dentes retos correspondentes. A operação é suave e silenciosa porque um número maior de dentes está em contato [1].

Porém, também há desvantagens: o processo de fabricação é mais caro e as imperfeições são mais difíceis de corrigir. Além disso, conforme mencionado, há fenômenos geométricos importantes que não se apresentam nas engrenagens com dentes externos. Destaca-se que há três possíveis tipos de interferência, que serão comentados mais à frente.

### 3. Características geométricas

Os dentes das engrenagens internas são formados geralmente numa operação em que uma ferramenta de corte dá passes axiais (sistema Fellows de fabricação), deixando um sulco no formato desejado pelo projeto. O desbaste por fresamento poderia ser usado, mas é mais complexo; usualmente, dá-se preferência à usinagem no que se pode considerar como um processo de aplainamento. A ferramenta pode ter o formato de uma faca ou então ser semelhante a uma engrenagem de dentes externos, conforme mostra a Figura 3.



Figura 3: Aplainamento com ferramenta de corte no formato de uma engrenagem de dentes externos. O movimento da ferramenta é axial.

Não obstante o formato da ferramenta de corte parecer uma engrenagem, seus dentes são efetivas lâminas de corte, vide Figura 4. No método Fellows, no lugar de várias lâminas, a ferramenta tem o formato aproximado de uma faca.

Os dentes internos de uma engrenagem anular têm dentes cortados na parte interna do aro, com o espaço entre os dentes (os vãos) na engrenagem interna num formato muito parecido com o do próprio dente em uma engrenagem externa.



Figura 4: A ferramenta verdadeiramente possui lâminas no lugar dos dentes.

As engrenagens anelares com dentes internos, doravante chamadas EAI, possuem os mesmos diâmetros característicos das engrenagens com dentes externos, mas há mudanças substanciais relativamente ao posicionamento destes. A circunferência de base da anelar, a partir da qual o perfil dos dentes é evolvental, se situa abaixo da circunferência primitiva, bem próximo da circunferência de topo, a mais próxima da raiz dos dentes da engrenagem interna, conforme mostra a Fig. 5:

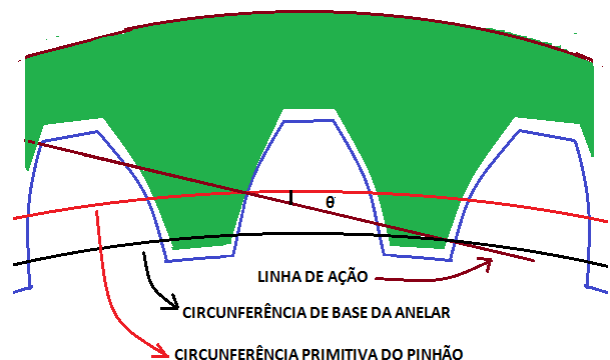


Figura 5: A linha de ação contém todos os pontos de contato. Deve ser limitada pela circunferência de topo do pinhão e a circunferência de base da anelar.

Na ilustração, o círculo de topo da engrenagem anelar não corta a linha de ação porque a extremidade superior de seu dente, ao se estender para dentro do centro geométrico, atuaria numa região externa ao círculo base, em que não há curva envolvente. Assim, a parte de um dente de engrenagem interna que ultrapassa o círculo base é inútil e sujeita a interferência, a menos que seja modificada, ou seja, desbastada. Porém, o procedimento mais efetivo consiste em elaborar um projeto cinemático de forma a evitar o contato fora da região evolvente.

Se o pinhão estiver dirigindo, que é a situação mais usual, o ponto inicial de contato é onde o círculo de

topo da engrenagem acionada (neste caso a anelar) corta a linha de ação - exceto quando não há interseção. No último caso, o contato não deve ser feito antes que o ponto de tangência do círculo base do pinhão e da linha de ação seja alcançado. Como de costume, o ponto final de contato é na interseção da linha de ação com o círculo de topo da engrenagem motriz, comumente o pinhão. Como no caso de uma cremalheira, o ponto final é limitado apenas pelos dentes do pinhão.

## 4. Interferência

### 4.1 Interferência envolvente

Existem duas principais curvas usadas para definir o formato dos dentes de engrenagens: a curva evolvente e a curva cicloidal [3,4]. Esta última é usada principalmente em mecanismos de precisão, como a relojoaria, enquanto a primeira é voltada para emprego em máquinas de potência. Outras curvas podem ser usadas, mas sem possuírem as importantes propriedades cinemáticas que garantem o funcionamento suave e eficiente. Concorde para o emprego mais generalizado do perfil evolvente o fato de ser muito simples de ser obtido no processo de fabricação por usinagem.

Denomina-se de interferência envolvente ao fenômeno do contato entre partes dos dentes que não possuem o perfil evolvente; isto ocorre, sobretudo, na raiz dos dentes dos pinhões de engrenagens externas. Em tais engrenagens, consiste do principal problema a ser evitado no projeto cinemático. Já nas engrenagens anelares, a interferência tem ainda maior chance de ocorrer do que nas engrenagens de dentes externos, devido à concavidade dos dentes, pois as circunferências características do pinhão e da anelar têm os centros voltados para o interior.

Baranov [5] apresenta um cálculo interessante para evitar a interferência controlando o número de dentes, similar ao que é mostrado em Mabie e Ocvirk [6] para engrenagens exteriores, mas com detalhamento e aplicação extensiva ao problema das engrenagens anelares. Tais expressões relacionam o número mínimo de dentes do pinhão ( $z_p$ ) com o número de dentes da coroa, a engrenagem de maior diâmetro ( $z_c$ ), que corresponde a anelar. No caso das EAI, a fórmula geral é a seguinte:

$$z_c = \frac{z_p^2 [\sec \alpha]^2 - 4}{4 - 2z_p [\sec \alpha]^2} \quad (1)$$

É a mesma expressão para engrenagens de dentes externos com alteração do sinal do denominador. Esta expressão pode ser simplificada e particularizada para

o ângulo de pressão  $\alpha$  igual a 20 graus, o valor mais usual nas aplicações industriais, de modo que:

$$z_c = \frac{z_p^2 - 34}{34 - 2z_p} \quad (2)$$

Baranov [5] apresenta os resultados na forma de tabela apenas para o ângulo de pressão de 20°. Os valores são mostrados na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Condições mínimas para evitar a interferência envolvente em função do número de dentes.

| $z_p$      | 18  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|------------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $z_c \geq$ | 144 | 81 | 60 | 50 | 44 | 41 | 38 | 36 | 35 |

Nesta tabela,  $z_c=144$  corresponde ao número mínimo de dentes da engrenagem de maior diâmetro, que no caso é a anelar, para esta engatar com um pinhão que tenha apenas dezoito dentes. Qualquer número maior de dentes na anelar não há problemas. Igualmente, o aumento do número de dentes do pinhão evita a interferência evolvente, permitindo seu acoplamento com engrenagens anelares sem interferência com até 35 dentes, que é um número bem reduzido. Comparativamente, tal comportamento é completamente distinto daquele descrito analiticamente no acoplamento de engrenagens com dentes externos, o que demanda atenção especial por parte do projetista.

Porém, deve-se destacar que o impedimento da interferência do pinhão com a anelar não pode ser evitado acima de  $z_p=26$  seguindo a mesma regra anterior, pois existem outros dois tipos de interferência, que ocorrem quando a diferença entre a quantidade de dentes da engrenagem anelar e do pinhão não é muito grande.

### 4.2 Interferência trocoidal

Nas EIA, existem ainda dois outros tipos de interferência que não acontecem nas engrenagens de dentes externos: a interferência trocoidal e a de corte.

A interferência trocoidal consiste da penetração da cabeça do dente da engrenagem anelar na raiz do pinhão, ou seja, uma interseção indevida dos perfis das cabeças de ambas as engrenagens. Neste tipo de interferência, a cabeça do dente do pinhão não acopla adequadamente no vão devido, esbarrando na cabeça do dente da coroa anelar com dentes internos. A figura 6 ilustra de modo exagerado este fenômeno.

Diferentemente da interferência evolvente, uma significativa interferência trocoidal provoca o travamento (grimpamento) imediato do par, impedindo seu movimento. Caso ocorra de modo suave, implica no arranhamento da cabeça do pinhão e da parte inferior do dente da anelar.

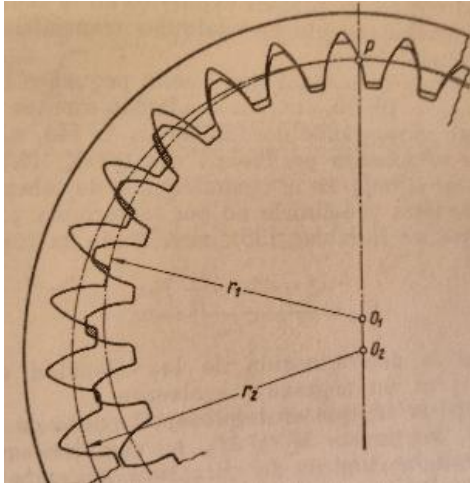


Figura 6: Interferência trocoidal. A cabeça do dente do pinhão não acopla adequadamente no vão, interferindo com a cabeça do dente da coroa anelar com dentes internos.

Para cada número de dentes do pinhão existe um número mínimo de dentes da anelar capaz de evitar a interferência. As formulas para equacionar tal número são complexas e não são expostas aqui [7,8]. Contudo, verifica-se, considerando o ângulo de pressão de 20 graus, que a interferência trocoidal somente passa a ser dominante para número de dentes do pinhão maiores do que 26, seguindo a seguinte formula: para  $z_p$  entre 27 e 79 dentes,  $z_c = z_p + 8$ ; para  $z_p$  iguais a 80 dentes ou mais,  $z_c = z_p + 7$ .

#### 4.3 Interferência de corte

A cinemática de um par de engrenagens está fortemente ligada ao processo de fabricação e, principalmente, às características geométricas da ferramenta de corte, que moldam o formato dos dentes. Num processo de fabricação das EIA, a ferramenta de corte trabalha axialmente (vide Figura 3) e assim pode produzir os dentes um de cada vez ou mesmo usinar dois ou três deles parcialmente. Seu movimento é axial e a retirada da ferramenta é feito segundo esta direção. Porém, durante o engrenamento com um pinhão qualquer, o movimento é eminentemente radial, e não axial.

Assim, um par pode se acoplar bem axialmente, mas pode não se movimentar em qualquer outra direção, travando-se completamente, conforme mostra exageradamente a Figura 7. Nesta figura percebe-se que os dentes da anelar e do pinhão estão tão próximos que o movimento entre eles está praticamente restrito. Não há uma folga frontal suficiente. Observa-se também que, nesta condição, a ocorrência da interferência trocoidal também é provável, mas é um fenômeno menos crítico do que a interferência de corte, pois esta última impede completamente o movimento.

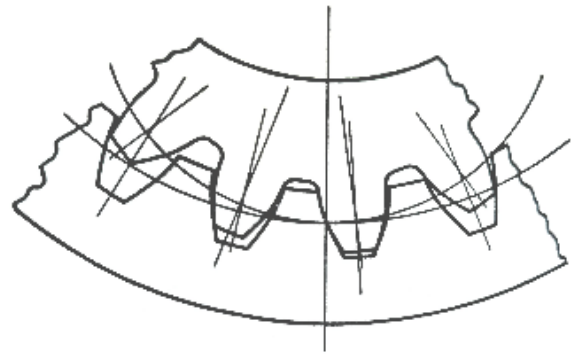


Figura 7: Interferência de corte. O distanciamento entre a engrenagem anelar de dentes internos e a coroa não permite um movimento que não seja axial.

As fórmulas analíticas para controle da interferência de corte ainda são mais complexas do que para a interferência trocoidal [7,8]. A tabela seguinte resume as condições mínimas para o ângulo de pressão de 20 graus.

Tabela 2: Condições mínimas para evitar a interferência de corte em função do número de dentes.

| $z_p$      | 15 | 17 | 19 | 20 | 21 | 23 | 27 | 28 | 30 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $z_c \geq$ | 34 | 35 | 37 | 38 | 39 | 41 | 45 | 36 | 35 |
| Dif.       | 19 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |

Considerando as tabelas apresentadas, é possível traçar uma curva em que aparecem os três tipos de interferência e as regiões onde há interseção entre elas. A Figura 8 apresenta as três curvas em conjunto.

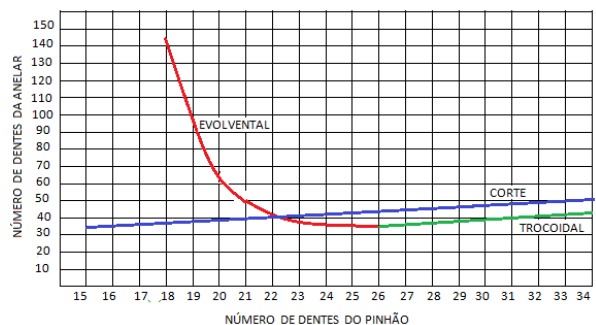


Figura 8: Linhas que delimitam os três tipos de interferência em conjunto, como uma função do número de dentes do pinhão.

Percebe-se que o controle da interferência trocoidal com o ângulo de pressão de vinte graus é feito pela restrição ao fenômeno da interferência de corte. Tais fenômenos são pronunciados para números de dentes do pinhão mais elevados, acima de 22 dentes. Até este valor, é o fenômeno da interferência evolvental que deve ocupar a atenção do projetista, ou seja, se há uma diferença muito pequena no número de dentes entre a engrenagem anelar e a engrenagem interna.

É preciso ressaltar que todos os problemas de interferência se resolvem com a adoção de pinhões com pequenos diâmetros relativamente ao diâmetro da

anelar. Como a diferença entre os diâmetros é fundamental para aumentar a razão de transmissão, e razões de transmissão elevadas é o objetivo maior dos conjuntos planetários, não há qualquer impeditivo prático para evitar os três tipos de interferência, pois é muito raro encontrar engrenagens anelares que atuam com pinhões de diâmetro relativamente grandes.

## 5. Conclusões

A literatura especializada sobre o acoplamento de engrenagens anelares com dentes internos com engrenagens planetárias é muito limitada. Praticamente não há informação suficiente nos livros especializados em projeto de mecanismos e mesmo nas obras mais clássicas que tratam especificamente do estudo de engrenagens.

O assunto, contudo, é de grande importância no projeto de máquinas, pois os conjuntos de redução que utilizam o acoplamento de engrenagens anelares em sua redução têm crescido significativamente nos últimos anos, nas mais diversas aplicações. Porém, seu uso mais destacado ocorre nos projetos de automação e robótica.

Neste trabalho, uma atenção especial foi dada ao problema da interferência, que é crucial no projeto eficiente de engrenagens, mas se reveste de especial complexidade no caso de engrenagens anelares. Foram analisados e explicados detalhadamente dois outros tipos de interferência, além daquele amplamente apresentado na literatura para projeto de engrenagens de dentes externos, que é a interferência evolvental. Também se apresentaram as condições para evitar tais fenômenos, em que se destaca a necessidade de uma proporção adequada entre o número de dentes da

engrenagem anelar de dentes internos e do pinhão planetário.

Uma metodologia própria cerca o tratamento analítico das interferências trocoidal e de corte, com fórmulas específicas e complexas, que não foram aqui explicitadas na sua generalidade, mas cujas referências foram citadas na bibliografia e permitem uma abordagem de casos em que o ângulo de pressão é diferente de vinte graus, que é o valor mais amplamente empregado na prática industrial, para o qual foram apresentadas tabelas de uso prático.

## 6. Referências

- [1] FAIRES, V. M., Mechanisms, Mcgraw-Hill/Kogakusha, Tokyo, 1960.
- [2] SPOTS, M.F., Design of Machine Elements, Prentice-Hall, 1961.
- [3] SHIGLEY, J. E. Elementos de Máquinas, Livros Técnicos e Científicos, 1984.
- [4] ZINOVIEV, V, A, Theory of Mechanisms and Machines, Moscow, 1960.
- [5] BARANOV, G.G. Curso de la Teoria de Mecanismos y Máquinas, Editorial Mir, Moscou, 1979.
- [6] MABIE, H.H., OCVRK, F. W, Mecanismos e Dinâmica das Máquinas, Ao Livro Técnico, 1967.
- [7] INTERNAL RING GEARS: Design and considerations. Disponível em <https://gearsolutions.com/departments/tooth-tips/internal-ring-gears-design-and-considerations/>.
- [8] GEARS, Profile Shift Coefficient. Disponível em: [https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/gear-nomenclature/profile-shift-coefficient.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear-nomenclature/profile-shift-coefficient.html).