

Implementação computacional da solução de problemas de Laplace pelo método dos elementos de contorno em Python

Valladão, R. O. L.^{1*}

1 Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: rodrigo.valladao@edu.ufes.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo realizar a implementação da solução de problemas de Laplace utilizando o método dos elementos de contorno com elementos constantes em Python. Foram utilizadas premissas de propriedades homogêneas e isotrópicas para a formulação da equação integral de contorno que é calculada utilizando quadratura de Gauss. A partir do sistema de equações é utilizado o algoritmo numérico de eliminação de Gauss com pivotação parcial para resolução do sistema.

Abstract

This work aims to implement the solution of Laplace problems using the boundary element method with constant elements in Python. Homogeneous and isotropic property assumptions were used to formulate the contour integral equation that is calculated using Gauss quadrature. From the system of equations, the numerical algorithm of Gauss elimination with partial pivoting is used to solve the system.

Keywords (Palavras chaves): MEC, Python, Laplace.

1. Introdução

As técnicas de análise numérica na engenharia são baseadas na representação de um problema contínuo em uma série de equações discretas. Diversas técnicas podem ser utilizadas para a descrição desses modelos físicos da mecânica do contínuo, dentre as quais podemos citar o método das diferenças finitas (MDF) (SMITH, 1985), o método dos elementos finitos (MEF) (HUGHES, 1987; REDDY, 2005) e o método dos elementos de contorno (MEC) (BREBBIA et al, 1984; WROBEL e ALIABADI, 2002).

O método dos elementos de contorno é uma das técnicas mais poderosas para a solução de problemas da mecânica do contínuo e, junto ao método dos elementos finitos e ao método das diferenças finitas, modificou totalmente a engenharia. Este método surgiu como uma alternativa poderosa entre os outros métodos numéricos, principalmente em problemas que demandam grande precisão, como problemas de concentração de tensões e problemas com domínio infinito.

A principal característica do método dos elementos de contorno é a integração apenas nas fronteiras do problema, ou seja, os elementos estão situados apenas no contorno. Em alguns casos, é necessário o

posicionamento de pontos fonte no domínio, seja para a inserção de graus de liberdade, como em problemas de vibração, seja para a obtenção de propriedades específicas naquele ponto, como uma fonte de calor. Contudo, em equações auto adjuntas, como a equação de Laplace, não é necessário colocar pontos no domínio, discretizando-se apenas o contorno. Para esse tipo de problema, a qualidade da solução dependerá da forma como os elementos são construídos.

Esse trabalho tem como objetivo a apresentação de solução computacional utilizando o método dos elementos de contorno para problemas em engenharia governados pela equação de Laplace, utilizando a linguagem de programação Python.

Avanços recentes nas áreas da vida e da ciência da computação revolucionaram a solução de problemas por meio da aplicação de técnicas computacionais. A linguagem de programação Python (LUBANOVIC, 2014) é gratuita de uso geral e emergiu como uma ferramenta versátil para enfrentar vários desafios computacionais. A simplicidade e os amplos recursos do Python o tornam a escolha ideal para laboratórios de pesquisa de engenharia. A linguagem Python já apresenta pacotes que disponibilizam rotinas matemáticas consagradas para álgebra linear, dessa forma evita-se a disposição de tempo em problemas puramente matemáticos.

O intuito em se produzir um programa computacional próprio está no principal fim que é educacional e acadêmico. Um programa criado do início permite verificar o aprendizado teórico. Podem-se criar rotinas de simples entendimento que por sua vez possam ser apresentadas num ambiente acadêmico. Para demonstrar a capacidade do programa desenvolvido, alguns problemas governados pela equação de Laplace serão tratados e aferidos com suas respectivas soluções analíticas.

2. Metodologia

No caso da teoria de campo escalar, a equação de Laplace governa os problemas estacionários nos quais não há fontes, sorvedouros ou ações externas que atuem diretamente no domínio. Considerando $u(x)$ a variável potencial escalar, representando um campo térmico ou mecânico em estado de equilíbrio, cujo meio possui propriedades homogêneas e isotrópicas tal equação é dada por:

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad (1)$$

Onde as condições de contorno são:

$$u(x) = \bar{u}(x) \text{ em } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$q(x) = \bar{q}(x) \text{ em } \Gamma_2. \quad (3)$$

A dedução da integral de contorno do MEC pode ser feita a partir da denominada forma integral forte associada à equação de Laplace (BREBIA e WALKER, 1980):

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(x) u^*(\xi, x) d\Omega(x) = 0 \quad (4)$$

Na equação (4), a função $u^*(\xi, x)$ é a solução fundamental, que consiste da solução de um problema correlato com domínio infinito, no qual uma fonte concentrada é aplicada num ponto ξ qualquer. Demonstra-se que por meio de um procedimento por integração por partes e aplicação do teorema da Divergência, chega-se a seguinte equação integral de contorno:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (5)$$

Na equação (5) $q^*(\xi, x)$ é a derivada da solução fundamental na direção normal externa ao contorno, denominada de fluxo fundamental, enquanto $c(\xi)$ é um coeficiente relacionado a posição relativa do ponto fonte ξ no domínio (KYTHE, 1995). Os valores da solução fundamental e sua derivada para problemas de potencial são dadas a seguir:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (6)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{2\pi} [(x - x_p)n_x + (y - y_p)n_y] \quad (7)$$

Onde n_x e n_y são as componentes do vetor normal $\vec{n}$ e (x_p, y_p) são as coordenadas do ponto fonte.

Por meio da aplicação dos procedimentos clássicos de discretização do MEC a integral da equação (5) é transformada em um sistema algébrico de equações lineares, que resulta numa forma bem conhecida:

$$H U = G Q \quad (8)$$

Que pode ser arranjado de forma a obtermos um sistema na forma, onde X é a variável que desejamos obter:

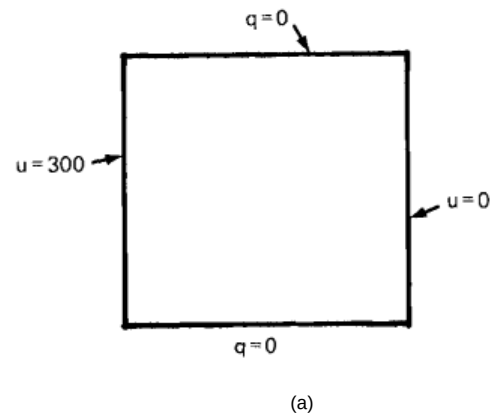
$$A X = F \quad (9)$$

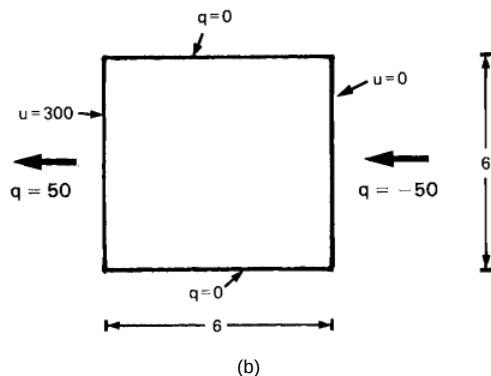
Para resolver esse sistema de equações, é utilizado o algoritmo numérico de eliminação de Gauss com pivotação parcial (CAMPOS, 2007). O desenvolvimento matemático e a equação integral para problemas de Laplace é apresentado em Brebbia et al. (1984).

3. Discussão dos resultados

Como a implementação de um programa direto do Método de Elementos de Contorno de elementos lineares descontínuos seria complexo. Foi optado por separar o programa em três programas menores, que iriam aumentar a complexidade progressivamente. Isso contribui tanto na implementação, quanto encontrar eventuais erros que possam existir no código. Com o objetivo de validar os códigos, foi utilizado os exemplos do livro do Brebbia e Dominguez (1998).

Figura 1 – Definição do problema (a) e condições de contorno (b).

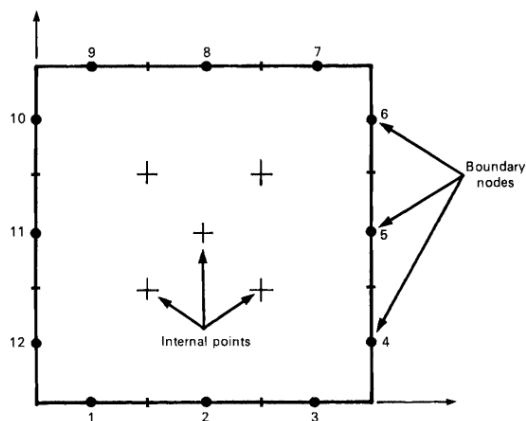




Fonte: (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1998)

Podemos tratar esse exemplo como um caso de condução de calor, sendo que a variável “u” representa a temperatura e a variável “q” representa o fluxo de calor. Além disso, também temos as dimensões do corpo. Logo é possível realizar a discretização do corpo em elementos a serem utilizados no MEC.

Figura 2 – Discretização em elementos e nós internos



Fonte: (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1998)

Vale destacar que essa a discretização da Figura 2 é para elementos contínuos, pois os nós estão no centro do elemento. Os resultados convergiram para os valores da literatura e são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores calculados nos nós.

Nó	u	q
1	252.25	0
2	150.02	0
3	47.75	0
4	0	-52.96
5	0	-48.77
6	0	-52.96
7	47.75	0
8	150.02	0
9	252.25	0
10	300	52.97
11	300	48.74
12	300	52.97

Fonte: Produção do próprio autor.

4. Conclusão

A respeito da Tabela 1, observamos que o valor esperado para o fluxo “q” era de 50. Entretanto, como utilizamos elementos constantes temos um pequeno erro numérico. Uma forma de resolver este problema é aumentar o número de nós da malha. Contudo, iremos aumentar o custo computacional.

Outra solução seria implementar o método com elementos lineares com elementos descontínuos, no qual é possível obter um resultado com menor erro e com um menor número de nós na malha.

5. Referências

- [1] SMITH, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. 3 ed. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [2] HUGHES, T. J. R. The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [3] REDDY, J. N. An Introduction to The Finite Element Method. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 2005.
- [4] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. Boundary Element Techniques. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [5] WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. H. The Boundary Element Method. Wiley, Chichester, 2002.
- [6] LUBANOVIC, B. Introducing Python: Modern Computing in Simple Packages. O'Reilly Media; 1ª edição, 2014.
- [7] BREBBIA, C. A.; WALKER, S. Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [8] KYTHE, O. J. An Introduction to Boundary Element Methods. Boca Raton: CRC Press, 1985.
- [9] BREBBIA C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary Elements An Introductory Course. 2 ed. WIT Press, 1998.
- [10] CAMPOS, F. F. F. Algoritmos Numéricos. 2ª ed. LTC Editora, 2007.