

Mecânica Estatística e Redes Complexas

Santos, T. A. O.^{1*}; Hoffmann, E.²

¹ Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, MT, Brasil.

² Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

* e-mail: tarcis@unemat.br

Resumo

Este estudo investigou a articulação dos fundamentos da mecânica estatística ao estudo de redes complexas, por meio de uma revisão de literatura sistematizada na base de dados Scopus. A pesquisa foi conduzida em duas etapas: uma análise bibliométrica de 252 artigos e, posteriormente, uma leitura integral dos 10% mais citados (26 artigos) construtores de campo. Os resultados revelaram a centralidade de modelos teóricos como os de Albert e Barabási (2002) e Dorogovtsev e Mendes (2002), que consolidaram a transição da teoria dos grafos para modelos dinâmicos baseados em princípios estatísticos. Os documentos analisados foram agrupados em três categorias: (1) consolidação teórica, com ênfase nos fundamentos conceituais; (2) expansão metodológica e interdisciplinar, com destaque para inovações computacionais e métricas aplicadas; e (3) relevância empírica, a partir da aplicação de modelos em sistemas reais como redes elétricas, financeiras e sociais. O estudo aponta que a mecânica estatística oferece um arcabouço robusto para o entendimento de propriedades emergentes em redes complexas, especialmente em contextos dinâmicos.

Abstract

This study investigated the articulation of the foundations of statistical mechanics with the study of complex networks, through a systematized literature review in the Scopus database. The research was conducted in two stages: a bibliometric analysis of 252 articles and, subsequently, a full reading of the top 10% most cited (26 articles) considered field-building. The results revealed the centrality of theoretical models such as those of Albert and Barabási (2002) and Dorogovtsev and Mendes (2002), which established the transition from graph theory to dynamic models based on statistical principles. The analyzed documents were grouped into three categories: (1) theoretical consolidation, with emphasis on conceptual foundations; (2) methodological and interdisciplinary expansion, highlighting computational innovations and applied metrics; and (3) empirical relevance, through the application of models in real systems such as electrical, financial, and social networks. The study indicates that statistical mechanics provides a solid framework for understanding emergent properties in complex networks, especially in dynamic contexts.

Keywords (Palavras chaves): *Complex Networks, Statistical Mechanics, Climatology.*

1. Introdução

A mecânica estatística conecta o mundo microscópico à termodinâmica macroscópica, postulando que um estado macroscópico (definido por energia, volume, etc.) corresponde a um vasto número de microestados (configurações de partículas), todos igualmente prováveis em um sistema isolado. A partir disso, a equação da entropia de Boltzmann ($S = k_B \ln \Omega$) surge como pilar, ligando a entropia macroscópica ao número de microestados acessíveis. Para calcular propriedades físicas, utiliza-se o conceito de ensemble: um conjunto de cópias idênticas de um sistema que permite obter médias estatísticas.

A partir dos ensembles, a mecânica quântica introduz a indistinguibilidade das partículas, que resulta em duas estatísticas fundamentais. A de Fermi-Dirac descreve férmions (spin semi-inteiro), sujeitos ao princípio de exclusão de Pauli, enquanto a de Bose-Einstein rege bósons (spin inteiro), que podem ocupar o mesmo estado quântico. A aplicação dessas estatísticas a gases ideais, usando a função de partição, permite derivar suas equações de estado e demonstra como a natureza quântica das partículas

causa desvios da lei clássica dos gases ideais, conectando diretamente o comportamento microscópico às propriedades macroscópicas observáveis. Nesse ponto, a mecânica estatística oferece um poderoso arsenal para o estudo de redes complexas. A analogia é direta: os nós da rede são como as partículas, e as arestas representam as interações entre elas. Ferramentas estatísticas permitem analisar propriedades emergentes da rede, como grau médio, centralidade e robustez. Essa interseção disciplinar se consolidou como uma abordagem fundamental para analisar sistemas com interações complexas e dinâmicas, cuja complexidade reside tanto no grande número de elementos quanto na heterogeneidade de suas conexões.

O estudo de redes evoluiu da Teoria dos Grafos de Euler (1736) para modelos probabilísticos. O modelo pioneiro de Erdős-Rényi (1959) demonstrou que, ao aumentar a probabilidade de conexão, uma rede passa por uma transição de fase abrupta, análoga à percolação na física, onde um componente gigante que conecta todo o sistema emerge em um limiar crítico. Modelos posteriores, como o de Molloy e Reed

(1998), generalizaram essa ideia para redes com distribuições de grau arbitrárias, como a lei de potência ($P(k) \sim k^{-\lambda}$).

Contudo, redes reais exibem propriedades que esses modelos não capturam totalmente. O modelo de Watts e Strogatz (1998) introduziu as redes de "pequeno mundo", que combinam alta clusterização local com caminhos curtos globais. Pouco depois, o modelo de Barabási-Albert (1999) explicou a origem de redes livres de escala, onipresentes na natureza, através de dois mecanismos simples: crescimento contínuo e conexão preferencial, onde nós com mais conexões atraem novas ligações mais facilmente. Isso resulta em uma distribuição de grau em lei de potência e na formação de hubs. Extensões posteriores refinaram o modelo de Barabási-Albert para maior realismo, incorporando fatores como conexão não linear, envelhecimento (nós perdem a capacidade de atrair conexões com o tempo), crescimento acelerado e a "aptidão" intrínseca de cada nó para competir por novas ligações. Essas generalizações criaram uma base mais robusta para descrever redes reais, que são sistemas dinâmicos e fora do equilíbrio. Hoje, a teoria de redes complexas é aplicada a fenômenos que vão da propagação de epidemias ao funcionamento do cérebro, com modelos sofisticados como redes multicamadas e temporais, consolidando-se na intersecção entre a teoria dos grafos e a mecânica estatística.

Apesar dos avanços, são escassos os trabalhos que sistematizam como os fundamentos da mecânica estatística foram incorporados às análises contemporâneas de redes complexas. Essa lacuna dificulta a identificação de tendências, lacunas e oportunidades de inovação. Assim, o objetivo deste estudo é mapear a articulação teórico-metodológica entre essas duas áreas, destacando os marcos conceituais, metodologias e campos de pesquisa mais recorrentes. Para isso, realizamos uma revisão de literatura na base Scopus em duas fases: uma análise bibliométrica ampla, seguida da leitura integral de artigos seminais. O artigo detalha a metodologia, apresenta os resultados e finaliza com as conclusões.

2. Metodologia

Este estudo objetiva investigar a articulação dos fundamentos da mecânica estatística ao estudo de redes complexas, destacando os marcos e modelos conceituais, as metodologias e os campos de pesquisa mais recorrentes. Para tanto, uma revisão de literatura foi realizada na base de dados Scopus, no mês de maio de 2025, em duas etapas: a primeira, com critérios de busca de amplo alcance, objetivou a análise bibliométrica dos documentos encontrados; depois, a partir dos dados bibliométricos, elegeu os construtores de campo (Bornmann, 2014) para a leitura integral. Para a primeira etapa, foi utilizada a "Advanced query" (TITLE-ABS-KEY ("complex networks") AND TITLE-ABS-KEY ("Statistical mechanics")), resultando

em 356 documentos e, quando limitado a Artigos, restaram 252 documentos. Não foram aplicados outros filtros. Os artigos foram analisados sob duas perspectivas: bibliométrica e de conteúdo. Os 252 documentos compuseram o corpus de estudo bibliométrico, realizado a partir da coleta de dados quanto a citações, bibliográficas, resumos, palavras-chave e referências.

Para a segunda fase, a análise de conteúdo, foi realizada a leitura integral de 10% dos documentos com mais citações, nomeados por Bornmann, (2014) como construtores de campo. Dessa forma, 26 documentos compuseram o corpus de estudo para leitura integral. Tal premissa se justifica ao observar que, na literatura, estudos abordam a definição de "excelência científica" utilizando critérios quantitativos baseados em citações, sendo o percentil top 10% (ou seleções equivalentes de artigos altamente citados) um método bastante adotado para representar contribuições de elevado impacto e relevância, que inspiram e fundamentam pesquisas subsequentes (Bornmann, 2014).

Os 26 documentos foram analisados em três categorias: Consolidação Teórica, Expansão Metodológica e Interdisciplinar e Relevância de Estudos Empíricos. A classificação nas categorias foi realizada conforme foco do objetivo do estudo e, portanto, não é excludente.

3. Discussão dos resultados

A revisão proposta objetivou identificar os estudos mais influentes na intersecção entre mecânica estatística e redes complexas, propondo uma análise bibliométrica dos 252 documentos reportados com os critérios de busca na base de dados Scopus e a leitura integral e análise dos 26 documentos com mais citações (10%), nomeados por Bornmann, (2014) como construtores de campo. Inicialmente, na análise bibliométrica, os estudos foram organizados por ano de submissão, área de conhecimento e quantitativo de citações. Ainda, da leitura dos resumos, foram identificados os principais eixos temáticos das pesquisas. Dessa forma, a Figura 3 apresenta o quantitativo de documentos distribuídos por ano de submissão.

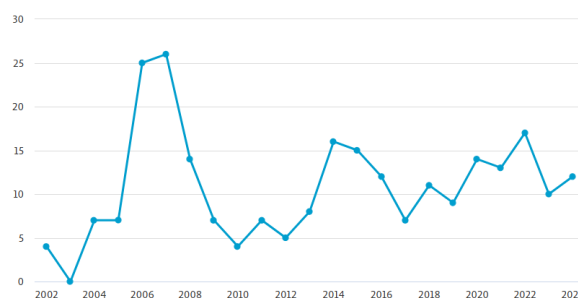


Figura 3: Análise Bibliométrica - Documentos por ano

A partir da Figura 3, é possível verificar que os anos de 2006 a 2008 foram expressivos para o desenvolvimento de pesquisas na área, contudo é na

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

última década (2015-2024) que se concentra 49% do total de documentos produzidos, demonstrando o potencial da área nesses últimos anos. A análise das fontes de publicação (periódicos) apresentou a concentração de 45% dos artigos analisados em cinco principais fontes: *Physica A - Statistical Mechanics and its Applications* (55), *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* (24), *Physical Review E* (16), *Physical Review Letters* (8) e *Physical Review B* (6). As cinco principais fontes de publicação são periódicos da Física, corroborando o adensamento de estudos que tratam de sistemas complexos publicados nessa área. Traço similar foi encontrado na análise da área de conhecimento, conforme dados disponíveis na Scopus, embora multidisciplinar, pode-se observar na Figura 2 que a Física e Astronomia concentram a maior parte dos estudos, com 35,7%, seguida da Matemática, com 29,7%.

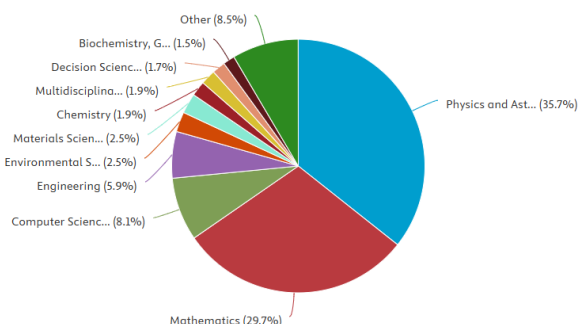


Figura 4: Análise Bibliométrica – Distribuição de áreas de Conhecimento

A distribuição observada na Figura 4 corrobora com os apontamentos de Costa et al. (2007), que destacam o surgimento da área de redes complexas a partir da interface entre mecânica estatística, matemática e ciência da computação, com aplicações em áreas multidisciplinares. O quantitativo de citações é apresentado na Figura 5. É possível observar a partir da Figura 5 que dois documentos se destacam no número de citações. O artigo de Albert e Barabási (2002), *Statistical mechanics of complex networks*, se destaca ao acumular 16.953 citações, consolidando o paradigma da análise estatística em estruturas complexas. Logo em seguida, o trabalho de Dorogovtsev e Mendes (2002), *Evolution of networks*, com 2.496 citações, contribuiu significativamente para o entendimento dos processos dinâmicos de crescimento e evolução topológica das redes.

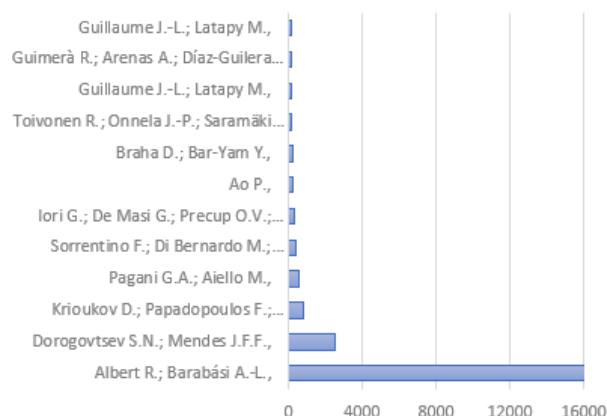


Figura 5: Análise Bibliométrica – Artigos mais citados.

Depois, o estudo de Krioukov et al. (2010), *Hyperbolic geometry of complex networks*, apresentou um novo modelo de representação de redes com 824 citações. Aplicações práticas se destacam, como o levantamento de Pagani e Aiello (2013), que investigou a rede elétrica como um sistema complexo, com 609 citações, e o trabalho de Sorrentino et al. (2007), que analisou a controlabilidade de redes por pinning, citado 409 vezes. A análise do mercado monetário italiano por Iori et al. (2008) resultou em 344 citações. Ao (2004) contribuiu com um novo tratamento para equações diferenciais estocásticas, citado em 220 ocasiões. Outros estudos relevantes incluem Braha e Bar-Yam (2007) sobre desenvolvimento de produtos complexos (207 citações), Toivonen et al. (2006) com modelagem de redes sociais (180), e Guillaume e Latapy (2006; 2004), com contribuições sobre redes bipartidas (179 e 173 citações). Adicionalmente, Guimerà et al. (2002) exploraram propriedades dinâmicas de redes de comunicação (177), enquanto Estrada e Hatano (2007) aplicaram uma abordagem estatístico-mecânica à centralidade de subgrafos (168). Outros sete artigos ainda compõem os 10% mais citados, totalizando 26 artigos para a leitura integral.

Como citado na metodologia, os documentos foram analisados conforme sua contribuição para o campo de pesquisa, realizada conforme foco do objetivo do estudo e, portanto, não excludente. Dos 26 estudos, 6 foram classificados como consolidação teórica da área, 13 como expansão metodológica e interdisciplinas e 7 como relevância de estudos empíricos.

Inicialmente, são apresentados os artigos foram classificados como consolidação teórica da área. Tais artigos contribuíram com modelos teóricos fundacionais, formais ou estruturas conceituais para a compreensão de sistemas interconectados, a nível de generalização e fundação teórica, oferecendo explicações para propriedades emergentes como distribuição de grau em lei de potência, transições de fase e comportamentos fora do equilíbrio.

Entre os estudos, destaca-se o artigo de Albert e Barabási (2002), com 16.953 citações. De fato, Albert e Barabási (2002) são reconhecidos por estabelecerem as bases conceituais da mecânica estatística aplicada às redes complexas, principalmente por introduzir uma abordagem estatística sistemática para a caracterização de redes complexas. O grande diferencial de Albert e Barabási (2002) está na estrutura lógica do estudo: primeiro, os autores caracterizam as propriedades estruturais das redes complexas, com base em observações empíricas de diversos sistemas reais; em seguida, discutem criticamente os modelos teóricos que tentam reproduzir essas propriedades e, a partir disso, avançam para a análise das implicações dinâmicas e físicas, da integração interdisciplinar e da proposição de uma agenda de pesquisa.

Albert e Barabási (2002) ainda consolidaram a transição de modelos de redes clássicos para os modelos dinâmicos, ao analisar criticamente três modelos: Erdős e Rényi (1959), Watts e Strogatz (1998) e Barabási e Albert (1999). Foi a sistematização do modelo Barabási–Albert (1999) que consolidou a transição para uma abordagem dinâmica e generativa da modelagem de redes complexas, incorporando dois princípios fundamentais: crescimento da rede ao longo do tempo e ligação preferencial, prescrevendo que novos nós tendem a se conectar a nós já bem conectados. Tal premissa leva ao surgimento de redes com distribuição de grau em lei de potência, conhecidas como livre escala (scale-free). Os autores ainda demonstram que esse modelo é mais similar às propriedades empíricas observadas, explicando a emergência de hubs e a robustez estrutural das redes. Tal estudo marcou uma ruptura da visão estática puramente probabilística das redes, inaugurando um novo campo de estudo de redes complexas ancorada na mecânica estatística e na modelagem de processos de crescimento não aleatórios, com redes evolutivas e baseadas em regras de crescimento.

Nesse caso, a terminologia utilizada no título do artigo de Albert e Barabási (2002) não é retórica e reflete a aplicação dos princípios da mecânica estatística, tradicionalmente usada para estudar sistemas físicos com muitos corpos (como gases e líquidos), à análise de redes formadas por muitos elementos interconectados (nós e arestas). A ideia central dos autores é que, assim como em sistemas físicos, propriedades coletivas emergem do comportamento agregado de elementos locais em uma rede. Dessa forma, ao tratar as redes como sistemas físicos compostos por muitos elementos interativos, a mecânica estatística passa a ocupar papel central na compreensão de sistemas complexos interconectados como uma abordagem quantitativa e interdisciplinar que fortalece a conexão entre a física teórica e fenômenos observáveis em domínios multidisciplinares.

Outro estudo do mesmo ano contribuiu para a consolidação do campo de redes complexas e mecânica estatística. Dorogovtsev e Mendes (2002) avançam no entendimento da dinâmica de crescimento e evolução temporal das redes, aprofundando os mecanismos que explicam como estruturas complexas se formam e se transformam ao longo do tempo, principalmente em como elas crescem e adquirem suas propriedades topológicas. Também, os autores abordam questões como ciclos de vida de nós, envelhecimento de conexões, e efeitos de saturação. Dorogovtsev e Mendes (2002) utilizam os formalismos da mecânica estatística para modelar e entender o comportamento coletivo e as propriedades emergentes das redes. O estudo contribui de forma decisiva para a consolidação teórica das redes complexas ao sistematizar e formalizar modelos dinâmicos com base na mecânica estatística, utilizando distribuições de probabilidade para descrever a evolução do grau dos nós. Os autores discutem como a ligação preferencial, juntamente com o crescimento da rede (adição contínua de novos nós), é um dos principais motores da formação de redes com propriedades de escala-livre, explorando modelos matemáticos que descrevem esses processos e demonstrando como as regras de ligação (mesmo que estocásticas) levam à emergência de propriedades estruturais complexas, como os hubs e a distribuição de graus em lei de potência.

O trabalho de Sánchez et al. (2002), foca especificamente na dinâmica de estados internos de redes (redes de pequeno mundo, estruturalmente estáticas) e com topologias assimétricas (como redes dirigidas), concentrando-se na topologia direcionada, nas quais as ligações entre os nós têm um sentido definido (alternativa à rede aleatória ou à rede em escala livre), identificando condições críticas para a ocorrência de transições de fase e contribuem para a compreensão das propriedades emergentes em sistemas complexos dinâmicos e assimétricos. É um estudo teórico e computacional, que amplia a aplicação da mecânica estatística para o domínio das redes complexas direcionadas, no qual Sánchez et al. (2002) contribuem ao integrarem topologia e dinâmica fora do equilíbrio, referência na consolidação teórica do campo das redes complexas dinâmicas.

Já em 2004, Ping Ao desenvolve o artigo “Potential in stochastic differential equations: Novel construction”, apresentando uma inovação teórica ao demonstrar que uma estrutura dinâmica incorporada a uma equação diferencial estocástica nos permite construir essa função potencial de otimização global, mesmo em contextos fora do equilíbrio. O autor explicita um procedimento alternativo a tradicional equação de Fokker-Planck, com o cálculo verificado diretamente do potencial e de outras grandezas relevantes associadas à dinâmica do sistema. Segundo Ping Ao (2004) a disponibilidade do potencial sugere

que ferramentas poderosas de mecânica estatística podem ser usadas em situações fora do equilíbrio, fornecendo uma base matemática que para aplicação de ferramentas da mecânica estatística em situações dinâmicas e não estacionárias, como histerese, equilíbrio múltiplo e realimentação, ampliando o escopo analítico.

Em 2006, os já citados Dorogovtsev e Mendes publicaram, em conjunto com um terceiro pesquisador, o artigo “K-core (bootstrap) percolation on complex networks: Critical phenomena and nonlocal effects” (Goltsev; Dorogovtsev; Mendes, 2006), que desenvolve a teoria da percolação do núcleo k (bootstrap) em redes aleatórias não correlacionadas com distribuições de graus arbitrários. Esse trabalho contribui com a consolidação teórica ao demonstrar a indução da transição de fase híbrida, caracterizada simultaneamente por uma descontinuidade típica de transições de primeira ordem e por singularidades críticas de segunda ordem, ressaltam a complexidade das dinâmicas estruturais em redes. Assim, Goltsev, Dorogovtsev e Mendes (2006) contribuem ao integrarem teoria da percolação, transições críticas, e análise de núcleos estruturais, baseando-se em conceitos clássicos de sistemas estatísticos de muitas partículas.

Em 2010, o trabalho de Rozenfeld, Song e Makse, apresenta uma contribuição conceitual ao desenvolver um modelo que conecta dois regimes estruturais fundamentais das redes complexas. Os autores demonstraram que a teoria do grupo de renormalização (GR) aplicada a redes complexas é útil para classificar topologias de rede em classes de universalidade no espaço de configurações, identificando prontamente uma transição fractal de mundo pequeno. Segundo Rozenfeld, Song e Makse (2010), aplicando o fluxo de GR nessas estruturas, são encontrados: um ponto fixo estável e trivial de um grafo completo; um ponto não trivial de uma topologia fractal pura que é estável ou instável de acordo com a quantidade de enlaces de longo alcance na rede e; outro ponto estável de um fractal com atalhos que existem exatamente na transição fractal de mundo pequeno. Assim, ao introduzirem no campo das redes complexas uma analítica antes restrita à física de sistemas críticos, Rozenfeld, Song e Makse (2010) reforçam a base teórica da área, sobretudo ao abordarem conceitos geométricos, escalas fractais e métodos de GR. Dessa forma, a consolidação do campo de estudos de redes complexas fortemente apoiado em princípios da mecânica estatística ocorreu na articulação entre observações empíricas, revisão e proposição de modelos teóricos fundacionais, sistematizados metodologicamente e, potencializado pelo avanço computacional e pela disponibilidade de grandes volumes de dados.

Embora a presente revisão tenha identificado os principais marcos teóricos e estudos de alta citação

da amostra analisada na base de dados da Scopus, é importante ressaltar às limitações do escopo, palavras-chave ou bases de dados utilizadas, não contemplado possíveis trabalhos relevantes. Por exemplo, autores como Newman (2003) e Bianconi (2009) contribuíram significativamente para a formalização de métodos, classificação de topologias e introdução de redes funcionais e dinâmicas acopladas. Na categoria de expansão metodológica e interdisciplinar foram agrupados os estudos que oferecem inovações analíticas, computacionais ou métricas que ampliam as possibilidades de investigação em redes complexas. O foco dos objetivos dos estudos dessa categoria estão em aplicar ou ampliar a aplicação de métodos para novas áreas, com foco em simulações, ferramentas e aplicações. Assim, Guimerà et al. (2002) iniciam aplicando de forma sistemática os princípios da mecânica estatística à modelagem computacional de redes de comunicação. Entre os conceitos abordados pelo estudo estão as transições de fase, comportamento do espectro de potência (critical slowing down), escalonamento crítico e suscetibilidade que, aplicados a modelos de comunicação (pacotes de informação) em diferentes topologias de rede com diferentes topologias de rede, demonstraram que essas estruturas estão sujeitas a transições de fase críticas entre regimes de fluxo livre e colapso.

Depois, em 2004, Guillaume e Latapy discutem sobre redes que apresentam estrutura bipartida natural, onde dois tipos de nós coexistem, com ligações apenas entre nós de tipos diferentes, argumentando a ausência de estudos com profundidade sobre estruturas bipartidas, principalmente pela compreensão de que tal característica é específica de algumas redes complexas. Contudo, os autores propõem que muitas redes complexas observadas na prática, como redes de colaboração, redes de afiliação e outras apresentam a estrutura bipartida subjacente, demonstrando que diversas propriedades topológicas conhecidas das redes complexas (como distribuição de grau, alto coeficiente de agrupamento, distâncias médias curtas, entre outras) podem ser explicadas como consequência natural da projeção de redes bipartidas em redes unipartidas. Em 2006, outro estudo dos autores aborda novamente a natureza bipartida das redes complexas. Guillaume e Latapy (2006) argumentam que redes complexas reais como de colaboração científica, de atores e filmes são ou podem ser modeladas de maneira mais apropriada a partir da natureza bipartida. Os autores argumentam que a projeção de grafos bipartidos como grafos unipartidos, comum em análises empíricas, pode distorcer propriedades fundamentais da rede, como graus de conexão, distribuições de clusterização e estruturas de comunidade, propondo modelos analíticos e computacionais para descrever e gerar redes bipartidas

sintéticas com propriedades estatísticas de redes reais. Dessa forma, os estudos de Guillaume e Latapy (2004, 2006) destacam que o tratamento direto da estrutura bipartida é essencial para a correta análise de certos fenômenos, propondo uma inovação metodológica importante, ao explicar que métodos para análise de grau, centralidade e modularidade devem considerar o paradigma bipartido.

Tratando da vulnerabilidade de redes reais a ataques intencionais, considerando atributos como diversidade de interações e restrições espaciais juntamente com grandezas topológicas, Dall'Asta, Barrat, Barthélemy e Vespignani (2006) propõe uma análise detalhada da robustez e vulnerabilidade estrutural de redes complexas ponderadas, introduzindo novas métricas e critérios para avaliar o impacto de falhas e ataques em sistemas reais. Os autores usam a caracterização de medidas de centralidade topológica e ponderada relevantes como critérios de seleção para a remoção de vértices, simulando diferentes estratégias de ataque e diferentes medidas dos danos causados à rede. Esse estudo formula um novo método de avaliação de vulnerabilidade para redes ponderadas, representando uma expansão metodológica dentro do campo, com o uso de dados empíricos para validação.

Depois, Sorrentino, Di Bernardo, Garofalo e Chen (2007) propõem uma abordagem baseada no controle por pinagem (pinning control), em que um número reduzido de nós da rede é diretamente controlado com o objetivo de conduzir todo o sistema dinâmico para um estado desejado. A inovação é a quantificação, por formulação matemática (espectral da matriz de Laplace modificada) das condições necessárias para a controlabilidade do sistema em função da fração de nós controlados, dos parâmetros de acoplamento e da topologia subjacente da rede. O estudo amplia o campo analítico disponível para o entendimento e manipulação de dinâmicas em redes complexas.

Já Braha e Bar-Yam (2007) investigam propriedades estatísticas de redes organizacionais reais, como redes de pessoas engajadas no desenvolvimento distribuído de produtos (DP), discutindo a importância dessas propriedades para fornecer insights sobre maneiras de aprimorar a tomada de decisões estratégicas e operacionais da organização. Os autores propõem o uso de ferramentas estatístico-mecânicas para compreender e modelar dinâmicas organizacionais, abordando questões como gargalos informacionais, transições de fase organizacionais e desempenho sob flutuações estruturais, unindo conceitos da física e da engenharia de produção.

O artigo de Estrada & Hatano (2007) explora diversos modelos de crescimento e evolução de redes, como redes metabólicas e de interação proteína-proteína, definindo para redes e grafos

moleculares, com base na teoria espectral de grafos, grandezas como entropia, a energia interna e a energia livre de Helmholtz. Os autores criam uma ponte entre teoria espectral e métricas de centralidade, ampliando o campo de aplicação das redes complexas para a computação inspirada em processos físicos.

No estudo de Krioukov et al. (2010), a introdução de uma estrutura geométrica hiperbólica para modelar redes complexas representa uma mudança de paradigma na forma como propriedades estruturais, como alta clusterização e distribuições de grau heterogêneas, são compreendidas. A proposta de embutir redes reais em espaços hiperbólicos possibilita avanços tanto na visualização quanto na predição de conexões ausentes, além de permitir o desenvolvimento de algoritmos de roteamento mais eficientes. Esse enquadramento une conceitos da geometria diferencial, da teoria da informação e da física estatística, indicando uma clara interseção entre disciplinas.

O trabalho de De Domenico e Biamonte (2016) emprega ferramentas inspiradas na mecânica estatística quântica e na teoria da informação para comparar redes complexas. Através do uso de medidas espectrais como a entropia de Rényi e divergências de Kullback-Leibler e Jensen-Shannon, os autores propõem métricas que quantificam a distância estrutural entre redes. A metodologia não só é aplicada com sucesso na análise do microbioma humano, como também amplia as fronteiras analíticas entre a física, a estatística e a biologia computacional.

Já o estudo de Marcucci et al. (2020) representa uma contribuição interdisciplinar, ao propor uma arquitetura de computação neuromórfica baseada em ondas não lineares. Utilizando conceitos da óptica não linear, como sólitons e ondas desviantes, os autores modelam um sistema de aprendizado de máquina altamente paralelo e eficiente. A proposta funde elementos de física teórica, engenharia óptica e inteligência artificial, propondo um novo paradigma de computação analógica.

Por fim, os trabalhos de Shi et al. (2008), Zhang et al. (2008) e Roudi & Hertz (2011) incorporam aspectos reais e dinâmicos da sociedade e da biologia em suas análises. Shi et al. (2008) propõem um modelo epidemiológico inovador com meio infeccioso em redes sem escala, enquanto Zhang et al. (2008) aplicam técnicas de detecção de comunidades em redes legislativas para medir polarização política e Roudi & Hertz (2011) desenvolvem algoritmos de reconstrução de redes dinâmicas fora do equilíbrio, baseando-se em teoria de campo médio dinâmico e de Thouless-Anderson-Palmer.

Os estudos classificados como de relevância empírica são aqueles que aplicam os modelos e conceitos da teoria de redes complexas a sistemas reais, buscando validar teorias ou explorar características estruturais específicas a partir de dados

observacionais. Estes artigos são fundamentais para conectar a teoria com a prática, demonstrando a aplicabilidade dos modelos em contextos como redes elétricas (Pagani & Aiello, 2011 e 2013), redes financeiras (Iori et al., 2008; De Masi; Iori; Caldarelli, 2006) ou redes acadêmicas e universitárias (Holme et al., 2006). A ênfase metodológica está na coleta, construção e análise de redes reais, geralmente com o uso de métricas como grau, centralidade, modularidade e robustez.

O artigo de Pagani e Aiello (2013) apresenta uma revisão abrangente da aplicação de técnicas de análise de redes complexas ao setor de infraestrutura elétrica, utilizando conceitos de propriedades emergentes e distribuição de graus como parâmetros descritivos de sistemas reais compostos por múltiplos elementos interconectados. Ao categorizar os estudos em propriedades topológicas, físicas e aspectos de confiabilidade, os autores evidenciam como as abordagens estatísticas oferecem insights sobre o comportamento sistêmico, favorecendo uma visão macroscópica a partir da análise de estruturas microscópicas. Os autores haviam publicado outro estudo em 2011, analisando redes elétricas de média e baixa tensão sob a ótica das redes complexas, com foco na viabilidade de um mercado de energia descentralizado. Utilizando dados reais, os autores propõem métricas topológicas para avaliar a infraestrutura existente, incorporando variáveis econômicas ao modelo analítico. As propriedades da rede (grau, conectividade, robustez) são associadas a variáveis termodinâmicas de sistemas físicos, como entropia e equilíbrio.

No campo financeiro, o estudo conduzido por Iori et al. (2008) investiga a estrutura de rede do mercado monetário interbancário italiano. A metodologia incorpora métricas como grau, centralidade e conectividade para avaliar a estrutura e dinâmica das interações bancárias, com o objetivo de compreender sua estabilidade e eficiência. Os resultados demonstram que a conectividade entre os bancos não é aleatória, mas apresenta padrões preferenciais que indicam a existência de estruturas hierárquicas e clusters funcionais. Essa abordagem reforça o potencial dos modelos estatísticos na previsão de riscos sistêmicos em redes financeiras.

Ainda no campo financeiro, De Masi, Iori e Caldarelli (2006) aplicam a teoria de redes complexas para caracterizar quantitativamente a formação de comunidades em um mercado financeiro específico. O estudo destaca o uso de um modelo baseado na Lei de Pareto, sem recorrer a mecanismos tradicionais como crescimento ou vinculação preferencial. O modelo reproduz as propriedades estatísticas observadas empiricamente, como a distribuição de graus, modularidade e segmentação funcional das redes bancárias. A principal contribuição está na capacidade de caracterizar diferentes estratégias de negócios a

partir da topologia da rede, demonstrando como a estrutura estatística de interações pode revelar padrões econômicos subjacentes. Ainda nesse setor, Gerlein et al. (2016) apresentam uma análise crítica do uso de modelos simples de aprendizado de máquina na previsão de negociações financeiras, com base em séries temporais do mercado FOREX. A análise das séries temporais com atributos relacionados à sazonalidade, defasagens e padrões de preços aproxima-se dos princípios estatísticos aplicados a sistemas dinâmicos. O estudo evidencia como métodos estatísticos, mesmo os mais simples, podem capturar padrões emergentes e produzir resultados comparáveis aos de modelos mais complexos. Dessa forma, o artigo contribui para o debate sobre a aplicabilidade de modelos estatísticos em contextos de alta incerteza e volatilidade. O estudo de Toivonen et al. (2006) propõe um modelo de crescimento para redes sociais que reproduz características típicas desses sistemas, como alta clusterização, assortatividade e distribuição de graus amplas. O modelo é baseado em uma combinação de apego aleatório e preferencial implícito, simulando a emergência de comunidades coesas e estruturas hierárquicas. A modelagem de crescimento e a análise estatística das propriedades estruturais da rede reforçam o papel dos ensembles e distribuições na descrição de fenômenos sociais. Holme et al. (2007) investigam a dinâmica de redes de afiliação estudantil ao longo de dezoito semestres, analisando a evolução das posições dos estudantes dentro da rede de colegas. A inovação metodológica reside na proposta de métricas ponderadas e na redefinição do coeficiente de agrupamento em redes temporais. A articulação com a mecânica estatística se manifesta na descrição do sistema como um conjunto dinâmico de elementos cujas posições (ou estados) mudam ao longo do tempo, refletindo processos de difusão, centralidade e periferização. A representação dos alunos como vértices e suas interações como arestas permite modelar o comportamento coletivo do sistema sob uma lógica estatística. A observação de tendências estruturais, como o fortalecimento de laços com colegas do primeiro semestre, aproxima-se das análises de transições de fase e formação de clusters na física estatística.

4. Conclusão

O presente estudo objetivou identificar a articulação dos fundamentos da mecânica estatística ao estudo de redes complexas, destacando os marcos e modelos conceituais, as metodologias e os campos de pesquisa mais recorrentes, a partir de uma revisão da literatura indexada na base Scopus. O objetivo da pesquisa foi alcançado ao revisar e sistematizar a articulação dos fundamentos da mecânica estatística ao estudo de redes complexas. A noção de que redes complexas podem ser tratadas como sistemas compostos por muitas unidades interativas, análogas às partículas em sistemas físicos, tem viabilizado o uso

de ferramentas da mecânica estatística no estudo de fenômenos emergentes, como robustez estrutural, formação de hubs, transições de fase e dinâmicas fora do equilíbrio. No que se refere aos marcos e modelos conceituais, os resultados da análise evidenciaram a centralidade de estudos como os de Albert e Barabási (2002) e Dorogovtsev e Mendes (2002), que estabeleceram as bases teóricas para o entendimento das redes como sistemas dinâmicos e não-lineares. Tais estudos consolidaram a abordagem da mecânica estatística como um referencial explicativo e preditivo para o comportamento coletivo das redes.

Em relação às metodologias, foram observadas técnicas analíticas e computacionais aplicadas ao estudo das redes, subsidiadas por métricas inspiradas na mecânica e física estatística, como entropia, energia livre, medidas espectrais e distribuições de probabilidade. Estudos demonstram a incorporação de ferramentas como geometria hiperbólica, redes bipartidas, controle por pinagem e medidas de divergência para capturar a complexidade das interações entre os nós, ampliando o campo analítico e a aplicação de modelos a domínios diversos como biologia, engenharia, computação e ciências sociais.

Quanto aos campos de pesquisa mais recorrentes, a análise bibliométrica revelou que as áreas de Física, Matemática e Ciência da Computação concentram a maior parte das publicações sobre o tema, mas observa-se também uma expansão significativa para áreas aplicadas como engenharia elétrica, economia, neurociência, epidemiologia e análise de sistemas sociais.

De forma geral, o estudo evidencia que a mecânica estatística não apenas fornece um referencial teórico robusto para o entendimento das propriedades emergentes das redes complexas, mas também possibilita inovações analíticas e aplicações interdisciplinares. Nesse contexto, a mecânica estatística surge como um arcabouço teórico fundamental, capaz de modelar redes complexas variadas, com base em princípios como transições de fase, estados fora do equilíbrio e flutuações estatísticas.

Por exemplo, o modelo de Simon (1955) antecipa o mecanismo de crescimento com reforço que leva à emergência de distribuições de grau em lei de potência (Barabási; Albert, 1999); o modelo de aptidão (Bianconi; Barabási, 2001) pode ser mapeado para o gás de Bose, onde os nós da rede correspondem a níveis de energia e as conexões, a partículas bosônicas, evidenciando comportamentos análogos à condensação de Bose-Einstein, em que o nó mais apto concentra uma fração significativa das conexões; também, a formação de componentes gigantes (Erdős; Rényi, 1959; Dorogovtsev; Mendes, 2002), podem ser interpretados como transições de fase estruturais, semelhantes à percolação em sistemas físicos; não

extinguindo os exemplos, as redes em crescimento contínuo (Barabási; Albert, 2002) exemplificam sistemas fora do equilíbrio termodinâmico.

5. Referências

- [1] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L.. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 1, p. 47-97, 2002. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47>
- [2] DOROGOVTSSEV, S. N.; MENDES, J. F. F.. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford University Press, 2003. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1825279>
- [3] ERDŐS, P.; RÉNYI, A.. On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, v. 5, p. 17-60, 1959. https://static.renyi.hu/~p_erdos/1960-10.pdf
- [4] BORNHANN, L.. Do altmetrics point to the broader impact of research? An overview of benefits and disadvantages of altmetrics. *Journal of informetrics*, v. 8, n. 4, p. 895-903, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.joi.2014.09.005>
- [5] KRIOUKOV, D.; PAPADOPOULOS, F.; KITSACK, M.; VAHDAT, A.; BOGUNÁ, M.. Hyperbolic geometry of complex networks. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 82, n. 3, p. 036106, 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106>
- [6] SORRENTINO, F.; DI BERNARDO, M.; GAROFALO, F.; CHEN, G.. Controllability of complex networks via pinning. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 75, n. 4, p. 046103, 2007. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.75.046103>
- [7] BRAHA, D.; BAR-YAM, Y.. The statistical mechanics of complex product development: Empirical and analytical results. *Management science*, v. 53, n. 7, p. 1127-1145, 2007. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1060.0617>
- [8] TOIVONEN, R.; ONNELA, J. P.; SARAMÄKI, J.; HYVÖNEN, J.; KASKI, K.. A model for social networks. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, v. 371, n. 2, p. 851-860, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.03.050>
- [9] GUILLAUME, J. L.; LATAPY, M.. Bipartite structure of all complex networks. *Information processing letters*, v. 90, n. 5, p. 215-221, 2004. <https://hal.science/hal-00016855/document>
- [10] GUILLAUME, J. L.; LATAPY, M.. Bipartite graphs as models of complex networks. In: *Workshop on Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking*, p. 127-139, 2004. <https://graal.ens-lyon.fr/~abenoit/reso06/papier/biparti.pdf>
- [11] GUIMERÀ MANRIQUE, R.; ARENAS, Á.; DÍAZ GUILLERA, A.; GIRALT, F.. Dynamical properties of model communication networks. *Physical Review E*, v. 66, n. 2, p. 026704, 2002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.026704>

XV Encontro Científico de Física Aplicada - 2025

- [12] ESTRADA, E.; HATANO, N.. Statistical-mechanical approach to subgraph centrality in complex networks. *Chemical Physics Letters*, v. 439, n. 1-3, p. 247-251, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2007.03.098>
- [13] SÁNCHEZ, A. D.; LÓPEZ, J. M.; RODRIGUEZ, M. A.. Nonequilibrium phase transitions in directed small-world networks. *Physical review letters*, v. 88, n. 4, p. 048701, 2002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.048701>
- [14] AO, P.. Potential in stochastic differential equations: novel construction. *Journal of physics A: mathematical and general*, v. 37, n. 3, p. L25, 2004. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/3/L01>
- [15] ROZENFELD, H. D.; SONG, C.; MAKSE, H. A.. Small-world to fractal transition in complex networks: a renormalization group approach. *Physical review letters*, v. 104, n. 2, p. 025701, 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.025701>
- [16] DALL'ASTA, L.; BARRAT, A.; BARTHÉLEMY, M.; VESPIGNANI, A.. Vulnerability of weighted networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2006, n. 04, p. P04006, 2006. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2006/04/P04006>
- [17] HOLME, P.; SARAMÄKI, J.. Temporal networks. *Physics Reports*, v. 519, n. 3, p. 97-125, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.001>
- [18] DE DOMENICO, M.. Physics of multilayer networks: Theory and applications. *Nature Reviews Physics*, v. 5, p. 304-321, 2023. <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1604.02021>