

Avaliação da Precisão da Inversa da Soma de Duas Matrizes utilizando uma Aproximação em Série Geométrica

Anna, H. D. S.^{1*}; Loeffler, C. F.¹Lara, L. O. C.^{1&}

¹ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

e-mail: hdantass@hotmail.com; *loefflercarlos@gmail.com; &castrolara@hotmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva verificar, através de simulações computacionais, se é válida a aproximação da inversa da soma de duas matrizes por uma série geométrica. Tal problema é encontrado em casos de dinâmica estrutural com amortecimento e, especialmente, em modelos discretos gerados pelo Método de Elementos de Contorno para solução do problema de valor característico. Três conjuntos de matrizes são resolvidos e a verificação do desempenho é feita por comparação de resultados numéricos e as respectivas soluções analíticas. Para superar esperadas dificuldades associadas ao mau condicionamento matricial, foram efetuadas multiplicações prévias por matrizes compostas por funções de base radial completa.

Palavras-chave: Inversa de duas matrizes, Séries Geométricas, Elementos de contorno.

Abstract

Through computer simulations, this work aims to verify whether the approximation of the inverse of the sum of two matrices by a geometric series is valid. This problem is encountered using matrix analysis in cases of structural dynamics with damping and, especially, in discrete models generated by the Boundary Element Method to solve the characteristic value problem. Three sets of matrices are solved, and performance verification is performed by comparing numerical results and the respective analytical solutions. Previous multiplications by matrices composed of full radial basis functions were performed to overcome expected difficulties associated with system matrix ill-conditioning.

Keywords: Inverse of Matrices, Geometric Series, Boundary Element Method.

1. Introdução

As matrizes desempenham um papel fundamental na álgebra linear, sendo utilizadas para organizar dados, simplificar cálculos, resolver sistemas de equações e modelar problemas complexos que comportam soluções aproximadas. Desta forma, as matrizes contemplam aplicações desde a matemática pura até aplicações em engenharia, computação e ciências da natureza. Sua aplicação se estende a áreas como a computação gráfica, onde são utilizadas para manipulação de imagens e transformações geométricas, e a vibrações mecânicas, sendo essenciais na formulação de equações que descrevem o movimento dos sistemas de vários graus de liberdade junto com o seu acoplamento. No campo da inteligência artificial e aprendizado de máquina, as matrizes são empregadas para organizar e processar

grandes quantidades de dados, tornando-se indispensáveis para o desenvolvimento de algoritmos avançados [1,2].

Dessa forma, o estudo das matrizes não se restringe apenas à teoria matemática, mas também se mostra essencial para o avanço tecnológico e científico, contribuindo para inovações em diversos setores, sendo um poderoso artifício matemático, bastante útil para solucionar problemas em diversas áreas.

Particularmente na área de modelagem numérica, em que se buscam soluções aproximadas para a solução de equações diferenciais parciais, as matrizes desempenham um papel crucial. Dentro da ideia de discretização do meio contínuo, a partir de uma fundamentação matemática robusta, as equações diferenciais parciais são transformadas em equações

algébricas, substituindo a infinidade de pontos do domínio por um conjunto discreto de pontos estratégicos. Daí resulta a formação de um sistema matricial que, dependendo do nível de refinamento e da tipologia do problema, pode ter dimensões muito elevadas, da ordem de bilhões. Os problemas de dinâmica podem alcançar tais proporções, mas a metodologia empregada para a modelagem também interfere no tamanho e na forma do sistema matricial resultante. O método dos elementos de contorno (MEC) é uma dessas técnicas discretas, mas que possui peculiaridades próprias comparadas a outros métodos numéricos: a discretização pode se limitar ao contorno ou, em alguns casos, demandar apenas a integração numérica relativamente à fronteira do problema físico, o que em princípio, produz matrizes de menor dimensão [3].

Dentro do contexto da dinâmica, destacam-se os problemas de valor característico, referentes ao cálculo de frequências e modos naturais de vibração. Algumas metodologias do MEC e de outras técnicas numéricas podem conduzir a necessidade de cálculo destes valores característicos envolvendo a inversa da soma de duas matrizes, uma operação não muito comum, sobre a qual são poucas as aproximações adequadas à sua correta representação. Um desses procedimentos é a série proposta por analogia polinomial a partir da Identidade de Hua [4]. Contudo, sua precisão e efetividade na solução de problemas práticos, bem como o tratamento de suas peculiaridades, não é encontrada na literatura especializada. Assim, o objetivo deste trabalho é verificar se a série geométrica proposta para aproximar a inversa da soma de duas matrizes, é adequada para aplicação junto ao MEC em problemas de autovalor. Um procedimento de para melhorar o condicionamento matricial é aplicado, empregando funções de base radial. Três exemplos são apresentados para ilustrar as particularidades e o comportamento do algoritmo proposto.

2. Motivação

Os problemas físicos podem ser representados de forma muito bem sucedida por equações diferenciais. Porém, a solução analítica de tais equações é limitada a problemas lineares, de baixa ordem, unidimensionais e que evoluem condições de contorno simples. Casos não lineares e equações diferenciais parciais, com coeficientes variáveis, precisam ser resolvidos numericamente, com o apoio da ideia de discretização do contínuo.

Existem diversos métodos baseados nesta ideia, mas os mais poderosos e versáteis são o método das diferenças finitas [5], o método dos elementos finitos [6] e o método dos volumes finitos [7]. Todos estes exigem a discretização e a integração numérica ao longo de

todo o domínio do problema. O método dos elementos de contorno também pertence a esta reduzida classe dos principais métodos numéricos, não apenas pela sua efetividade e precisão, mas por demandar apenas a integração no contorno, gerando matrizes de menor ordem. Também se destaca por sua adequação a meios infinitos e semi-infinitos, problemas de contato e mecânica da fratura e casos em que as fronteiras são móveis e precisam ser reavaliadas ao longo do tempo. Porém, o MEC possui outra característica matemática peculiar: é um método discreto misto, em que a variável primal do problema, bem como sua derivada normal ao contorno, são calculadas simultaneamente. Embora esta funcionalidade seja uma grande vantagem, em alguns casos pode demandar algum procedimento matemático auxiliar, como no caso de certos problemas de valor característico.

3. Modelo de Análise

Sem entrar em detalhes sobre a física de tais problemas, que podem ser encontrados em referências como PRZEMIENIECKI (1985) [8], AFOLABI (1987) [9] e SIRTOLI (2021) [10], é preciso aproximar com precisão a seguinte sentença descrita na Equação 1.

$$C = (A + \lambda B)^{-1} \quad (1)$$

As matrizes A e B são conhecidas, mas o escalar λ , que representa um autovalor, é uma incógnita. Encontra-se aqui uma séria dificuldade, cuja solução é fundamental para que o modelo proposto apresente resultados satisfatórios: a inversão da soma de duas matrizes, uma delas multiplicada pelo escalar λ , que precisa ser explicitado de forma apropriada.

Embora não seja um tema muito comum, há algumas propostas para solução da inversa da soma de duas matrizes. A primeira delas é a adaptação para a álgebra matricial da Identidade de Hua, conforme mostrado na Equação 2.

$$(A + \lambda B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\lambda} (A + AB^{-1}A)^{-1} \quad (2)$$

A Identidade de Hua não elimina a necessidade de se calcular a inversa; sua utilização na literatura visa um melhor condicionamento das operações matriciais.

No trabalho de SIRTOLLI (2021), manipulações adequadas permitiram chegar-se ao seguinte resultado descrito na Equação 3. Entretanto, o autor relatou que foram obtidos resultados de baixa precisão.

$$(\lambda A + B)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} [K^{-1}] \quad (3)$$

Onde K é uma função de A e B . Contudo, é preciso verificar a consistência da identidade de Hua.

Neste sentido, a Equação 2 pode ser simplificada convenientemente, através de uma manipulação algébrica não trivial, apresentada por Schott [11], conforme descrito na Equação 4.

$$(A + \lambda B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\lambda} A^{-1} (B^{-1} + A^{-1})^{-1} A^{-1} \quad (4)$$

Colocando a matriz A em evidência, tem-se que a inversa da soma das matrizes A e B pode ser calculada conforme as Equações 5 e 6.

$$(A + \lambda B)^{-1} = [A(I + \lambda A^{-1}B)]^{-1} \quad (5)$$

$$(A + \lambda B)^{-1} = [(I - (-\lambda A^{-1}B))]^{-1} A^{-1} \quad (6)$$

Dando prosseguimento, o termo entre colchetes será expandido utilizando uma série geométrica, baseada numa aproximação de binômios, mostrado nas Equações 7 a 9.

$$(A + \lambda B)^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} ((-1)\lambda A^{-1}B)^i \right] A^{-1} \quad (7)$$

$$C_{approx}^{-1} \cong \left[\sum_{i=0}^N (-1)^i (\lambda)^i K^{-i} \right] A^{-1} \quad (8)$$

$$C_{approx}^{-1} \cong [I - \lambda K + \lambda^2 K^2 - \dots] A^{-1} \quad (9)$$

Se $K = A^{-1}B$, dado que $|\lambda B| < |A|$ e, N representa a ordem de aproximação. Caso $|\lambda B| > |A|$, a Equação 8 fica conforme descrito na Equação 13.

$$(A + \lambda B)^{-1} = [\lambda B(\lambda^{-1}B^{-1}A + I)]^{-1} \quad (10)$$

$$(A + \lambda B)^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}B^{-1}A + I)^{-1}B^{-1} \quad (11)$$

$$(A + \lambda B)^{-1} = \lambda^{-1} \left[\sum_{i=0}^N (-1)^i (\lambda)^{-i} K^i \right] B^{-1} \quad (12)$$

$$(A + \lambda B)^{-1} = \left[\sum_{i=0}^N (-1)^i (\lambda)^{-i-1} K^i \right] B^{-1} \quad (13)$$

$$C_{approx}^{-1} \cong \left[I - \frac{1}{\lambda} K + \frac{1}{\lambda^2} K^2 - \dots \right] B^{-1} \quad (14)$$

Se $K = B^{-1}A$, dado que $|\lambda B| > |A|$.

Assim, presumindo-se que $|\lambda B| < |A|$, nota-se que, da Equação 9, a soma da inversa das matrizes com um escalar desconhecido foi aproximada em uma expansão polinomial. Entretanto, foram realizadas diversas simulações avaliando a matriz aproximada de C , denominada de C_{approx} , e houve divergências em algumas simulações.

Contudo, pode-se concluir que, a partir das séries de Neumann [12], a Equação 9 é válida, presumindo que esteja trabalhando no espaço de Banach, que $I + \lambda A^{-1}B$ seja invertível e que o raio espectral da matriz $\lambda A^{-1}B$ seja menor que um. O raio espectral de uma matriz C é dado pelo maior valor absoluto de seus autovalores, como mostrado na Equação 15.

$$\rho(C) = \max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n| \} \quad (15)$$

Onde $|\lambda_i|$ é o valor absoluto do i -ésimo autovalor de C . Por vezes, o raio espectral de $\lambda A^{-1}B$ não necessariamente será menor que um, o que irá fazer com que a Equação 8 não convirja para o valor exato podendo até divergir em alguns casos. Sendo assim, um artifício matemático a ser utilizado serão as funções de base radial (RBFs).

4. Pré-condicionamento com RBFs

As funções de base radial são utilizadas na interpolação multivariada e na aproximação de funções, são caracterizadas por dependerem exclusivamente da distância entre pontos, o que as torna particularmente úteis para modelagem de dados distribuídos de maneira irregular. Sua aplicação se estende a diversas áreas, como solução numérica de equações diferenciais parciais [13-16].

Um dos principais atrativos das RBFs é sua capacidade de gerar aproximações suaves e estáveis a partir de um conjunto disperso de pontos, tornando-as amplamente utilizadas em métodos numéricos, como os métodos sem malha empregados na mecânica computacional. Além disso, sua flexibilidade permite que sejam aplicadas a problemas de interpolação e regressão em espaços de alta dimensionalidade, onde métodos tradicionais podem apresentar dificuldades computacionais.

Assim, ao utilizar as funções de base radial (RBF) adequadas, é possível aumentar a precisão da aproximação obtida na Equação 8. Para elaborar a matriz RBF , considere o quadrado ilustrado na Figura 1, os vértices são os pontos que serão utilizados para obter as distâncias e posteriormente, montar a matriz construída a partir de uma função de base radial.

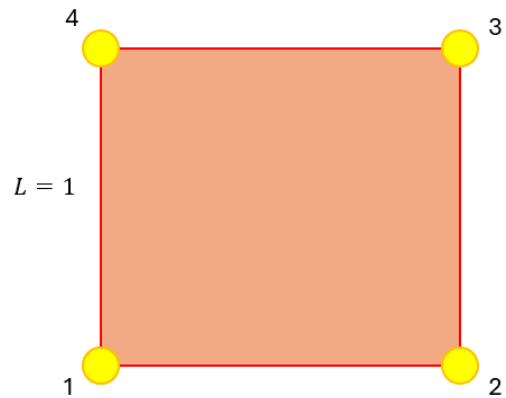


Figura 1: Representação de um quadrado para ilustrar a obtenção dos elementos da Matriz Radius.

Os elementos da matriz *Radius* são descritos pelas distâncias entre os pontos, ou seja, dado o elemento

r_{ij} , este elemento representa a distância do ponto i até o ponto j . Consequentemente, a matriz é simétrica, pois $r_{ij} = r_{ji}$.

Por exemplo, para calcular as distâncias do ponto 1 com os outros pontos, temos a seguinte representação:

- $r_{11} = 0$, pois a distância do ponto 1 até o ponto 1 é nula;
- $r_{12} = 1$, pois os pontos 1 e 2 estão nos extremos da mesma aresta horizontal do quadrado;
- $r_{13} = \sqrt{2}$, pois os pontos 1 e 3 estão opostos pela diagonal; e
- $r_{14} = 1$, pois os pontos 1 e 4 estão nos extremos da mesma aresta vertical do quadrado.

Assim, tem-se que a matriz *Radius* é dada pela expressão contida na Equação 16.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para realizar as aproximações, serão utilizadas três matrizes *RBF*. As funções radiais utilizadas para montar as matrizes *RBF* e, consequentemente, diminuir as normas das matrizes, estão descritas nas Equações 17, 18 e 19.

$$f_1(r) = \frac{1}{1+r} \quad (9)$$

$$f_2(r) = \frac{1}{1+r^3} \quad (10)$$

$$f_3(r) = \frac{1}{1+r^2} \quad (11)$$

As matrizes *RBF* possuem elementos descritos pela Equação 20.

$$(RBF)_{ij} = f(Radius_{ij}) \quad (20)$$

Com a matriz *RBF*, pode-se obter as matrizes modificadas A_{mod} , B_{mod} e K_{mod} por meio da seguinte correlação contida respectivamente nas Equações 21, 22 e 23.

$$(A_{mod})_{ij} = A_{ij}RBF_{ij} \quad (21)$$

$$(B_{mod})_{ij} = B_{ij}RBF_{ij} \quad (22)$$

$$K_{mod} = A_{mod}^{-1}B_{mod} \text{ se } |A_{mod}| > |B_{mod}| \quad (23)$$

E as matrizes modificadas C_{mod} e $C_{aprox_{mod}}$ são obtidas respectivamente por meio das Equações 24 e 25.

$$C_{mod} = A_{mod} + \lambda B_{mod} \quad (24)$$

$$C_{aprox_{mod}} = \left[\left(\sum_{i=0}^N (-1)^i (\lambda)^i K_{mod}^{-i} \right) (A_{mod})^{-1} \right]^{-1} \quad (25)$$

Por fim, retornando aos valores originais por meio da Equação 26, C_{aprox} é calculada a partir da seguinte expressão

$$(C_{aprox})_{ij} = \frac{(C_{aprox_{mod}})_{ij}}{RBF_{ij}} \quad (26)$$

5. Exemplos Numéricos

Inicialmente, considere duas matrizes quadradas A, B e C, todas de ordem n e um escalar λ . Para efeito de equacionamento, será considerado que a norma da matriz A é maior que a norma da matriz de B. A norma de uma matriz C pode ser calculada por algumas equações, neste artigo será considerado a norma de Frobenius [17], dada por:

$$|C| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}^2} \quad (27)$$

A solução analítica da inversa é calculada através de algoritmos bem conhecidos, utilizando a linguagem *Python* com auxílio da biblioteca *NumPy* [18]. Um resultado aproximado de boa precisão deve ser alcançado pela proposta aqui examinada.

Para efeito de comparação, o erro relativo S entre as matrizes P e Q foi calculado utilizando a seguinte expressão na Equação 28.

$$S = \frac{1}{|P|} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (p_{ij} - q_{ij})^2 \right] \cdot 100\% \quad (28)$$

5.1 Exemplo Numérico 1

As matrizes A e B utilizadas nesta simulação estão descritas nas Equações 29 e 30, respectivamente. O λ está descrito na Equação 31.

$$A = \begin{bmatrix} 93 & 66 & 22 & 62 \\ 8 & 41 & 54 & 15 \\ 1 & 32 & 76 & 61 \\ 36 & 10 & 40 & 23 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 24 & 37 & 72 \\ 91 & 95 & 37 & 59 \\ 13 & 42 & 71 & 84 \\ 45 & 43 & 39 & 20 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\lambda = 3 \quad (31)$$

A matriz C , dada pela soma das matrizes A e B , está descrita na Equação 32.

$$C = \begin{bmatrix} 96 & 138 & 133 & 278 \\ 281 & 326 & 165 & 192 \\ 40 & 158 & 289 & 313 \\ 171 & 139 & 157 & 83 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Na Figura 2 está contido o gráfico do erro em função da ordem de aproximação.

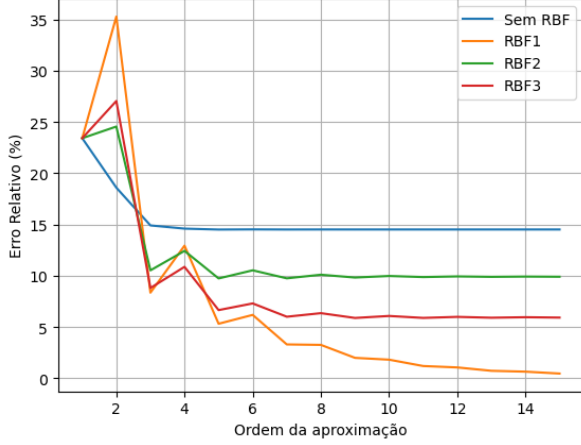


Figura 2: Gráfico do Exemplo Numérico 1.

Observa-se que ao utilizar as funções de base radial, a aproximação foi mais precisa. Entretanto, houve um erro residual em $RBF2$ e $RBF3$. Ademais, a função $RBF1$ conseguiu obter os melhores resultados, conseguindo convergir exatamente para a matriz C após aproximadamente quatorze ordens de aproximação. Seguem as matrizes obtidas após quatorze interações para $RBF1$, $RBF2$, $RBF3$ e sem utilizar RBF respectivamente nas Equações 33, 34, 35 e 36.

$$C_{aprox1} = \begin{bmatrix} 95.03 & 135.40 & 132.76 & 280.94 \\ 279.41 & 326.16 & 165.39 & 190.86 \\ 38.34 & 158.23 & 289.17 & 311.70 \\ 172.44 & 138.85 & 156.69 & 83.39 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$C_{aprox2} = \begin{bmatrix} 36.74 & 90.28 & 142.95 & 298.71 \\ 292.80 & 326.27 & 164.03 & 191.34 \\ 42.76 & 159.21 & 288.89 & 312.27 \\ 177.00 & 139.60 & 156.46 & 82.93 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_{aprox3} = \begin{bmatrix} 61.58 & 107.73 & 138.27 & 291.33 \\ 285.17 & 326.48 & 164.75 & 191.33 \\ 38.78 & 157.75 & 289.08 & 312.65 \\ 175.23 & 139.65 & 159.59 & 83.00 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$C_{aprox} = \begin{bmatrix} 31.66 & 118.10 & 145.67 & 265.32 \\ 339.25 & 344.01 & 153.53 & 203.48 \\ 55.07 & 162.66 & 286.03 & 315.97 \\ 106.88 & 119.17 & 169.63 & 70.36 \end{bmatrix} \quad (36)$$

5.2 Exemplo Numérico 2

As matrizes A e B utilizadas nesta simulação estão descritas nas Equações 37 e 38, respectivamente. O λ está descrito na Equação 39.

$$A = \begin{bmatrix} 88 & 80 & 32 & 82 \\ 3 & 53 & 3 & 21 \\ 41 & 76 & 22 & 1 \\ 20 & 4 & 94 & 28 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B = \begin{bmatrix} 42 & 77 & 14 & 91 \\ 55 & 68 & 39 & 74 \\ 20 & 56 & 70 & 48 \\ 17 & 60 & 90 & 68 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\lambda = 5 \quad (39)$$

A matriz C , dada pela soma das matrizes A e B , está descrita na Equação 40.

$$C = \begin{bmatrix} 298 & 465 & 102 & 537 \\ 278 & 393 & 198 & 391 \\ 141 & 356 & 372 & 241 \\ 105 & 304 & 544 & 368 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Na Figura 3 está contido o gráfico do erro em função da ordem de aproximação.

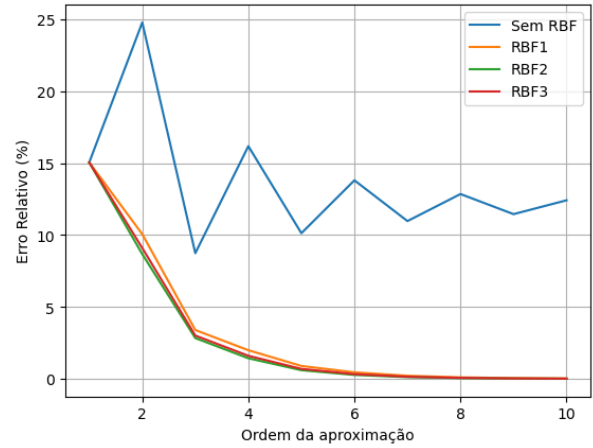


Figura 3: Gráfico do Exemplo Numérico 2.

Neste caso, as RBF mostraram-se eficazes pois a aproximação sem utilizar RBF não convergiu. As funções $RBF1$, $RBF2$ e $RBF3$ tornaram a aproximação possível e obtiveram resultados próximos, conseguindo convergir exatamente para a matriz C após aproximadamente seis ordens de aproximação. Seguem as matrizes obtidas após seis interações para $RBF1$, $RBF2$, $RBF3$ e sem utilizar RBF respectivamente nas Equações 41, 42, 43 e 44

$$C_{aprox1} = \begin{bmatrix} 301.46 & 467.55 & 102.43 & 539.06 \\ 274.46 & 392.57 & 197.76 & 390.28 \\ 140.92 & 356.02 & 371.99 & 240.98 \\ 106.66 & 304.42 & 544.10 & 368.17 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$C_{aprox2} = \begin{bmatrix} 300.01 & 466.41 & 102.59 & 538.32 \\ 275.91 & 392.93 & 197.68 & 390.82 \\ 141.56 & 356.23 & 372.04 & 241.17 \\ 105.95 & 304.07 & 544.14 & 368.08 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C_{aprox3} = \begin{bmatrix} 300.51 & 466.76 & 102.55 & 538.55 \\ 275.46 & 392.83 & 197.69 & 390.65 \\ 141.37 & 356.17 & 372.01 & 241.11 \\ 106.17 & 304.17 & 544.13 & 368.08 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$C_{aprox} = \begin{bmatrix} 286.95 & 444.30 & 114.49 & 539.17 \\ 247.60 & 333.31 & 234.89 & 397.98 \\ 76.08 & 229.99 & 449.41 & 255.38 \\ 127.98 & 349.31 & 515.93 & 362.63 \end{bmatrix} \quad (44)$$

5.3 Exemplo Numérico 3

As matrizes A e B utilizadas nesta simulação estão descritas nas Equações 45 e 46, respectivamente. O λ está descrito na Equação 47.

$$A = \begin{bmatrix} 29 & 83 & 87 & 74 \\ 89 & 41 & 79 & 5 \\ 46 & 45 & 22 & 51 \\ 45 & 51 & 8 & 75 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 33 & 1 & 43 \\ 67 & 36 & 93 & 39 \\ 49 & 57 & 2 & 9 \\ 32 & 97 & 36 & 36 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\lambda = 4 \quad (47)$$

A matriz C , dada pela soma das matrizes A e B , está descrita na Equação 48.

$$C = \begin{bmatrix} 33 & 215 & 91 & 246 \\ 357 & 185 & 451 & 161 \\ 242 & 273 & 30 & 87 \\ 173 & 439 & 152 & 219 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Na Figura 4 está contido o gráfico do erro em função da ordem de aproximação.

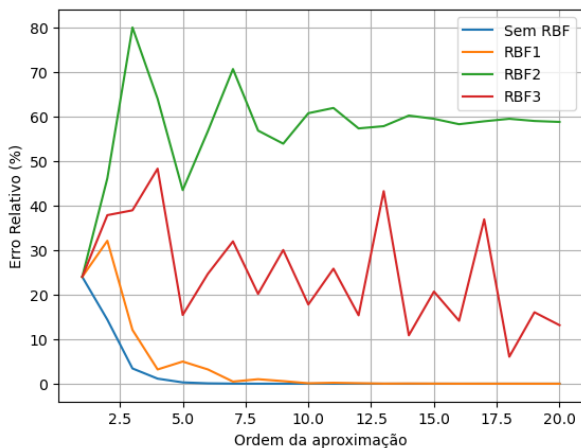


Figura 4: Gráfico do Exemplo Numérico 3.

Nota-se que, nesta simulação, a que não utilizou RBF obteve o melhor resultado, conseguindo convergir exatamente para a matriz C após aproximadamente

cinco ordens de aproximação. A $RBF1$ conseguiu convergir mais lentamente para o resultado exato, em comparação com a simulação sem RBF . As funções $RBF2$ e $RBF3$ não conseguiram convergir. Seguem as matrizes obtidas após cinco interações para $RBF1$, $RBF2$, $RBF3$ e sem utilizar RBF respectivamente nas Equações 49, 50, 51 e 52.

$$C_{aprox1} = \begin{bmatrix} 31.55 & 210.83 & 88.02 & 249.29 \\ 360.55 & 186.72 & 456.78 & 159.96 \\ 237.45 & 266.56 & 26.83 & 90.14 \\ 151.79 & 418.90 & 115.92 & 220.74 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$C_{aprox2} = \begin{bmatrix} 23.07 & 222.52 & 51.53 & 163.44 \\ 301.40 & 169.44 & 371.01 & 191.35 \\ 242.71 & 298.99 & 27.76 & 23.20 \\ 382.52 & 546.13 & 462.77 & 173.71 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$C_{aprox3} = \begin{bmatrix} 8.27 & 161.48 & -1.07 & 212.34 \\ 362.47 & 182.78 & 473.21 & 185.52 \\ 213.55 & 248.09 & 1.33 & 48.53 \\ 191.96 & 478.94 & 135.97 & 171.40 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$C_{aprox} = \begin{bmatrix} 32.04 & 214.38 & 90.17 & 245.65 \\ 356.95 & 185.16 & 451.11 & 161.21 \\ 241.03 & 272.45 & 29.27 & 86.69 \\ 171.59 & 438.16 & 150.92 & 218.51 \end{bmatrix} \quad (52)$$

5.4 Normas, Raios Espectrais e números de condicionamento da matriz

Um problema é considerado bem-condicionado quando possui um número de condicionamento κ da matriz baixo, e mal condicionado quando esse número é alto. Em outras palavras, um problema mal condicionado é sensível a pequenas variações nos elementos da matriz — essas pequenas mudanças podem causar grandes alterações no resultado final. Isso dificulta a obtenção de uma solução precisa para o problema.

Como foi visto, a norma de uma matriz pode ser calculada pela Equação 27. As Tabelas 1, 2 e 3 mostram os valores para as normas e dos números de condicionamento das matrizes aproximadas respectivamente para os exemplos numéricos 1, 2 e 3.

Tabela 1: Normas e Números de Condicionamento das matrizes C sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 1.

	$\ \cdot \ $	κ
C	812.84	17.85
C_{aprox1}	812.38	16.73
C_{aprox2}	815.75	17.31
C_{aprox3}	812.64	16.62
C_{aprox}	821.87	2.478e11

Tabela 2: Normas e Números de Condicionamento das matrizes C sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 2.

	$\ \cdot \ $	κ
C	1380.40	32.00
C_{aprox1}	1382.07	34.28
C_{aprox2}	1381.66	33.59
C_{aprox3}	1381.79	33.81
C_{aprox}	1353.32	90.75

Tabela 3: Normas e Números de Condicionamento das matrizes C sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 3.

	$\ \cdot \ $	κ
C	970.76	13.74
C_{aprox1}	954.67	14.60
C_{aprox2}	1100.80	10.49
C_{aprox3}	958.11	09.48
C_{aprox}	969.17	13.70

A partir das Tabelas 1, 2 e 3, observa-se que as normas e os números de condicionamento foram preservados durante a realização da aproximação, o que indica que a aproximação pode ser uma boa ferramenta para realização da inversa da soma de matrizes com um escalar desconhecido.

O raio espectral de uma matriz pode ser calculado a partir da Equação 15. Nas Tabelas 4, 5 e 6, encontram-se os raios espectrais obtidos para as matrizes K sem modificação e modificadas utilizando RBFs, respectivamente para os Exemplos Numéricos 1, 2 e 3.

Tabela 4: Raios Espectrais das matrizes K sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 1.

	ρ
K_{mod1}	0.90
K_{mod2}	3.58
K_{mod3}	1.87
K	5.24

Tabela 5: Raios Espectrais das matrizes K sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 2.

	ρ
K_{mod1}	0.48
K_{mod2}	0.44
K_{mod3}	0.46
K	1.40

Tabela 6: Raios Espectrais das matrizes K sem aproximação e com aproximação utilizando RBFs do Exemplo Numérico 3.

	ρ
K_{mod1}	0.26
K_{mod2}	0.58
K_{mod3}	1.33
K	0.94

A partir de uma análise visual dos gráficos, nota-se que as curvas cuja matriz K possui raio espectral menor que um conseguiram convergir para a matriz C à medida que se aumentam a ordem de aproximação. Ainda pode afirmar que quanto menor o valor do raio

espectral, mais rapidamente a matriz converge para o resultado esperado. As matrizes cujo valor de K são maiores que um mostraram que não convergem para o valor exato, mesmo estabilizando após certo número de iterações na maioria dos casos, exceto na curva $RBF2$ do Experimento Numérico 3, em que foi obtido um valor de raio espectral de $0.58 < 1$, mas a curva não convergiu para o valor esperado de C .

6. Conclusões

A aproximação da inversa da soma de duas matrizes com um escalar desconhecido para uma expansão polinomial mostrou-se válida desde que o raio espectral da matriz K seja menor que um. Como foi mostrado nos Exemplos Numéricos, demanda-se uma alta ordem de aproximação para que os resultados sejam conforme esperados.

O uso das funções RBF foi apropriado para que a aproximação seja válida visto que é necessário que o raio espectral da matriz seja menor que um. Assim, após analisar os três casos descritos neste trabalho, a aproximação mostrou-se válida para matrizes que não possuem necessariamente raio espectral menor que um.

Entretanto, vale ressaltar que o uso de diferentes RBF pode impactar no resultado das simulações e que pode haver casos, conforme descrito no Exemplo Numérico 3, que não necessariamente utilizar RBF pode haver uma melhora na precisão da aproximação.

8. Referências

- [1] BERNSTEIN, D. S. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas. 2ed. Princeton. Princeton University Press. 2009.
- [2] MEYER, C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. 2ed. Filadélfia. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics. 2023
- [3] BREBBIA, C. A. The Boundary Element method for Engineers. Londres. Pentech Press. 1978.
- [4] COHN, P. M. Further Algebra and Applications. Londres. Springer London. 2003.
- [5] FORSHYTE, G. E., WASOW, W. R. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley and Sons. Nova Iorque. 1960
- [6] HRENNIKOFF, A. Solution of problems of elasticity by the framework method. Journal of applied mechanics, p. 169–175, 1941.

- [7] EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. Handbook of numerical analysis 7, p. 713-1018, 2000.
- [8] PRZEMIENIECKI, S. Theory of matrix structural analysis. [S.l.]: Courier Corporation, 1985.
- [9] AFOLABI, . Linearization of the quadratic eigenvalue problem. Computers & Structures, v. 26, n. 6, p. 1039-1040, 1987.
- [10] SIRTOLI, L. H. SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA FORMULAÇÃO AUTORREGULARIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA. 87f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2021.
- [11] SCHOTT, J. R. Matrix Analysis for Statistics. [S.l.]: John Wiley & Sons, v. 3, 2016.
- [12] WU, M. *et al.* Approximate matrix inversion for high-throughput data detection in the large-scale MIMO uplink. IEEE. p. 2155–2158, 2013. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6572301> acesso em: 21 de abril de 2025.
- [13] LOEFFLER, C. F. *et al.* Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems. Eng. Analysis Boundary Elements, v. 79, p. 81-87, 2017.
- [14] LOEFFLER, C. F. *et al.* Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. Computational Methods and Engineering and Sciences, v. 113, n. 3, p. 387-412, 2017.
- [15] LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W. J. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 61, p. 218-225, 2015.
- [16] LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L. Avaliação da Precisão e Outras Propriedades Numéricas na Integração ao Longo de Superfícies Geradas por Funções de Base Radial. [S.l.]: Anais do CNMAC, 2013.
- [17] Matrix Norm. Disponível em <https://mathworld.wolfram.com/MatrixNorm.html> Acesso em: 21 de abril de 2025.
- [18] NumPy documentation. Disponível em <https://numpy.org/doc/stable/index.html> Acesso em: 21 de abril de 2025.