

Analizando Singularidades em um Modelo de Einstein-Aether Quântico

C. Contantinidis¹, F. G. Alvarenga², E. B. Calavorty³, L. A. M. Diniz⁴,
S. V. de Borba Gonçalves⁵

Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil

G. A. Monerat⁶

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil

¹clisthenis.constantinidis@ufes.br ²flavio.alvarenga@ufes.br ³estevao.calavorty@edu.ufes.br
⁴lorran.diniz@edu.ufes.br ⁵sergio.v.goncalves@ufes.br ⁶monerat@iprj.uerj.br

Resumo

Neste trabalho, investiga-se a possibilidade de eliminação de singularidades cosmológicas em um modelo de minisuperespaço baseado na teoria de Einstein-Aether, utilizando a abordagem da mecânica quântica de Bohm-de Broglie. Aplicando o conceito de valor esperado local para o invariante de curvatura R ao longo das trajetórias quânticas induzidas pela fase da função de onda, verifica-se que a presença de um termo de potencial quântico propicia um efeito repulsivo que regulariza o comportamento do fator de escala do Universo evitando singularidades, em particular, a inicial do tipo *big bang*.

Abstract

In this work, we investigate the possibility of eliminating cosmological singularities in a minisuperspace model based on Einstein-Aether theory, using the Bohm-de Broglie quantum mechanics approach. By applying the concept of local expected value for the curvature invariant R along the quantum trajectories induced by the phase of the wave function, we find that the presence of a quantum potential term leads to a repulsive effect that regularizes the behavior of the Universe's scale factor, thus avoiding singularities, in particular the initial one of the *big bang* type.

1 Introdução

Embora o Modelo Cosmológico Padrão, baseado na Relatividade Geral (RG) ofereça uma descrição precisa do *cosmos* em escalas macroscópicas e tempos posteriores à época de Planck, ele falha ao descrever de maneira completa os regimes extremos onde os efeitos quânticos da gravitação tornam-se relevantes. Nesse contexto, surge a Cosmologia Quântica (Halliwell, 1991) cujo objetivo é investigar as fases iniciais do Universo através da quantização de variáveis cosmológicas, buscando resolver problemas clássicos, como o da singularidade inicial.

Entre as abordagens alternativas à RG, tem-se a Teoria de Einstein-Aether (EA) (Jacobson, Mattingly, 2001), um modelo relativístico que introduz um campo vetorial dinâmico (denominado “éter”) que define preferencialmente um referencial temporal em cada ponto do espaço-tempo, quebrando explicitamente a simetria de Lorentz em escalas altas de energia. Essa teoria preserva a consistência com diversas observações astrofísicas e cosmológicas, ao mesmo tempo em que permite investigar cenários nos quais os efeitos da violação local da invariância de Lorentz podem modificar a evolução primordial do Universo.

Um aspecto crucial dessas investigações refere-se à possibilidade do surgimento de novos tipos de singularidades. Enquanto alguns modelos quânticos propõem a eliminação da singularidade inicial, o acoplamento do campo éter pode, entretanto, gerar regimes nos quais o campo vetorial ou o fator de escala atingem valores extremos não regulares, caracterizando singularidades diferentes daquelas previstas pela RG (Chan, Silva, Satheehkumar, 2020).

Neste trabalho, analisa-se a possibilidade de existência de singularidades no modelo cosmológico quântico de EA, espacialmente plano e preenchido por um fluido de radiação. A análise consiste no cálculo do valor esperado local do invariante escalar de Ricci (R).

2 O Modelo

A super-Hamiltoniana descrevendo o Universo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW),

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (1)$$

e preenchido por um fluido de radiação é dada por (Monerat et al., 2022):

$$\mathcal{H} = \frac{\sigma p_a^2}{12a(\beta + 2)} - \frac{p_T}{a}. \quad (2)$$

Acima N é a função lapso, a é o fator de escala do Universo e T é o grau de liberdade associado ao fluido de radiação. O conjunto (a, T, p_a, p_T) define as variáveis canônicas e seus respectivos momentos conjugados no modelo. Pelo procedimento de quantização de Dirac (Dirac, 2001) os momentos canônicos são promovidos a operadores, o que resulta na equação de Wheeler-DeWitt (WDW):

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \Psi(a, \tau) + \frac{(\beta + 2)}{12\sigma} i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau) = 0, \quad (3)$$

com $\tau = -T$. Nós adotamos o calibre $\dot{T} = 1$ ($N = a$). A escolha da condição de contorno $\Psi(a = 0, \tau) = 0$ possibilita a determinação da solução

$$\Psi(a, \tau) = \Theta(a, \tau) e^{iS(a, \tau)}, \quad (4)$$

onde

$$\Theta(a, \tau) = \frac{a}{\left[4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2}\right]^{\frac{3}{4}}} e^{-\left[\frac{ga^2}{4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2}}\right]} \quad (5)$$

e

$$S(a, \tau) = \frac{a^2 \sigma \tau}{12(\beta+2)(4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2})} - \frac{3}{2} \arctan\left(-\frac{g\sigma\tau}{12(\beta+2)}\right). \quad (6)$$

3 Valor Esperado Local dos Invariantes de Curvatura

Na interpretação causal de Bohm–de Broglie (dBB) (Holland, 1993), cada partícula tem posição definida $\vec{x}(t)$ guiada pela onda $\psi(\vec{x}, t) = \Theta(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)}$. O valor esperado local (VEL) de um observável hermitiano $\hat{A}$ é a função de posição

$$\langle A(\vec{x}, t) \rangle_L = \Re \left[\frac{\psi^*(\vec{x}, t) [\hat{A} \psi](\vec{x}, t)}{\psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)} \right]. \quad (7)$$

Para $\hat{A} = \hat{x}$ obtém-se $\langle x \rangle_L = x$, enquanto para o momento canônico $\hat{p} = -i\nabla$ resulta

$$\langle p(\vec{x}, t) \rangle_L = \nabla S(\vec{x}, t), \quad (8)$$

que coincide com o momento clássico bohmiano $m\dot{\vec{x}}$.

Em nosso modelo, $p_a = \frac{6(\beta+2)}{\sigma} \dot{a}$, o que determina através de (8) as trajetórias quânticas relativas ao fator de escala do Universo:

$$a(\tau) = a_0 \left(1 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{144g^2(\beta+2)^2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Acima a_0 é uma constante de integração arbitrária positiva. Esta solução parece indicar a ausência de uma singularidade inicial do tipo *big bang*, uma vez que o Universo tem um começo com tamanho finito em $\tau = 0$. Entretanto, as singularidades em teorias relativísticas são caracterizadas pela divergência de invariantes escalares construídos a partir do tensor de curvatura. Assim, para investigar a presença de singularidades em nosso modelo, calcularemos o invariante escalar de Ricci:

$$R = \frac{6}{a^3} \ddot{a} = \frac{\sigma \dot{p}_a}{a^3(\beta+2)} \quad (10)$$

Na interpretação dBB, o potencial quântico é definido a partir da amplitude da função de onda:

$$\begin{aligned} Q(a, \tau) &= -\frac{\sigma}{12(\beta+2)} \cdot \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a^2} \quad (11) \\ &= -\frac{\sigma g}{6(\beta+2)(4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2})} \cdot \left[\frac{2ga^2}{4g^2 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{36(\beta+2)^2}} - 3 \right]. \end{aligned}$$

Note que $\dot{p}_a$ carrega os efeitos quânticos a partir do potencial Q :

$$F = \dot{p}_a = -\nabla Q. \quad (12)$$

Usando as expressões (9) e (11) em (12), podemos então calcular a taxa de variação no tempo do momento p_a :

$$\dot{p}_a = \frac{\sigma a_0^4}{24(\beta+2)a^3}. \quad (13)$$

e reescrever o escalar de Ricci (10) como

$$R(a) = \frac{\sigma^2 a_0^4}{24(\beta+2)^2 a^6}; \quad (14)$$

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{24a_0^2(\beta+2)^2} \quad (15)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{\sigma^2 \tau^2}{144 g^2 (\beta + 2)^2}\right)^{-3}.$$

As expressões para o invariante de curvatura R não divergem em nenhum ponto do intervalo $\tau \in [0, \infty)$. O fator de escala $a(\tau)$ nunca se anula e os denominadores das expressões para R são sempre estritamente positivos. Em particular, o fato de R não possuir uma dependência explícita do operador momento $\hat{p}_a$, transforma os resultados expressos em (14) equivalentes aos obtidos com definição de valor esperado local (7). A Figura 1 colocada no Anexo ilustra o comportamento regular do escalar de Ricci para todo intervalo de tempo $\tau \geq 0$.

4 Conclusão

Neste trabalho, investigamos a regularidade geométrica de um modelo cosmológico baseado na teoria EA, quantizado segundo a interpretação dBB. Utilizamos o conceito de VEL para calcular, ao longo das trajetórias quânticas do fator de escala, o invariante escalar de Ricci, com o objetivo de verificar a presença ou ausência de singularidades tipo *big bang*. A função de onda obtida a partir da equação de Wheeler-DeWitt permite a determinação da trajetória bohmiana do fator de escala, que se revelou regular e não nula para todo $\tau \in [0, \infty)$.

O potencial quântico calculado a partir da amplitude da função de onda induz uma força de caráter repulsivo que atua de modo a evitar a singularidade inicial. As expressões obtidas para o invariante R em termos do fator de escala e do tempo são analíticas, finitas e decrescem para zero em tempos grandes, evidenciando a regularização da curvatura.

Futuramente, pretendemos estender a análise efetuada nesse trabalho para outros modelos do tipo EA com conteúdos

materiais diferentes, além de trabalhar com outros invariantes de curvatura, como o invariante quadrático de Ricci $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e o escalar de Kretschmann K .

5 Agradecimentos

Os autores agradecem à comissão organizadora do XV Encontro Científico de Física Aplicada pela excelência do evento.

Referências

- [1] Chan, R., Silva, M. F. A. da, Satheeshkumar, V. H. Existence of New Singularities in Einstein-Aether Theory JCAP05 (2020) 025. arXiv:1912.12845v3 [gr-qc].
- [2] Dirac, P. A. M. Lectures on Quantum Mechanics. New York: ? Dover Publications, 5 ed., 2001.
- [3] Halliwell, J. J.. Introductory lectures on quantum cosmology, in Proceedings of the 7th Jerusalem Winter School for Theoretical Physics. Eds. S. Coleman, J. Hartle, T. Piran, S. Weinberg. Singapore: World Scientific (1991).
- [4] Holland, P. R. The Quantum Theory of the Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Interpretation of Quantum Mechanics (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [5] Jacobson, T.; Mattingly, D. Phys. Rev. D 64, 024028 (2001). arXiv:gr-qc/0007031.
- [6] Monerat, G. A., Goldoni, O., Alvarenga, F. G., Oliveira-Neto, G., Corrêa Silva, E. V. Eur. Phys. J. Plus (2022) 137:1121.

Anexo: Gráfico do Invariante de Curvatura R versus Tempo.

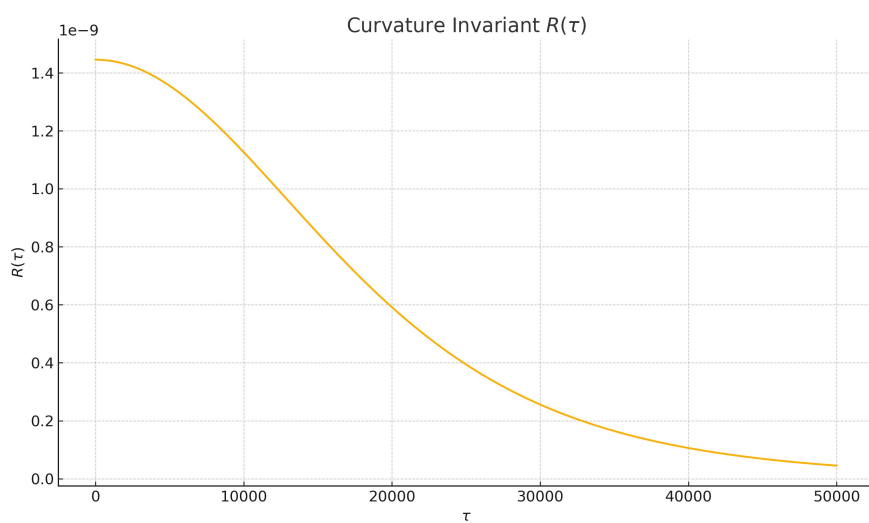


Figura 1: Valor esperado local do escalar de Ricci $\langle R \rangle_L(\tau)$. Aqui consideramos $\sigma = \beta = 0,001$, $g = \sqrt{2}$ e $a_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2^3} \sqrt{\frac{8}{g}}$.