

Análise de singularidades via invariantes de curvatura em cosmologias tipo Kaluza-Klein e Modelo Cosmológico Padrão

G. I. Barbosa¹

¹Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil

F. G. Alvarenga²

²Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil

¹grasiely.barbosa@ufes.edu.br ²flavio.alvarenga@ufes.br

Resumo

Este trabalho compara o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) com um modelo tipo Kaluza–Klein hexadimensional reduzido a quatro dimensões. No caso do MCP, revisa-se a solução $a(t) \propto t^{1/2}$ para a fase de radiação. Já no modelo de Kaluza–Klein no vácuo, as equações de Einstein são reduzidas a um sistema dinâmico para $a(t)$ e o campo escalar $u(t)$, com soluções obtidas via reparametrização $dt = a^3 d\theta$. Os gráficos gerados no *Mathematica* ilustram uma fase inicial de contração seguida de expansão. Por fim, discute-se a análise do escalar de Ricci R e do invariante quadrático de Ricci $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ como ferramentas para análise do comportamento geométrico e a presença de possíveis singularidades em ambos os modelos.

Palavras-chave: Cosmologia, Singularidades, Invariantes de curvatura.

Abstract

This work compares the Standard Cosmological Model (SCM) with a six-dimensional Kaluza–Klein-type model reduced to four dimensions. In the SCM case, we revisit the solution $a(t) \propto t^{1/2}$ for the radiation-dominated phase. For the vacuum Kaluza–Klein model, Einstein’s equations are reduced to a dynamical system for the scale factor $a(t)$ and the scalar field $u(t)$, with solutions obtained by the reparametrization $dt = a^3 d\theta$. The plots generated in *Mathematica* illustrate an initial contraction phase followed by expansion. Finally, we discuss the analysis of the Ricci scalar R and the Ricci quadratic invariant $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ as tools to investigate the geometric behavior and the presence of possible singularities in both models.

Keywords: Cosmology, Singularities, Curvature Invariants.

1 Introdução

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) baseia-se na Teoria da Relatividade Geral [1] e utiliza a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (1)$$

Acima $a(t)$ representa o fator de escala do Universo espacialmente plano [2]. Ela descreve um universo quadridimensional homogêneo e isotrópico partindo de um estado singular (o *big bang*), em que a densidade de energia e a temperatura eram infinitas e a distância própria entre quaisquer dois pontos do espaço-tempo era nula. A partir desse ponto, o Universo evolui sob expansão adiabática, resfriando-se até temperaturas próximas de zero na atualidade.

Em contraste, teorias multidimensionais do tipo Kaluza–Klein estendem o espaço-tempo a cinco (ou mais) dimensões, acoplando a gravitação a campos externos de origem geométrica não-trivial. A base para este modelo reside na lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[uR - \frac{1-D}{D} \frac{u_{;\alpha} u^{;\alpha}}{u} - \frac{\psi_{;\alpha} \psi^{;\alpha}}{u^{\frac{2}{D}}} \right]. \quad (2)$$

Neste trabalho consideraremos a ação gravitacional em seis dimensões. Após a compactificação das dimensões extras, a lagrangiana (2) gera, via **princípio de ação mínima** em quatro dimensões, não apenas o termo de Einstein-Hilbert (descrevendo a gravidade), mas também: (i) um campo escalar $u(t)$ que parametriza o raio da dimensão extra compactificada, e (ii) a componente ψ do campo de Maxwell generalizado.

Considerando-se o caso de vácuo e anulando o setor eletromagnético, obtém-se, após redução dimensional, um cenário em que a métrica FLRW quadridimensional convive com dois campos escalares: um proveniente da componente interna da métrica e outro originado do 2-forma generalizado de Maxwell. Essas soluções revelam um universo primordial cuja evolução temporal difere qualitativamente do modelo padrão, apresentando, por exemplo, fases de contração inicial até que o fator de escala atinja um mínimo não nulo, seguido por expansão idêntica à do MCP.

É importante destacar que este trabalho consiste em uma revisão fundamentada em uma dissertação de mestrado [3] e no artigo [4], tendo como objetivo principal promover o aprendizado no âmbito da iniciação científica.

2 Metodologia

2.1 Modelo Cosmológico Padrão (FLRW)

A dinâmica deste universo é governada pelo princípio variacional aplicado à lagrangiana de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} R \sqrt{-g} \quad (3)$$

onde: R é o escalar de Ricci, invariante fundamental de curvatura calculado a partir da métrica FLRW, $\sqrt{-g}$ é o elemento de volume associado à métrica (1) e G é a constante gravitacional.

As equações de movimento resultantes (equações de Friedmann) conectam diretamente a taxa de expansão cósmica $H(t) \equiv \dot{a}/a$ ao conteúdo energético do universo [5]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (4)$$

sendo $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ a densidade total de energia, composta por:

1. Matéria ($\rho_m \propto a^{-3}$);
2. Radiação ($\rho_r \propto a^{-4}$);
3. Constante cosmológica ($\rho_\Lambda = \text{constante}$).

Para o caso específico da radiação (equação de estado $P = \frac{1}{3}c^2\rho$), a solução das equações de Friedmann mostra que o fator de escala evolui temporalmente como:

$$a(t) \propto t^{1/2}$$

Relação obtida ao resolver a equação diferencial para $\rho_r \propto a^{-4}$ e reparametrizar a solução em função do tempo cósmico t .

2.2 Modelo tipo Kaluza–Klein

Em teorias de tipo Kaluza–Klein, estende-se o espaço-tempo multidimensional, com a métrica

$$ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N, \quad (5)$$

onde

$$g_{MN} = \begin{cases} g_{00} = 1 \\ g_{ij} = -a(t)^2(1+kr^2)^{-1}\delta_{ij} \\ g_{ab} = -u(t)\delta_{ab} \end{cases}$$

em que $(i, j = 1, 2, 3)$ e $(a, b = 4, 5)$ e, $u(t)$ é o campo escalar associado ao tamanho dessa dimensão. No caso de vácuo ($\rho = 0$) e anulando-se as componentes eletromagnéticas assumindo $D = 2$, a equação (2) descreve o cenário em que adotamos a métrica FLRW da equação (1), chegando a um conjunto de soluções para a e u . Para isso, foi necessária uma reparametrização temporal,

adotando $dt = a^3 d\theta$, o que permite encontrar as soluções em função de θ [4].

$$a(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{\sin A\theta}} \frac{\tan^{\pm \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{A\theta}{2}}{\sqrt{1 + k \tan^{\pm \frac{4}{\sqrt{6}}} \frac{A\theta}{2}}} \quad (6)$$

$$u(\theta) = u_0 \sin A\theta \quad (7)$$

No intervalo $0 < \theta < \pi$, à medida que as soluções tendem aos valores das extremidades, é possível analisar o comportamento de ambas no início do Universo (para $\theta \rightarrow 0$, temos $t \rightarrow 0$, e para $\theta \rightarrow \pi$, temos $t \rightarrow \infty$), a partir das análises gráficas que foram obtidas utilizando o software *Mathematica*.

No gráfico da Figura 1, a função a diverge quando $\theta \rightarrow 0$, atinge um valor mínimo em um certo ponto e diverge novamente para $\theta \rightarrow \pi$. Já no gráfico da Figura 2, o campo escalar u cresce a partir de zero, atinge um valor máximo e, em seguida, decai. Ambos os gráficos indicam uma breve fase de contração no início da expansão, o que difere do modelo cosmológico padrão, no qual o Universo se expande infinitamente.

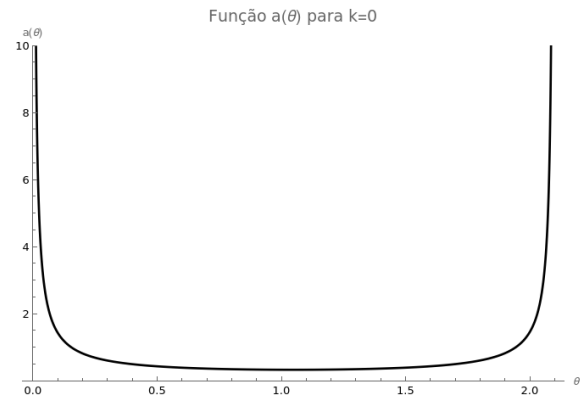


Figura 1: Fator de escala $a(\theta)$.

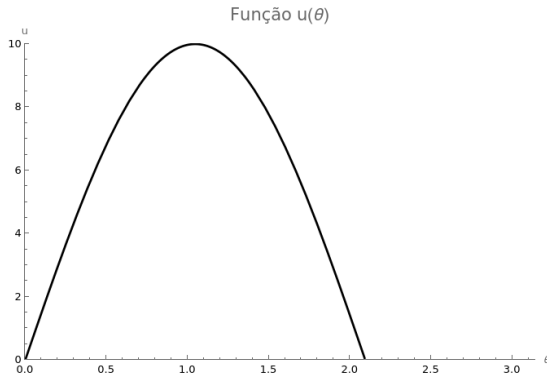


Figura 2: Campo escalar $u(\theta)$.

3 Discussão dos resultados

No Modelo Cosmológico Padrão (FLRW), os invariantes de curvatura calculados foram: o escalar de Ricci R e o invariante quadrático de Ricci $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ que desempenham um papel importante na caracterização das propriedades geométricas do espaço-tempo. Para o modelo FLRW, sempre para $k = 0$, o invariante de Ricci

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (8)$$

para $t \rightarrow 0$, $R = 0$, enquanto $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ que é dado por

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 12 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + 12 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4 \quad (9)$$

para $t \rightarrow 0$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \rightarrow \infty$, sinalizando a presença de uma singularidade inicial, interpretada como o *big bang*.

Por outro lado, o modelo de Kaluza-Klein no vácuo considera uma extensão do espaço-tempo a seis dimensões, no entanto ao compactificar as dimensões extras se tornando um modelo de 4 dimensões, fazendo a reparametrização

$dt = a^3 d\theta$, os invariantes de curvatura apresentam o seguinte resultado [4]:

$$R = -\frac{6}{a^6} \left(\frac{a''}{a} + \frac{2a'^2}{a^2} + ka^4 \right) \quad (10)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{12}{a^6} \left(\frac{a''^2}{a^2} + \frac{2a'^2}{a^2} \frac{a''}{a} + \frac{a''^4}{a^4} \right) \quad (11)$$

Analisando a solução $a(\theta)$ assintoticamente em $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \pi$, considerando apenas o termo positivo e fazendo uma substituição $(\pi - \theta) = \phi$, temos as seguintes expressões assintóticas

$$a(\theta) = \begin{cases} \frac{a_0}{2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}} \theta^{\frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}}; & \theta \rightarrow 0 \\ \frac{a_0}{2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}} \phi^{-\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}}; & \theta \rightarrow \pi \end{cases}$$

substituindo as expressões acima em (10) e (11), foi obtido tanto para R quanto para $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ que ambos divergem para $\theta \rightarrow 0$, enquanto para $\theta \rightarrow \pi$ convergem para 0. Nota-se um comportamento semelhante ao modelo FLRW, onde o Universo tem um começo singular.

Em contrapartida, para um caso multidimensional, os invariantes de curvatura assumem um resultado diferente. No nosso caso hexadimensional,

$$R = 0$$

e

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$$

o que parece revelar a ausência de singularidades no modelo. Futuramente, pretende-se calcular um terceiro invariante que, o Escalar de Kretschmann ($R_{abcd}R^{abcd}$), para confirmar a ausência da singularidade inicial tipo *big bang*

em nosso modelo com fase inicial de contração.

4 Considerações Finais

Reforçamos a construção do modelo tipo Kaluza–Klein, destacando sua relevância para o entendimento do universo primordial em um modelo alternativo. A formulação em seis dimensões, com o campo escalar u associado à dimensão extra, permite isolar efeitos geométricos puros que, no regime inicial de expansão, podem conduzir a fases singulares de contração e expansão.

Os resultados preliminares para o fator de escala $a(\theta)$ e o campo escalar $u(\theta)$ fornecem uma base consistente para uma análise geométrica por meio dos cálculos dos invariantes de curvatura, a fim de verificar a presença ou não de singularidades, como no modelo do big bang.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem à comissão organizadora do XV Encontro Científico de Física Aplicada pela excelência do evento. Agradecem também à Fundação

de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo (FAPES) pelo apoio financeiro e pela oportunidade de desenvolver este trabalho no âmbito da iniciação científica.

Referências

- [1] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [2] J. N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [3] F. G. Alvarenga. “Cosmologia Primordial com dois Campos Escalares”. Dissertação de Mestrado. Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, 1995.
- [4] F. G. Alvarenga e J. C. Fabris. “A Primordial Cosmological Scenario with Two Scalar Fields and Matter”. Em: *Astrophysics and Space Science* 226 (1995), pp. 109–124.
- [5] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. 2ª ed. West Sussex: John Wiley e Sons Ltd, 2003, p. 200.