

Solução numérica bidimensional da equação de propagação da Onda Acústica em meio não-homogêneo pelo Método das Diferenças Finitas

Peres, R. A.^{1*}; Chacaltana, J. T. A.¹

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: renan.peres@edu.ufes.br

Resumo

É apresentado a solução numérica explícita de segunda ordem no tempo e no espaço da equação bidimensional da propagação da onda acústica para meio não-homogêneo, incluindo o termo de fonte. O esquema numérico em diferenças finitas é aplicado ao problema oscilatório de uma membrana quadrada de comprimento unitário e submetido a uma fonte unitária uniformemente distribuída e fonte unitária pontual. É considerado uma membrana constituída de dois meios não dispersivos com velocidade de propagação $c_1^2 = 1$ e $c_2^2 = 2$. O meio 2 é um quadrado interno concêntrico cujo comprimento diminui conforme a espessura da camada externa aumenta. Em todos os casos simulados, a condição de estabilidade numérica é de 0.5 para o número de Courant. O teste de malha realizado para uma espessura da camada externa de 0.20 permite concluir que uma resolução espacial da grade de 1/50 é suficiente. Os resultados para uma fonte distribuída somente no quadrado interno, meio 2, cujo comprimento diminui mostram que tendem ao comportamento da fonte pontual.

Palavras-chave: Onda Acústica, Meio não-homogêneo, Membrana, Diferenças Finitas.

Abstract

The explicit second order numerical solution in time and space of the two-dimensional equation of acoustic wave propagation in inhomogeneous medium, including the source term, is presented. The Finite-Difference numerical scheme is applied to the oscillatory problem of a square membrane of unit length and subjected to a uniformly distributed unit source and a point source. A membrane consisting of two non-dispersive media with propagation velocities $c_1^2 = 1$ and $c_2^2 = 2$ is considered. Medium 2 is a concentric inner square whose length decreases as the thickness of the outer layer increases. In all simulated cases, the numerical stability condition is 0.5 for Courant number. The mesh test performed for an outer layer thickness of 0.20 allows us to conclude that a spatial resolution of the grid of 1/50 is sufficient. The results for a source distributed only in the inner square, medium 2, whose length decreases show that they tend to the behavior of a point source.

Keywords: Acoustic Wave, Inhomogeneous Medium, Membrane, Finite-Difference.

1. Introdução

A busca por soluções e o entendimento acerca do comportamento das ondas de pressão (Ondas Acústicas) e sua propagação nos mais diversos materiais representa um papel fundamental para o avanço tecnológico em diversas áreas (Sheu & Fang [1], Neto [2], Hoffelner *et al.* [3]).

Esse entendimento acaba por envolver tanto o estudo dos efeitos lineares em meios homogêneo e não-homogêneo (Picolli *et al.* [4], Araujo [5], Costa [6], Valente [7], Neto [2]) quanto a busca por soluções que representem os efeitos não-lineares das Ondas Acústicas (Beyer [8], Lauterborn [9], Pierce [10], Garrett [11], Hamilton & Blackstock [12]).

Nesse contexto, o desenvolvimento de diferentes tipos de métodos numéricos e suas

aplicações a problemas acústicos (Método de Diferenças Finitas - Long [13], Guimarães [14]; Método de Elementos Finitos - Kagawa [15], Campos-Pozuelo [16], Hoffelner *et al.* [3]; Método de Volumes Finitos - Pino [17], Chacaltana [18], Valente [7]) passou a constituir uma importante ferramenta na análise dos mais diversos tipos de cenários na área. Dentre eles, quando se trata dos fenômenos acústicos relacionados a mudança do meio em estruturas específicas.

Diante disso, o presente trabalho buscou encontrar uma solução numérica para a equação linear da Onda Acústica com termo fonte referente a meios não-homogêneos. O objetivo é analisar o comportamento da propagação da Onda Acústica ao longo de diferentes materiais em um tipo específico de estrutura com grande valor de aplicação tecnológica, as membranas (Carneiro [19]).

Para isso, o Método de Diferenças Finitas foi utilizado. Uma membrana quadrada de lado unitário composta por dois tipos de materiais foi considerada (Fig. 1). A malha foi gerada no Octave, bem como, a programação da equação discreta. Uma fonte de pressão unitária foi aplicada em todo o quadrado menor (meio 2) e a condição de Dirichlet igual a zero ($P = 0$) foi aplicada no contorno do quadrado maior (meio 1).

Nesse modelo, a pressão foi calculada de forma exata nos nós da malha, enquanto a propriedade física característica de cada meio (velocidade c da onda) foi avaliada entre os nós, uma vez que foi utilizada diferenças finitas centrada.

Testes de malha foram realizados considerando diversas densidades de discretização. Os testes mostraram uma boa convergência dos resultados para uma densidade de 50 espaçamentos (Δx e Δy) ou mais. Os resultados acerca da propagação da pressão se mostraram fisicamente coerentes.

2. Equação de propagação da onda acústica para meio não-homogêneo com termo fonte

Seguindo o procedimento descrito em Picolli *et al.* [4] e Peres *et al.* [20] chegamos a equação linear de propagação da Onda Acústica para meio não homogêneo, incluindo o termo de fonte, Eq. (1)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c^2 \nabla P) = \ddot{P}_f \quad (1)$$

A equação acima é adimensional, onde o coeficiente de compressibilidade E_0 (N/m^2) é usado como pressão típica, c_0 (m/s) como velocidade típica e L_0 (m) representando um comprimento típico.

2.1 Problema de Valor de Contorno

É estudado numericamente o problema da membrana de quadrados concêntricos, constituída de dois meios como mostrado na Fig. 1.

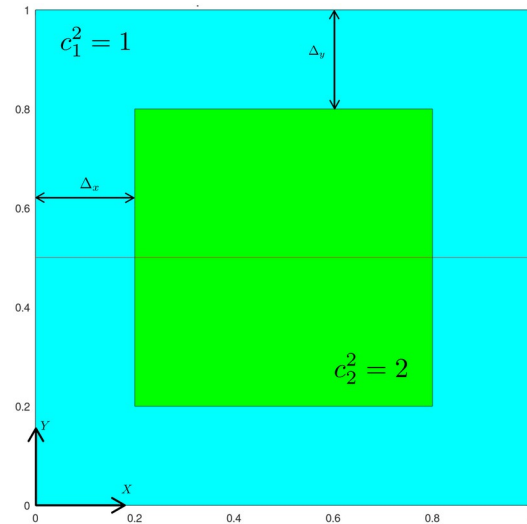


Figura 1: Representação esquemática do problema da membrana de quadrados concêntricos.

O meio 1 (subíndice 1) e o meio 2 (subíndice 2) são governados pela Eq. (1), respectivamente, com velocidades de propagação de $c_1 = 1$ e $c_2 = 2^{1/2}$. No meio 1 é considerado que as espessuras, na direção do eixo x e do eixo y , são iguais, $\Delta_x = \Delta_y$.

No contorno da membrana é considerado que em todo instante de tempo a grandeza física P é zero. As condições iniciais são definidas para que em cada ponto interno, num instante inicial t_0 , $P(t_0)$ e sua primeira derivada no tempo sejam nulas. A membrana é submetida a uma fonte constante unitária que atua somente no meio 2 e, cujo tamanho diminui até se tornar uma fonte pontual.

2.2 Esquema numérico de Diferenças Finitas

A Eq. (1) é colocada na forma discreta usando o Método das Diferenças Finitas.

$$P_{[i,j]}^{n+1} = \delta t^2 \left[\left(\frac{2}{\delta t^2} + A_p \right) P_{[i,j]}^n + A_e P_{[i+1,j]}^n + A_w P_{[i-1,j]}^n + A_n P_{[i,j+1]}^n + A_s P_{[i,j-1]}^n \right] - P_{[i,j]}^{n-1} + \delta t^2 \ddot{P}_{f[i,j]}^n \quad (2)$$

O esquema apresentado pela Eq. (2) é de segunda ordem no espaço e no tempo, com a pressão avaliada nos nós da grade e a velocidade de propagação c avaliada no ponto central entre dois nós consecutivos.

O esquema apresentado é explícito, com número de Courant igual a 0,5 para todas as simulações. Os coeficientes A na Eq. (2) são definidos pela Eq. (3).

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{c_{[i+1/2,i]}^{2n}}{\delta x^2} & A_w &= \frac{c_{[i-1/2,i]}^{2n}}{\delta x^2} \\ A_n &= \frac{c_{[i,j+1/2]}^{2n}}{\delta y^2} & A_s &= \frac{c_{[i,j-1/2]}^{2n}}{\delta y^2} \\ A_p &= -(A_e + A_w + A_n + A_s) \end{aligned} \quad (3)$$

A condição de estabilidade é calculada por meio da Eq. (4).

$$\delta t \leq \sqrt{-\frac{2}{A_p}} \quad (4)$$

3. Discussão dos resultados

São apresentados os resultados numéricos para as duas espessuras da camada externa como supracitado.

3.1 Resultados para a espessura da camada externa de $\Delta_x = \Delta_y = 0,20$

Na Fig. (2) são mostrados os resultados do teste de malha de 5 grades. É observado que o resultado a partir da malha com resolução espacial $\delta x = 1/50$ é suficiente para capturar o comportamento oscilatório do problema.

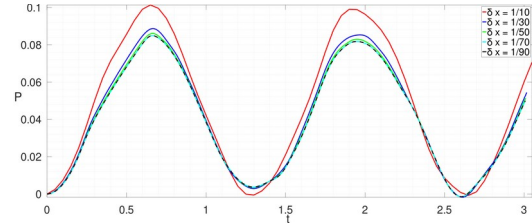


Figura 2: Teste de grade (ou malha).

Conforme se aumenta a resolução espacial da grade os valores de P mostram uma convergência. Este comportamento pode ser verificado observando os valores da Tab. 1, o qual mostra os valores máximos e mínimos da oscilação de P no tempo. As oscilações foram registradas no ponto central da grade, em $x=0,5$ e $y=0,5$.

Tabela 1: Valores máximos e mínimos da oscilação de P .

Malha	Máximos		Mínimos	
	t	P	t	$P \times 10^{-3}$
1/10	0.652227	0.101285	1.2826	-0.070939
	1.920649	0.099262	2.6511	-0.070891
1/30	0.665736	0.088698	1.2982	2.9270
	1.968866	0.085279	2.6112	-1.7439
1/50	0.664289	0.086069	1.2970	3.5041
	1.949815	0.082916	2.6055	-1.4222
1/70	0.663003	0.084891	1.2977	3.7248
	1.946970	0.081745	2.6055	-1.4095
1/90	0.662657	0.084219	1.2969	3.8446
	1.941960	0.081077	2.6035	-1.3975

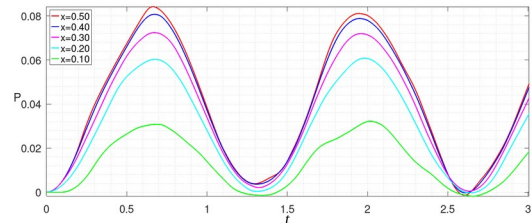


Figura 3: Oscilação temporal em pontos distribuídos ao longo do eixo x e $y=0,5$. Resolução espacial da grade é $\delta x = 1/90$.

As oscilações no tempo, mostradas na Fig. (3), são registradas em 5 pontos distribuídos ao longo de x para $y=0,5$. Para a oscilação registrada em $x=0,5$ e $y=0,5$ o valor máximo de $P=0.084219$ ocorre em $t=0.662657$ e, o valor mínimo de $P=-1.3975 \times 10^{-3}$ ocorre em $t=2.6035$.

Na Fig. (4) é mostrado a oscilação espacial da membrana ao longo de uma seção transversal em $y=0,5$ para diversos instantes de tempo. É

observado uma simetria em torno de $x=0,5$. O comportamento marcante da oscilação coincidindo com a interface entre os meios, em $x=0,2$ e $x=0,8$.

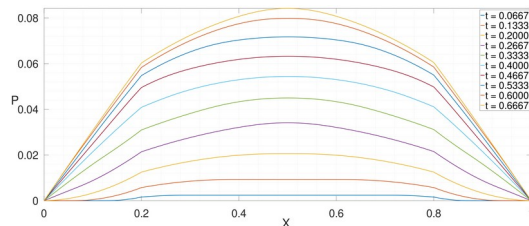


Figura 4: Oscilação espacial da membrana em $y=0,5$ para diversos instantes de tempo. Grade com resolução de $\delta x=1/90$.

Na Fig. (5) é apresentado o resultado da oscilação espacial da membrana no instante de tempo $t=2$ para a grade com resolução espacial de $\delta x=1/90$. É observado uma simetria axial em torno de $x=0,5$ e $y=0,5$.

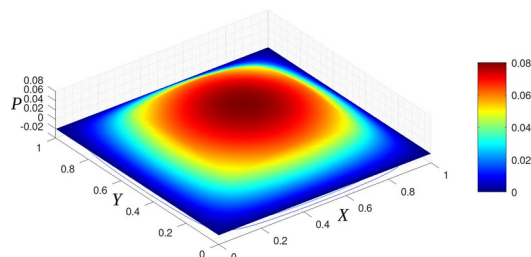


Figura 5: Distribuição espacial de P no instante de tempo $t=2$. Grade com resolução de $\delta x=1/90$.

A seguir, são apresentados os resultados numéricos para o meio interno quando o tamanho é diminuído para um quadrado de $0,02$ de lado, isto é, quando tende a uma fonte pontual.

3.2 Resultados para a espessura da camada externa de $\Delta_x=\Delta_y=0,49$

Na Fig. (6) é mostrada a oscilação temporal no ponto $x=0,5$ e $y=0,5$ para grades de diferentes resoluções espaciais. É observado uma convergência na solução numérica quando a resolução da grade aumenta. A resposta das grades com resolução $1/400$ é coincidente com a de resolução $1/500$.

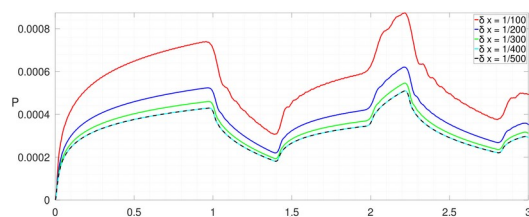


Figura 6: Teste de grade (ou malha).

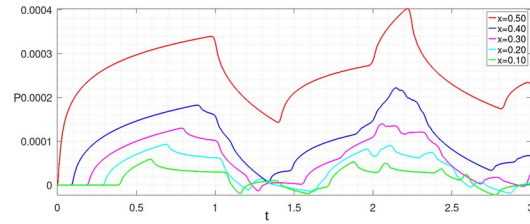


Figura 7: Oscilação temporal em pontos distribuídos ao longo do eixo x e $y=0,5$. Resolução espacial da grade é $\delta x=1/400$

Na Fig. (7) é mostrada a oscilação temporal em pontos distribuídos ao longo de x e $y=0,5$. É observado um comportamento de fonte pontual. Se a fonte estiver localizada em $x=0,5$ e $y=0,5$ é notada a resposta instantânea de P em $x=0,5$ com tempos de chegada da perturbação a intervalos de tempo de $0,1$ nos outros pontos de registro

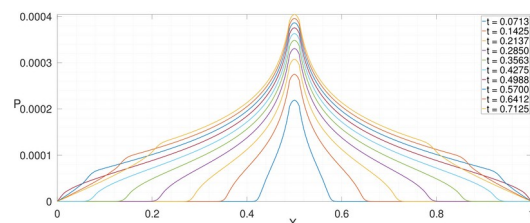


Figura 8: Oscilação da membrana para diversos instantes de tempo, em $y=0,5$. Grade com resolução de $\delta x=1/400$.

Na Fig. (8) é mostrada a resposta da membrana, em uma seção localizada em $y=0,5$ e diversos instantes de tempo, devido a fonte unitária que atua no meio interno de forma de quadrado de lado $0,02$. É notória a simetria em torno de $x=0,5$ e reflexões que se originam nas bordas e se propagam em direção ao centro, em $x=0,5$ e $y=0,5$.

Na Fig. (9) é apresentado o resultado da oscilação espacial da membrana no instante de tempo $t=0,75$ para a grade com resolução espacial de $\delta x=1/400$. É observado uma simetria axial em torno de $x=0,5$ e $y=0,5$.

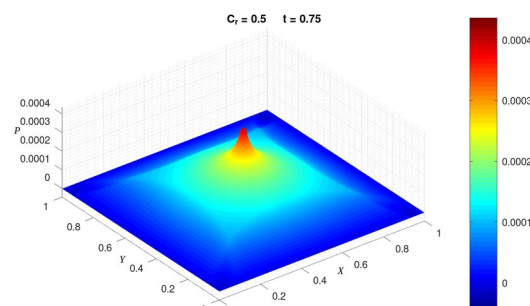


Figura 9: Distribuição espacial de P no instante de tempo $t=0,75$. Grade com resolução de $\delta x=1/400$.

4. Conclusão

O problema da oscilação de uma membrana constituída de dois meios representados por quadrados concêntricos foi abordado usando o Método das Diferenças Finitas.

Os resultados numéricos se mostram satisfatórios com o teste de malha apresentando resultados convergentes conforme a resolução espacial aumenta.

É mostrado também que a oscilação da membrana apresenta um comportamento de fonte pontual quando o meio 2 diminui seu tamanho, para por exemplo a um quadrado de 0,02 de lado.

5. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao comitê organizador do XV Encontro de Física Aplicada, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA) da Universidade Federal do Espírito Santo e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Espírito Santo (FAPES), a agência brasileira de pós-graduação.

6. Referências

- [1] Sheu, T. W. H.; Fang, C. C. A high resolution finite element analysis for nonlinear acoustic wave propagation. **Journal of Computational Acoustics**, v. 2, n. 1, p. 29-51, 1994.
- [2] Neto, F. A. S. Modelagem acústica por diferenças finitas e elementos finitos em 2-D E 2,5-D. 123f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará, Pará, 2004.
- [3] Hoffelner, J.; Kaltenbacher, M. Finite Element Simulation of Nonlinear Wave Propagation in Thermoviscous Fluids Including Dissipation. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, v. 48, n. 3, p. 779-786, 2001.
- [4] Piccoli, F. P. *et al.* Nonlinear Acoustic Wave Propagation in Stratified Media. In: PROCEEDINGS OF THE XLI IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 41, 2020, Foz de Iguaçu. **Anais...** Foz de Iguaçu, CILAMCE, 2020.
- [5] Araujo, L. *et al.* Acoustic wave propagation in non-homogeneous media. In: PROCEEDINGS OF THE XLI IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 41, 2020, Foz de Iguaçu. **Anais...** Foz de Iguaçu, CILAMCE, 2020.
- [6] Costa, E. S.; Medeiros, E. B. Estudo sobre a propagação acústica em águas rasas. In: CONGRESSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA, Lisboa. **Anais...**Lisboa, 2015.
- [7] Valente, A. *et al.* 3D OcTree Finite-volume method for acoustic wave simulation. In: PROCEEDINGS OF THE XLI IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2015, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, CILAMCE, 2015.
- [8] Beyer, R. T. **Nonlinear acoustics**. In: Physical Acoustics. New York: Academic, v. 2, p. 231–264, 1965.
- [9] Lauterborn, *et al.* **Nonlinear Acoustic in Fluids**. In: Physical and Nonlinear Acoustic. Springer Handbook of Acoustics, part. B, p. 257-297, 2007.
- [10] Pierce, A. D. **Acoustics: An Introduction to its Physical Principles and Applications**. Ed. 3. Springer Nature Switzerland, 2019.
- [11] Garrett, S. L. **Understanding Acoustics: An Experimentalist's View of Sound and Vibration**. Ed. 2. Springer Nature Switzerland, 2020.
- [12] Hamilton, M. F.; Blackstock, D. T. On the coefficient of nonlinearity in nonlinear acoustics. **Journal of Acoustic Society of America**, v. 86, n. 1, p. 74-77, 1987.
- [13] Long, G. *et al.* A temporal fourth-order scheme for the first-order acoustic wave equations. **Geophysics J. Int.**, v. 194, p. 1473 – 1485, 2013.
- [14] Guimarães, R. F. Modelador de propagação de onda acústica 2D por diferenças finitas no domínio do tempo em CUDA. 68f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia de Petróleo, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.
- [15] Kagawa, Y. *et al.* Finite Element Simulation of Non-Linear Sound Wave propagation.

Journal of Sound and Vibration, v. 154, n. 1, p. 125-145, 1992.

[16] Campos-pozuelo, C. *et al.* Finite-element analysis of the nonlinear propagation of high-intensity acoustic waves. **Journal of Acoustic Society of America**, v. 106, n. 1, p. 92-101, 1999.

[17] Pino, S. D. *et al.* 3D Finite Volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere. **Computers & Fluids**, v. 38, p. 765–777, 2009.

[18] Chacaltana, J. T. A. *et al.* Volumes Finitos não Estruturados voltado à Propagação de Ondas Acústicas em Meios Heterogêneos. In: PROCEEDINGS OF THE XLI IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, CILAMCE, 2015.

[19] Carneio, E. B. Aplicação de absorventes tipo membrana em cavidades e filtros acústicos. 123f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2008.

[20] Peres, R. A. *et al.* 1D Nonlinear Acoustic Wave Equation In Heterogeneous Fluid. In: PROCEEDINGS OF THE XLIV IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Porto. **Anais...** Porto, CILAMCE, 2023.