

Campo elétrico gerado por fractais de baixa dimensionalidade

Santos, A. R. C. S.^{1*}; Gouvêa, L. H. F.¹; Orlando, M. T. D.¹

¹ Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil.

* e-mail: atanaelrodrigo@gmail.com

Resumo

Neste estudo, foi investigado o comportamento do campo elétrico em fractais de baixa dimensionalidade, usando a Poeira de Cantor e o Tapete de Sierpinski. A partir de análises matemáticas e simulações numéricas, confirmamos a relação entre a distribuição de carga e a dimensão fractal, validando a lei de escala esperada.

Abstract

In this study, we investigated the behavior of the electric field in low-dimensional fractals, using the Cantor Dust and the Sierpinski Mat. Based on mathematical analysis and numerical simulations, we confirmed the relationship between the charge distribution and the fractal dimension, validating the expected scaling law.

Keywords (Palavras chaves): campo elétrico, fractais, Poeira de cantor, tapete de Sierpinski.

1. Introdução

Fractais são objetos auto-similares que possuem estruturas semelhantes em todas as suas escalas. Seu conceito foi introduzido por Mandelbrot em meados de 1970. A palavra se origina do latim fractus, que significa fragmentado ou fracionado (JAGGARD, 1990; PORTES, 1999). Ao dar zoom na primeira região da figura 1, temos uma estrutura semelhante à anterior, e assim sucessivamente.

Diferentemente de objetos comuns, os fractais têm dimensões fracionárias. Na figura 1, o fractal tende a ser uma linha, mas sua estrutura rugosa faz com que ocupe mais espaço do que uma dimensão e menos espaço do que um objeto clássico bidimensional, estando, portanto, entre 1D e 2D (JAGGARD, 1990). Os fractais não são definidos pela geometria euclidiana, exigindo algumas adaptações para sua descrição.

Para entender o conceito de dimensão fractal, podemos utilizar uma abordagem simples, mas eficiente. Imagine que você possua um fio longo e uniforme de comprimento L , com espessura desprezível. Ao medi-lo com uma régua de comprimento ϵ , o número total de réguas necessárias será dado por $N(\epsilon) = (L/\epsilon)^1$. De forma semelhante, para uma folha A4, $N(\epsilon) = (L/\epsilon)^2$, e para um cubo, $N(\epsilon) = (L/\epsilon)^3$. Em cada caso, o expoente corresponde à dimensão do objeto. No caso do fractal da figura 1, não é possível medi-lo de forma semelhante, sendo necessário utilizar ferramentas mais precisas.

Considere um conjunto métrico mensurável (W, μ_H) com $W \subset \mathbb{R}^n$, onde os pontos $x, y, z, \dots$ são representados por n-tuplas reais $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

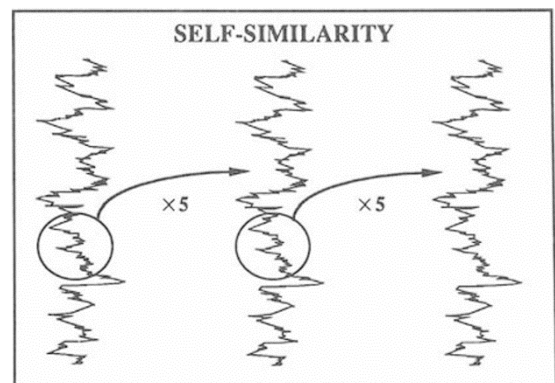


Figura 1: A auto-similaridade dos fractais se apresenta quando ampliada uma área, a nova área se parece em média com a área original. Fonte: (JAGGARD, 1990), tradução autores.

O conjunto W é fechado, ilimitado e regular, com pontos distribuídos aleatoriamente. Para um $E \subset W$, define-se seu diâmetro por

$$d(E) = \sup\{d(x, y) | x, y \in E\} \quad (1)$$

Sendo $d(x, y)$ uma função de medida entre dois pontos de W . Se $\{E_i\}$ é uma cobertura de W com $d(E_i) < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$, define-se

$$\xi(E_i, D) = \omega(D)[d(E_i)]^D \quad (2)$$

para um subconjunto não vazio E_i de W . O fator $\omega(D)$ depende da geometria do conjunto. No caso de uma esfera, é dado por

$$\omega(D) = \frac{\pi^{D/2} 2^{-D}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} \quad (3)$$

A dimensão de Hausdorff, D , de um subconjunto $E \subset W$ é definida por:

$$D = \sup\{d \in \mathbb{R}: \mu_H(E, d) = \infty\} \\ = \inf\{d \in \mathbb{R}: \mu_H(E, d) = 0\} \quad (4)$$

e a medida de Hausdorff μ_H é

$$\mu_H(E, D) = \omega(D) \lim_{d(E_i) \rightarrow 0} \inf_{\{E_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} [d(E_i)]^D \quad (5)$$

A integral fracionária generalizada pode ser obtida por integrais de Lebesgue-Stieltjes adaptadas à medida μ_H (TARASOV, 2006). Para uma esfera simétrica e em coordenadas polares, a integral 6

$$\int_W f d\mu_H = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^{\infty} f(r) r^{D-1} dr \quad (6)$$

Relacionada-a com a integral fracionária de Riemann-Liouville, obtemos:

$$\int_W f d\mu_H = \frac{2\pi^{D/2} \Gamma(D)}{\Gamma(D/2)} I^D f(0) \quad (7)$$

A equação (7) vincula a ordem da integral fracionária à dimensão fractal D . Na integração multivariável, com $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, utiliza-se:

$$\int d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) d\mu_3(x_3) f(r) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int f(r) r^{D-1} dr \quad (8)$$

1.1. Carga e campo elétrico de um conjunto fractal

Para um estudo mais aprofundado, é interessante entender como a distribuição de carga se relaciona com a dimensão fractal. Dado um fractal qualquer, podemos dizer que sua densidade de carga é descrita pela função $\rho(\mathbf{r}, t)$. Dessa forma, a carga total é dada por:

$$Q_D(W) = \int_W \rho(\mathbf{r}, t) dV_D \quad (9)$$

onde $dV_D = d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) d\mu_3(x_3) = c_3(D, \mathbf{r}) dV_3$, e $dV_3 = dx dy dz$ para o plano cartesiano. Adotando $\rho(\mathbf{r}) = \rho(|\mathbf{r}|)$ (TARASOV, 2006), podemos escrever:

$$c_3(D, \mathbf{r}) = \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)} |\mathbf{r}|^{D-3} \quad (10)$$

Se considerarmos uma região com distribuição esfericamente simétrica, de forma que $W = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| \leq R\}$, então, para $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})$, a equação (9) se torna:

$$Q_D(R) = 4\pi \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)} \int_0^R \rho(\mathbf{r}) r^{D-1} dr \quad (11)$$

No caso homogêneo, para $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$:

$$Q_D(R) = 4\pi \rho_0 \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)} \frac{R^D}{D} \sim R^D \quad (12)$$

Para uma distribuição de cargas com densidade constante em um fractal de dimensão D , a carga elétrica Q satisfaz a lei de escala $Q(R) \sim R^D$, de forma semelhante ao seu comportamento na n -dimensão Euclidiana, onde $Q(R) \sim R^n$ (TARASOV, 2006). Dada a densidade de distribuição de cargas $\rho(\mathbf{r}')$, o campo elétrico em um ponto $\mathbf{r}$ e definido como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_W \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV_D' \quad (13)$$

onde $dV_D' = c_3(D, \mathbf{r}') dV_3'$. A equação (13) é considerada como a lei de Coulomb para uma distribuição fracionária de cargas elétricas. Retornando à ideia de termos uma esfera em torno do nosso fractal, o fluxo total $\Phi_E(S)$ do campo elétrico $\mathbf{E}$ que passa pela superfície fechada $S = \partial W$ é proporcional à carga elétrica $Q(W)$ no interior da superfície:

$$\Phi_E(\partial W) = \frac{1}{\epsilon_0} Q(W) \quad (14)$$

O fluxo elétrico na superfície S é dado por $\Phi_E(S) = \int_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2)$, onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é o vetor campo elétrico, e $d\mathbf{S}_2$ é um elemento diferencial da superfície S . Logo, temos:

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_W \rho(\mathbf{r}, t) dV_D \quad (15)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do espaço. Se $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})$ e $W = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| \leq R\}$, temos:

$$Q(W) = 4\pi \int_0^R \rho(r) c_3(D, \mathbf{r}) r^2 dr \quad (16)$$

$$Q(W) = 4\pi \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)} \int_0^R \rho(\mathbf{r}) r^{D-1} dr \quad (17)$$

Sendo $S = \partial W = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| = R\}$, e substituindo as equações (17) e (18) na equação (14), obtemos a equação 20:

$$\Phi_E(\partial W) = 4\pi R^2 E(R) \quad (18)$$

$$E(R) = \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\epsilon_0 R^2 \Gamma(D/2)} \int_0^R \rho(\mathbf{r}) r^{D-1} dr \quad (19)$$

Para uma distribuição homogênea ($\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$):

$$E(R) = \rho_0 \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\epsilon_0 D \Gamma(D/2)} R^{D-2} \quad (20)$$

Na equação (20), observa-se uma relação de proporcionalidade entre o campo elétrico e o inverso da distância elevada a $2-D$, onde D é a dimensão do fractal.

Para estudos sobre outros comportamentos eletrodinâmicos dos fractais, recomenda-se a leitura do artigo de Tarasov (TARASOV, 2006).

2. Metodologia

O comportamento do campo elétrico em fractais carregados, é dado por:

$$E(R) \propto \frac{1}{R^{2-D}} \quad (21)$$

Com o objetivo de confirmar o comportamento do campo elétrico formado por um fractal carregado devido a sua geometria, foram realizadas simulações numéricas, utilizando aproximações apropriadas das estruturas fractais discretizadas.

2.1. Poeira de Cantor

A poeira de Cantor (Figura 2) é um fractal auto-similar que foi publicado pela primeira vez em 1883 (PEITGEN et al., 2004). Ele é construído por dois processos: interpolação e extrapolação. Inicialmente, foi gerado o fractal no intervalo $[0, 1]$ no eixo X, que foi dividida em 3 partes iguais e removido iterativamente o terço central $c = [1/3, 2/3]$, chamado de iniciador. O processo se repete indefinidamente em cada segmento remanescente (PORTES, 1999).

A extrapolação copia esse padrão para intervalos sucessivos, como $[2, 3]$, estendendo-se ao infinito (TARASOV, 2006; PORTES, 1999). A dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada por:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63093 \dots \quad (22)$$

No processo de interpolação, ao removermos o segmento central, também removemos a carga correspondente. Ao repetir esse processo infinitamente, não restará carga, pois:

$$Q(n) = (1 - c)^n Q \quad (23)$$

onde n é o número de iterações. Assim, para $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - c)^n Q = 0 \quad (24)$$

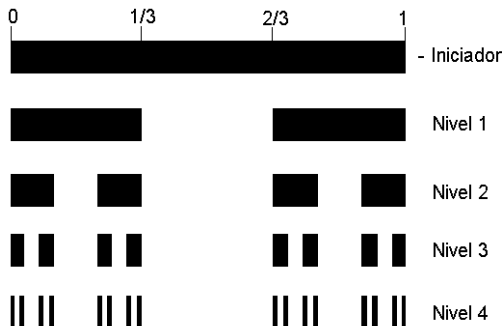


Figura 2: Conjunto de Cantor.

Por analogia ao fio infinito, o fractal deve possuir simetria em relação ao plano YOZ . Para garantir isso, foi considerado $L \rightarrow \infty$ no intervalo $[0, \infty[$ e espelhado o conjunto para $] -\infty, 0]$ (PORTES, 1999). Dessa forma, o campo elétrico formado pelo fractal é radial.

Na simulação, não foi possível gerar um fractal infinito, sendo necessário limitar seu tamanho ao intervalo $[-L, L]$, assim como o número de gerações N . Isso gera um pré-fractal.

Para aproximar a simulação o máximo possível do fractal real, foi considerado o tamanho das barras do fractal em vez do número de gerações. O comprimento das barras é dado por $l_N = \left(\frac{1}{2}\right)^N L(1 - c)^N$. A uma distância P de uma pequena barra carregada (indexada pela letra i), foi aproximado como uma carga pontual, impondo $l_N < k$, onde k é um valor muito menor que P . Dessa forma, para $k \rightarrow 0$, temos $N \rightarrow \infty$ (PORTES, 1999). O campo elétrico do sistema torna-se:

$$E(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{(1/2)^N Q r}{(r^2 + x_i^2)^{3/2}} \quad (25)$$

onde x_i é a posição de um segmento do fractal gerado. A geração do fractal foi feita por um número finito de interpolações, e a equação (25) foi utilizada para $c = 1/3$. A distância r varia entre 0.1 e 1, com $D_q = \log 2 / \log 3$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^N Q = 1$. Os valores de k e L foram escolhidos de forma que $k \ll r \ll L$, garantindo que o comprimento da barra seja pequeno em relação à distância ao ponto P .

2.2. Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski, é um fractal clássico 2D (JAGGARD, 1990). Ele é gerado a partir de um quadrado plano, dividido em nove partes iguais, conforme ilustrado na Figura 3. O quadrado central é removido e o mesmo processo é repetido infinitamente para os quadrados restantes. A dimensão fractal do tapete de Sierpinski é dado por:

$$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,89279 \dots \quad (26)$$

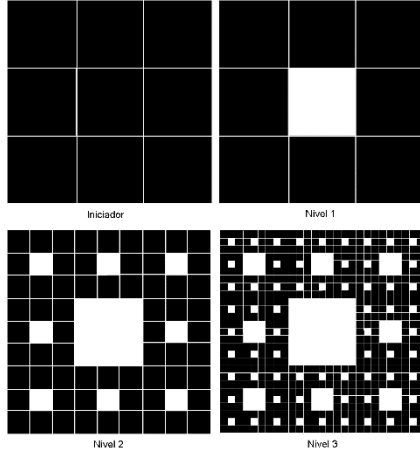


Figura 3: Etapas do desenvolvimento do fractal tapete de Sierpinski

Semelhante ao conjunto de Cantor, não foi possível gerar o fractal perfeito para a simulação, sendo necessário adotar algumas aproximações. O lado do quadrado inicial do fractal terá comprimento $l_N = L(4/9)^N$, no intervalo $[-L/2, L/2]$. Em vez de considerar apenas os níveis de iteração, foi analisado o tamanho do lado do menor quadrado gerado, de forma que $k \ll r \ll L$.

Foi utilizado o conceito de cargas pontuais no centro do último quadrado gerado. À medida que o tamanho de k diminuiu em relação a r , os menores quadrados se tornaram suficientemente pequenos para que a aproximação fosse válida. O campo elétrico é dado por:

$$E(r) = \sum_i \frac{(8/9)^N Qr}{(r^2 + x_i^2 + y_i^2)^{3/2}} \quad (27)$$

A geração do fractal foi realizada por um número finito de iterações. Utilizou-se $c = 1/9$, significando que uma parte de nove é removida a cada iteração. A distância r varia entre 0.1 e 1, com $D_q = \log 8 / \log 3$ e $Q = (8/9)^n$.

3. Discussão dos resultados

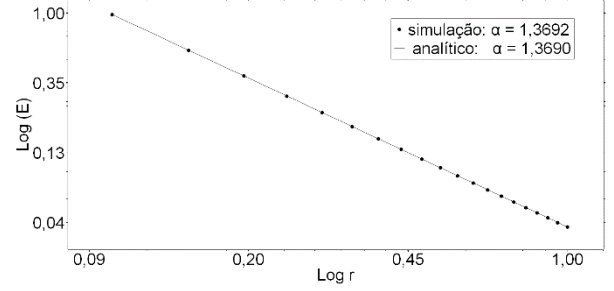
3.1. Conjunto de Cantor

Os resultados obtidos da simulação estão apresentados na figura 4. observa-se aproximadamente uma reta formada pelo gráfico de $\log E(r)$ versus $\log r$, sugerindo uma lei de potência conforme esperado:

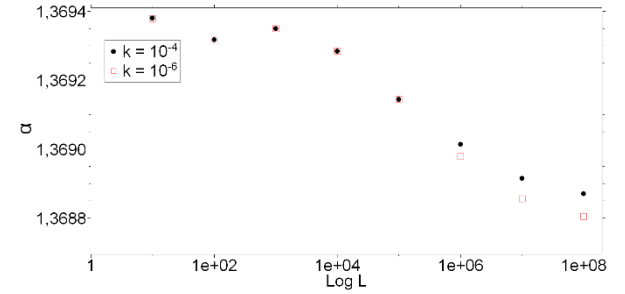
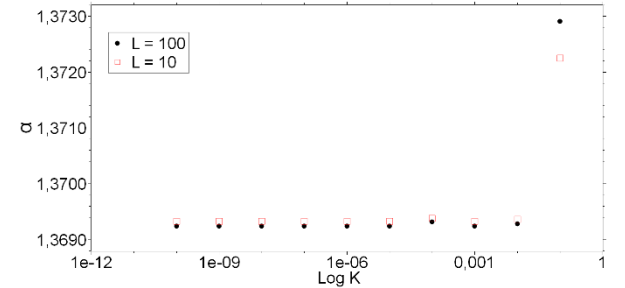
$$E(r) \propto \frac{1}{r^\alpha} \quad (28)$$

onde α é a inclinação da reta. O valor esperado para o conjunto de Cantor é dado por:

$$(2 - D_q) = (2 - 0,63093 \dots) = \alpha = 1,3690 \dots \quad (29)$$


 Figura 4: O gráfico compara a simulação numérica ($L = 100$ e $k = 10^{-6}$), com a solução analítica. A inclinação obtida é $\alpha = 1,36924 \pm 0,00016$, próxima da previsão teórica.

O valor de α obtido a partir da solução analítica da equação 20 pode ser visto na Figura 4. Comparando o resultado da simulação numérica com o comportamento previsto analiticamente, observa-se uma margem de erro da ordem de 10^{-4} .


 Figura 5: Gráfico de α em função de $\log L$ com k fixo.

 Figura 6: Gráfico de α em função de $\log k$ com L fixo.

Na Figura 5 e 6 vemos a progressão do coeficiente angular: a Figura 5 mostra a evolução de α em função de $\log L$, com k fixo, enquanto a Figura 6 exhibe α em função de $\log k$, com L fixo.

3.2. Tapete de Sierpinski

Na Figura 7, temos o resultado para o Tapete de Sierpinski. O coeficiente angular previsto foi:

$$(2 - D_q) = (2 - 1,89279 \dots) = \alpha = 0,10721 \dots \quad (30)$$

Os resultados numéricos obtidos confirmam a relação esperada entre o campo elétrico e a escala fractal do tapete de Sierpinski. A inclinação obtida nos gráficos se aproxima das previsões teóricas, validando a abordagem adotada.

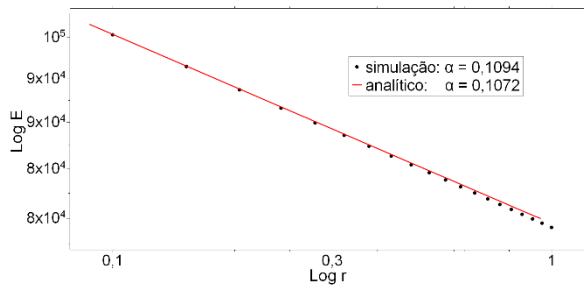


Figura 7: O gráfico compara a simulação numérica ($L = 100$ e $k = 10^{-6}$), com a solução analítica. A inclinação obtida é $\alpha = 0,109475 \pm 0,000185$, próxima da previsão teórica.

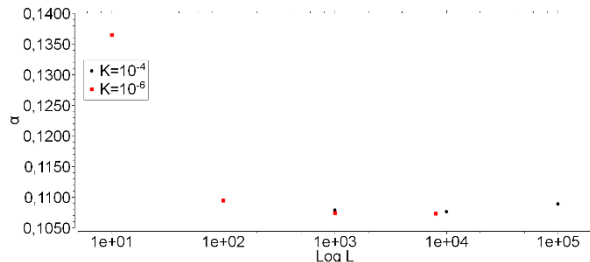


Figura 8: Gráfico de α em função de $\log L$ com K fixo.

Os gráficos 8 e 9 mostram que os valores de α diverge para um valor próximo do analítico. No gráfico 8, não foi possível obter o valor de α , para $k = 10^{-6}$ e $L = 10^5$, devido a custo computacional. No gráfico 9, foi verificado que para valores melhores de α , é preciso que L seja maior, onde é notório a diferença obtida de $L=10$ para $L=100$, com $L=100$ sendo o valor desejado. Devido ao alto custo computacional não foi possível obter detalhes mais profundos do comportamento.

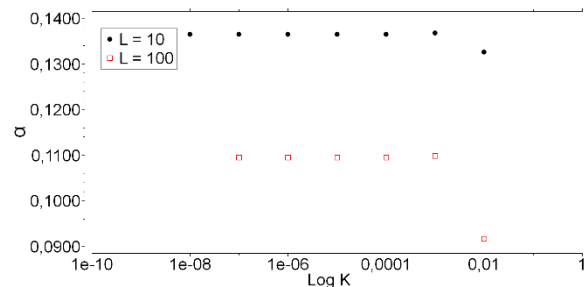


Figura 9: Gráfico de α em função de $\log k$ com L fixo.

A análise sugere que, mesmo com aproximações, a estrutura fractal influencia diretamente o campo elétrico, reforçando a coerência entre os modelos analítico e numérico.

4. Conclusão

Analizamos o comportamento do campo elétrico gerado por fractais de baixa dimensionalidade, utilizando os fractais Poeira de Cantor e o Tapete de Sierpinski.

Os resultados obtidos via simulação numérica confirmaram a relação teórica esperada, mostrando que a distribuição do campo elétrico em fractais segue leis de escala distintas das geometrias euclidianas. As inclinações obtidas nos gráficos (α) apresentaram boa concordância com as previsões analíticas, validando a metodologia.

A abordagem mostrou-se eficaz para modelar sistemas físicos com estrutura fractal de baixa dimensionalidade, permitindo generalizações para outras geometrias irregulares. Infelizmente, devido a limitações computacionais, não foi possível obter resultados para fractais tridimensionais. Com o avanço da tecnologia, estudos futuros poderão explorar o comportamento dos fractais de maiores dimensões e a influência de diferentes distribuições de cargas.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, e FAPES pelo apoio financeiro.

7. Referências

- [1] JAGGARD, D. L. On fractal electrodynamics. In: Recent advances in electromagnetic theory. [S.l.]: Springer, 1990. p. 183–224.
- [2] PORTES, L. L. O campo elétrico gerado por uma distribuição fractal de cargas. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 21, n. 4, p. 501, 1999.
- [3] TARASOV, V. E. Electromagnetic fields on fractals. Modern Physics Letters A, World Scientific, v. 21, n. 20, p. 1587–1600, 2006.
- [4] PEITGEN, H.-O. et al. Chaos and fractals: new frontiers of science. [S.l.]: Springer, 2004. v. 106.