

Análise não linear de estruturas reticuladas planas: formulação e aplicação

Neves, N. S.^{1*}

1 Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

* e-mail: natan.neves@coc.ufrj.br

Resumo

A análise estrutural visa estudar o comportamento de estruturas sob diferentes ações, a fim de obter parâmetros e dados importantes para dimensionamentos e projetos, como deslocamentos, tensões e deformações. Todavia, a análise elástica linear convencional não representa adequadamente comportamento real das estruturas, sendo necessário utilizar a análise estrutural não linear. Desta forma, o presente artigo busca introduzir alguns conceitos e aplicações sobre não linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas. Para tanto, utiliza-se os procedimentos numéricos de elementos finitos para solução dos modelos estruturais, sendo implementados as rotinas computacionais em ambiente Matlab. A experimentação numérica é direcionada com base em dois casos: (i) pórtico simples e (ii) quadro em losango quadrado fixada por pinos. Em síntese, os resultados mostram-se bem ajustados com as soluções de referência para os casos estudados, indicando a boa performance do código computacional desenvolvido.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Análise estrutural não linear, Código Computacional.

Abstract

Structural analysis aims to study the behavior of structures under different actions in order to obtain important parameters and data for design and design, such as displacements, stresses and deformations. However, conventional linear elastic analysis does not adequately represent the real behavior of structures, and it is necessary to use nonlinear structural analysis. Thus, this article seeks to introduce some concepts and applications of geometric nonlinearity in planar lattice structures. For this purpose, finite element numerical procedures are used to solve the structural models, and the computational routines are implemented in the Matlab environment. The numerical experimentation is directed based on two cases: (i) simple frame and (ii) square diamond frame fixed by pins. In summary, the results are well adjusted to the reference solutions for the cases studied, indicating the good performance of the developed computational code.

Keywords: Finite Elements, Nonlinear Structural Analysis, Computer Code.

1. Introdução

Com o avanço de técnicas construtivas e das pesquisas científicas, além do emprego de novos materiais, proporcionaram a construção de estruturas mais esbeltas e com alto desempenho nos últimos séculos. Direcionando paralelamente para análise não linear estrutural, que permite uma maior verossimilhança entre o modelo de engenharia e o comportamento real.

Quando se estuda problemas estruturais não lineares, usualmente, consideram-se duas fontes de não linearidade que ocorrem em estruturas e são significativas na prática da engenharia, devido representar importantes fenômenos que ocorrem nas

estruturas quando sujeitas aos carregamentos. A primeira fonte é a não linearidade física, associado ao comportamento constitutivo do material. A segunda fonte é a não linearidade geométrica, tendo as estruturas caracterizadas por grandes deslocamentos e/ou rotações, com equações de equilíbrio definidas no estado deformado da estrutura ou também ocorre uma alteração na relação deformação-deslocamento. Ressalta-se ainda que, uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear, mesmo que o material seja elástico linear. Desta forma, o presente artigo busca introduzir alguns conceitos e aplicações sobre não linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas, bem como a exemplificação dos conceitos com aplicações numéricas [1, 2].

2. Equações Gerais

A formulação de pórticos planos não lineares é baseada no referencial Lagrangiano atualizado, sendo na configuração C_1 , definindo as componentes planas de tensão provenientes do tensor de Cauchy como ${}^t\tau_{xx}$ e ${}^t\tau_{xy}$, e as deformações incrementais de Green ${}^t\varepsilon_{xx}$ e ${}^t\varepsilon_{xy}$. Com base no princípio dos deslocamentos virtuais, pode-se escrever a equação de equilíbrio incremental do trabalho virtual, dado pela Equação 1.

$$\int_V \left({}^t\tau_{xx} \delta \eta_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \delta \eta_{xy} \right) dV + \dots \int_V (E e_{xx} \delta e_{xx}) dV = {}^{t+\Delta t} R - {}^t R \quad (1)$$

Como a relação deformação-deslocamento é fundamentada pelo tensor de Green-Lagrange, considerando as deformações axiais e cisalhantes, pode-se escrever as relações diferenciais a seguir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} \frac{du_y}{dx} \right) \quad (3)$$

Nas Equações (2) e (3), os primeiros termos representam as parcelas lineares e os demais termos correspondem as parcelas não lineares. Adota-se a hipótese de Euler-Bernoulli, que estabelece que as seções transversais planas permanecem normais ao eixo da barra na flexão. Desta maneira, os deslocamentos u_x e u_y , em um ponto genérico, pode ser associado aos deslocamentos u e v da viga. Logo, os deslocamentos são escritos: $u_x = u - yv'$ e $u_y = v$. Após algumas manipulações, chega-se em uma sentença integral definida no domínio contínuo, realizando então as aproximações de elementos finitos, tem-se:

$$u = \{ \mathbf{N}_1 \} \{ \bar{u} \} \quad v = \{ \mathbf{N}_3 \} \{ \bar{v} \} \quad (4)$$

Os termos $\{ \tilde{\mathbf{N}}_1 \}$ e $\{ \tilde{\mathbf{N}}_3 \}$ representam os vetores que contêm as funções de interpolação, sendo lineares para deslocamento axial e cúbicas para o deslocamento transversal, respectivamente. As aproximações, apresentadas na Equação (4), são aplicadas na formulação integral do problema. Ao fim, chega-se no sistema algébrico final posto na Equação (5).

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]) \{ \mathbf{u} \} = \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \} - \{ {}^t \mathbf{f} \} \quad (5)$$

Onde $\mathbf{K}_e$ é conhecido como matriz de rigidez elástica e $\mathbf{K}_g$ é a matriz geométrica. Para solução desses problemas, utiliza-se os processos incrementais-iterativos, conforme pode ser visto em detalhes em [1].

2. Metodologia de Solução

Considerando que todas as informações e variáveis sejam conhecidas na última configuração de equilíbrio da estrutura, a solução incremental predita (ou solução incremental inicial tangente) inicia pela construção prévia da matriz de rigidez e, posteriormente, o cálculo do vetor de deslocamentos nodais. Sendo assim, deve-se estabelecer o incremento de carga, destacando que, no passo inicial, esse é predefinido pelo usuário no arquivo de entrada.

Um método incremental eficiente deve ser capaz de identificar e escolher automaticamente o incremento de carga, visto que em problemas não lineares estruturais existem a necessidade do conhecimento dos inúmeros pontos críticos contidos ao longo da trajetória de equilíbrio da estrutura.

Existem diversos trabalhos desenvolvidos que abordam diferentes tipos de estratégias de incremento de carga. No presente artigo, adota-se a técnica incremental proposta por Crisfield [2], denominada de comprimento de arco. De acordo com Crisfield [2], grande parte das técnicas de solução dos problemas estruturais com comportamento não linear, fundamenta-se no método de Newton-Raphson.

No esquema padrão do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga é mantido constante ao longo de todo processo iterativo, possibilitando que a resposta seja obtida até o ponto limite e/ou bifurcação. Quando o parâmetro de carga é variável no decorrer do processo iterativo é possível determinar todo o caminho de equilíbrio. Deve-se impor um valor aceitável de tolerância ao sistema durante o processo iterativo, sendo predefinido pelo usuário antes da simulação.

Após a convergência ser alcançada, pode-se afirmar que a estrutura estabeleceu uma configuração de equilíbrio e, consecutivamente, as variáveis dos próximos incrementos são atualizadas. Em síntese, as etapas e os processos de implementação dos problemas não lineares estruturais podem ser visualizados na Figura 1.

```

1 Pré-Processamento
2  ▷ Entrada de Dados
3  ▷ Cálculos Iniciais
4  | Construção do vetor de referência,  $\mathbf{F}_r$ 
5  | Condição Inicial:  $\mathbf{F}_i = 0$ 
6  | Análise Simplificada (Estrutura Indeformada)
7
8 Processamento
9  ▷ Ciclo Incremental
10 para  $i \leftarrow 1$  até  $i = I_{max}$  faça
11  | ○ Construção da matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ 
12  | ○ Calcular:  $\delta \mathbf{U}_r = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}_r\}$ 
13  | ○ Definir: Incremento de carga,  $\Delta \lambda$ 
14  | ○ Vetor de Forças Externas,  $\mathbf{F}_e$ 
15  | ○ Solução:  $\Delta \mathbf{U}^0$ 
16  | ▷ Ciclo Iterativo
17  | para  $\varepsilon \leq \zeta$  faça
18  | | ○ Construção do vetor de forças internas,  $\mathbf{F}_i$ 
19  | | ○ Calcular o vetor de forças residuais,  $\mathbf{g} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i$ 
20  | | ○ Critério de convergência:
21  | |  $\varepsilon = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| \div \|\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|$ 
22  | | ○ Correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$ 
23  | | ○ Correção dos deslocamentos nodais
24  | |  $\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k$ 
25  | | ○ Atualização:  $\Delta \mathbf{U}^k, \Delta \lambda^k$ 
26  | fim
27  | → Atualização de Variáveis
28  | → Armazenamento de Dados
29 fim
30
31 Pós-Processamento
32  ▷ Tratamento de Resultados
33  | Caminho de Equilíbrio:  $\mathbf{P} \times \mathbf{u}$ 
34  | Avaliação de Dados
35

```

Figura 1: Estratégia computacional para análise de problemas não lineares estruturais

3. Experimentação Numérica

O primeiro caso, denominado de Pórtico de Lee, consiste em um pórtico plano, em formato de L, sujeito a uma carga concentrada vertical P com suas extremidades apoiadas, conforme ilustra-se na Figura 2.

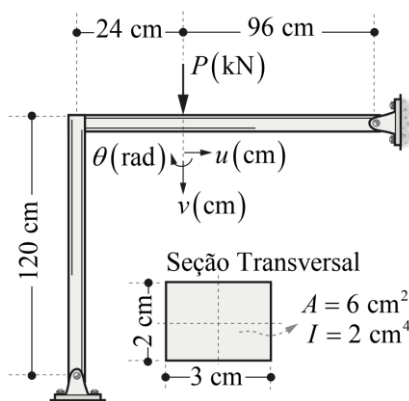


Figura 2: Configuração e carregamentos para pórtico de Lee

Adota-se uma seção transversal retangular com área igual a 6 cm², um momento de inércia de 2 cm⁴ e um módulo de elasticidade igual a 720 kN/cm². Além disso, o pórtico tem comprimento igual a 120 cm e a carga é aplicada a uma distância de 96 cm do apoio superior. Em relação aos parâmetros relacionados ao processo de solução, utilizam-se uma tolerância de 10⁻⁴, um fator de carga inicial de 0,5 e um total de 600 incrementos.

A Figura 3 apresenta a avaliação do comportamento do caminho de equilíbrio para o deslocamento vertical em comparação com as medições numéricas obtidos em Schweizerhof e Wriggers [3] e Galvão [4]. Os resultados obtidos apresentam uma verossimilhança com os resultados em [3].

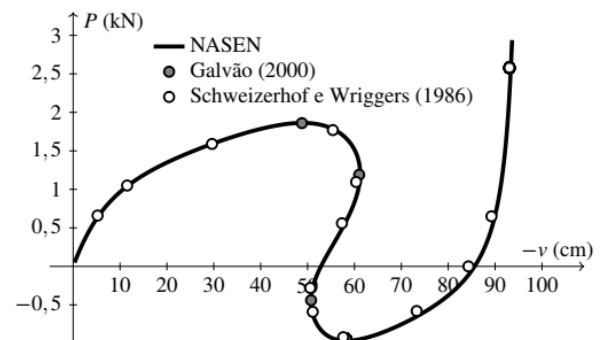


Figura 3: Trajetória de equilíbrio para pórtico de Lee associada ao deslocamento vertical

Para realizar uma avaliação quantitativa dos pontos críticos contidos no caminho de equilíbrio do deslocamento vertical, a Tabela 1 apresenta os pontos críticos comparados com os valores numéricos obtidos Galvão [4]. Sendo que os pontos A e D representa os pontos limites de carga e os pontos B e C são os pontos limites de deslocamento. É possível verificar a boa semelhança entre os valores numéricos.

Tabela 1: Parâmetros de rede das amostras supercondutoras.

Pontos	Curva Carga-Deslocamento			
	Limites	Galvão (2000)	NASEN	
A	1,86	48,79	1,8629	48,8514
B	1,19	61,01	1,1945	61,2081
C	-0,44	50,75	-0,4531	50,7307
D	-0,94	58,19	-0,9656	58,2071

A partir dos resultados apresentados anteriormente, pode-se observar, primeiramente, o comportamento numérico coerente em relação aos resultados previstos na literatura. Além disso, por conta da forte não linearidade do problema, existem diversos pontos limites de carga e deslocamento ao longo da trajetória de equilíbrio do pórtico de Lee.

O segundo caso consiste em um quadro, em formato de losango, com todas as suas arestas iguais e de comprimento L . O sistema está submetido a uma

força concentrada vertical localizada no vértice superior e inferior da peça. O problema proposto apresenta duas configurações físicas relacionadas à natureza das cargas aplicadas na estrutura, conforme apresenta a Figura 4.

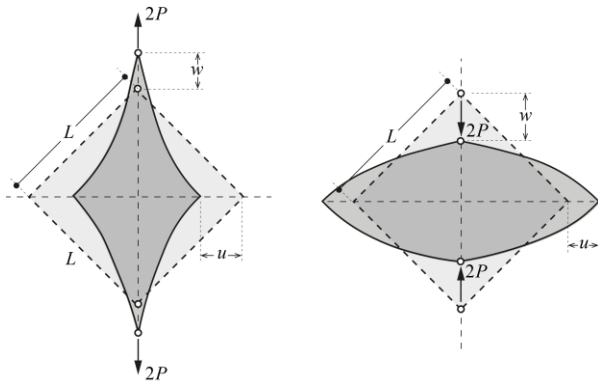


Figura 4: Quadro, em formato de losango quadrado, sob força de tração e de compressão

As dimensões da seção transversal retangular são iguais a $1 \times 0,1$ m, o comprimento das arestas do losango é igual a 10 m e o módulo de elasticidade é de $1,2 \cdot 10^5$ kPa. Além disso, a tolerância é igual a 10^{-5} , o fator de carga inicial é de 0,01 e utilizam-se 5 iterações desejadas.

Em ambos os casos, buscam-se avaliar os deslocamentos w e u presentes na estrutura (ver Figura 4) e a solução de referência empregada é obtida em Mattiasson [5]. Na Figura 5, apresenta-se as curvas dos deslocamentos adimensionais para a configuração da estrutura sob ação da força de tração. É possível observar a boa concordância entre os resultados obtidos pelo programa desenvolvido no presente trabalho e a literatura. Veja também que para essa configuração simulada, a solução não apresenta pontos críticos.

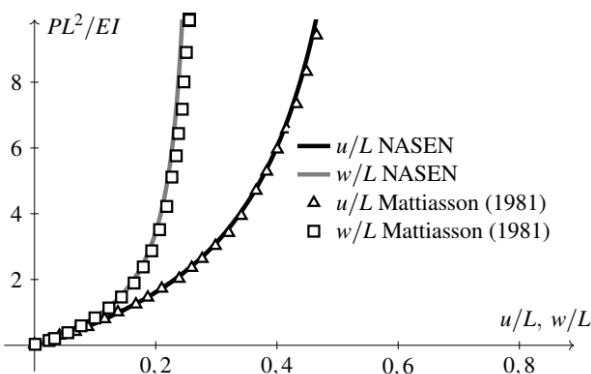


Figura 5: Curva carga-deslocamento para quadro, em forma de losango, sob força de tração

Em contrapartida, quando se avalia o caso do quadro, em forma de losango, sujeito a uma força de compressão, conforme mostrado na Figura 6, surge um ponto limite de deslocamento próximo ao valor de 0,2

associado ao deslocamento horizontal. Quando se analisa o desempenho do programa desenvolvido, nota-se, novamente, uma boa aderência em relação aos resultados obtidos com a solução de referência.

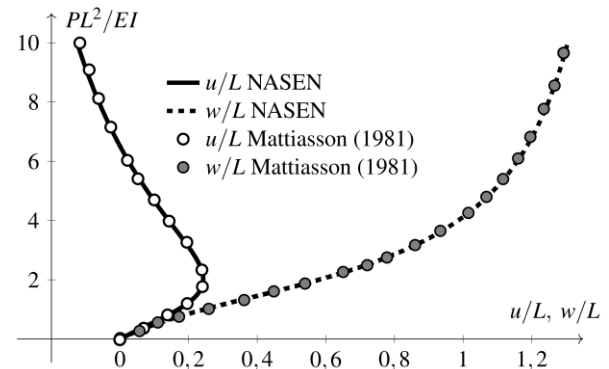


Figura 6: Curva carga-deslocamento para quadro, em forma de losango, sob força de compressão

4. Conclusão

Este artigo buscou apresentar alguns conceitos e as principais sentenças matemáticas de um modelo estrutural não linear geométrico via elementos finitos. Após os resultados e testes realizados é possível concluir que o comportamento das estruturas estudadas foram bem representadas. Além disso, aprimoramentos e considerações de novas fontes de não linearidade são objetivos para pesquisas futuras, a fim de expandir o código computacional desenvolvido.

5. Referências

- [1] NEVES, N. S. Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos. 2019. 260 f. Dissertação (Mestrado), UFES, Vitória, 2019.
- [2] CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Chichester, UK: UK.: Essential, John Wiley & Sons, 1991. v. 1.
- [3] SCHWEIZERHOF, K. H.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, v. 59, n. 3, p. 261–279, 1986.
- [4] GALVÃO, A. *Formulações geometricamente não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.
- [5] MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.