

Solução analítica da propagação de ondas em uma barra com carregamento periódico

Loeffler, C. F. ^{1*}; Santos, G. A. R. ².

1 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil;

2 Instituto Federal do Espírito Santos, Campus Aracruz, ES, Brasil.

* e-mail: loefflercarlos@gmail.com

Resumo

Soluções analíticas de equações diferenciais parciais na forma de Séries de Fourier são importantes no processo de desenvolvimento e análise de novos métodos ou técnicas discretas de solução, pois constituem um recurso rápido e efetivo para análise da precisão, robustez e estabilidade. Não obstante sua relevância, as comparações experimentais são muito caras e complexas e, por outro lado, a comparação direta com outros métodos numa fase inicial pode trazer incertezas quanto a qualidade da avaliação, pois outros métodos numéricos também carregam aproximações em seu modelo matemático. Tais aspectos adquirem maior relevância nos casos dinâmicos, devido a maior diversidade e complexidade dos fenômenos físicos e numéricos arrolados nesta categoria de problemas. A disponibilidade de um número maior de soluções analíticas de referência torna-se um elemento de grande importância neste contexto. Neste sentido, o presente trabalho apresenta a solução analítica de um problema importante, obtido pelo Método de Separação de Variáveis, referente à propagação de ondas acústicas produzida por um carregamento variável ao longo do tempo, que não se encontra resolvido nas principais referências clássicas sobre o assunto.

Palavras chaves: Solução analítica, propagação de ondas, carregamento periódico.

Abstract

Analytical solutions of partial differential equations in the form of a Fourier Series are important in the process of developing and analyzing new methods or discrete solution techniques, since they constitute a fast and practical resource for analyzing accuracy, robustness, and stability. Despite their relevance, experimental comparisons are very expensive and complex. On the other hand, direct comparison with other methods at an early stage may introduce uncertainties regarding the quality of the evaluation, as other numerical methods also incorporate approximations in their mathematical models. Such aspects become increasingly relevant in dynamic cases, due to the greater diversity and complexity of the physical and numerical phenomena encompassed in this category of problems. The availability of a greater number of analytical reference solutions becomes a crucial element in this context. In this sense, the present work presents the analytical solution to a significant problem, obtained using the Method of Separation of Variables, related to the propagation of acoustic waves produced by a variable load over time, which is not addressed in the main classical references on the subject.

Keywords: Analytical solution, wave propagation, periodic loading.

1. Introdução

No passado, em razão das enormes limitações conceituais relacionados à aplicação prática dos princípios da cinemática, da mecânica vibratória e da cinética em geral, a análise dinâmica de sistemas mecânicos e estruturais, como máquinas operatrizes, veículos, projeteis e edificações eram feitas de modo

bastante restrito. Concorria fortemente para o agravamento de tais limitações, a ausência de ferramentas que viabilizassem o processamento de resultados em casos práticos, devido à complexidade e enorme quantidade de operações matemáticas a serem realizadas em qualquer simulação analítica que dependesse do tempo.

Mesmo com o advento do computador, a solução precisa e ágil de problemas dinâmicos através de aproximações numéricas ainda é um dos problemas mais desafiadores da engenharia para todos os métodos numéricos. Mesmo em problemas lineares, questões de consistência, estabilidade, precisão e custo computacional da resposta ao longo do tempo assumem proporções muito mais proeminentes do que em outros casos transientes. Neste sentido, o desenvolvimento de formulações numéricas voltadas a resolver problemas dependentes do tempo é uma área de pesquisa muito atraente, como demonstrado pelo grande número de formulações que surgiram nos últimos anos. Assim, é preciso definir critérios adequados de avaliação dos diversos atributos de um método eficiente em dinâmica, para que possa conquistar confiabilidade no meio industrial. Entre estes critérios encontra-se, com destaque, a questão da precisão dos seus resultados.

Para avaliar seus atributos relativamente à precisão, é preciso lançar mão de comparação de resultados em problemas teste, casos cujo comportamento seja bem conhecido, sob condições diversas de carregamento. Na área da dinâmica, tal solução corresponde à resposta ao longo do tempo de variáveis com significado físico como deslocamentos, pressões e outras grandezas de interesse.

Contudo, a disponibilidade de soluções analíticas é muito restrita, devido ao alcance limitado dos métodos de solução, que usualmente são extensões em séries de potências, que somente podem ser desenvolvidas em casos particulares em que a geometria é simples e as excitações externas são bem comportadas. Não se deve ignorar que as soluções analíticas são obtidas a partir de soluções de equações diferenciais parciais, cuja teoria é bem mais elaborada do que a teoria correspondente às equações ordinárias.

Técnicas como o Método de Separação de Variáveis (MSV) e a transformadas de Laplace e Fourier são as mais conhecidas, mas ambas sofrem restrições teóricas significativas. As transformadas de Fourier e Laplace são muito úteis, sobretudo, se os problemas possuem apenas uma variável espacial independente, além do tempo, pois estas se voltam à eliminação da dependência temporal; não efetuam tal transformação nas variáveis espaciais, de forma que não resolvem globalmente equações diferenciais parciais multivariáveis. Para solução de casos espacialmente bi e tridimensionais, portanto, tais técnicas não são tão vantajosas.

A principal ferramenta matemática para se gerar soluções analíticas consiste do Método de Separação de Variáveis (MSV) ou Método de Bernoulli. Sua grande vantagem consiste no fato de gerar uma equação diferencial ordinária para cada variável envolvida, seja

no tempo ou relativamente a uma dimensão espacial. Um problema espacialmente multidimensional e transiente pode ser resolvido da mesma maneira que um caso bidimensional. Apenas os algebrismos são mais trabalhosos, pois existem relações de dependência entre as variáveis, dadas pelas condições de contorno e iniciais, que aumentam com a quantidade de dimensões do problema e também com a ordem das derivadas envolvidas. Como o MSV será aplicado numa equação diferencial parcial particular, a equação escalar da onda, faz-se necessários apresentá-la antes de sua adequada operacionalização.

2. Equação da Onda Acústica

No que tange ao caso linear dinâmico, as equações de Navier tomam a seguinte representação [1]:

$$\mu v_{j,ii} + (\mu + \lambda) v_{i,ji} + f_j = \rho \ddot{v}_j \quad (1)$$

Na Equação (1) ρ é a massa específica do material e $\ddot{v}_j$ é a aceleração.

Com base nos estudos dinâmicos da elasticidade [2] é possível dissociar um conteúdo dilatacional e outro rotacional, a partir da decomposição de Helmholtz [3], onde um campo vetorial arbitrário v_i pode ser escrito de maneira única como a soma de um campo irrotacional com um campo rotacional, ou seja,

$$v_i = \phi_{,i} + \epsilon_{ijk} V_{k,j} \quad (2)$$

Na Equação (2) v_i é a soma de um campo irrotacional com outro rotacional. No caso das ondas de dilatação, pode-se eleger uma função potencial ϕ , tal que:

$$v_i = \phi_{,i} \quad (3)$$

Ao tomar as Equações de Navier e reorganizando-as em termos da dilatação volumétrica, θ , dada por:

$$\theta = v_{i,i} \quad (4)$$

Pode-se fazer, em sequência:

$$\theta = \phi_{,ii} \quad (5)$$

Do segundo termo da equação de Navier, Equação (1), tem-se,

$$v_{i,ji} = \theta_{,j} = \phi_{,jii} = v_{j,ii} \quad (6)$$

Reescrevendo a Equação (1) em termos da igualdade da Equação (6) e na ausência de forças de corpo, chega-se a:

$$v_{j,ii} = \frac{\rho}{(2\mu + \lambda)} \ddot{v}_j \quad (7)$$

Dos fundamentos do cálculo tensorial, sabe-se que a aplicação do operador divergente numa equação vetorial a transforma numa equação escalar, a partir do qual pode se estabelecer uma função potencial, aspecto típico de um campo conservativo sem rotação. Aplicando o operador divergente na Equação (7):

$$v_{j,ii} = \frac{\rho}{(2\mu + \lambda)} \ddot{v}_{j,j} \quad (8)$$

Assim, pode-se escrever a equação de Navier em termos do tensor de dilatação e obtém-se a equação da Onda Escalar Homogênea:

$$\theta_{,ii} = \frac{1}{k^2} \ddot{\theta} \quad (9)$$

Em que k é a velocidade da onda acústica ou de dilatação, como segue:

$$k = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad (10)$$

Ao considerar a equação escalar da onda, uma resposta temporal $u(X, t)$ é produzida em um sistema linear por uma excitação variável, que é representada por condições de contorno adequadas. Sendo uma equação escalar, os efeitos da inércia e da rigidez contribuem para o estabelecimento de um equilíbrio dinâmico a cada instante, gerado apenas por conteúdos esféricos do estado de tensão. Assim, considera-se apenas que a resposta consiste em um potencial dado pela dilatação do sistema. Portanto, a equação governante é dada [2]:

$$u_{,ii}(X, t) = \left(\frac{1}{c^2}\right) \ddot{u}(X, t) \quad (11)$$

Na Equação (11), c corresponde à velocidade de propagação de onda no meio físico. Seu valor no aço é igual a 1500 m/s, que elevado ao quadrado resulta em $2,25 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Assim, as ondas acústicas trafegam com muito mais rapidez comparativamente às ondas térmicas [4]. Atuando assim, a energia advinda das ações externas em consórcio com derivada de segunda ordem no tempo pode provocar gradientes severos, que induzem descontinuidades no campo de variáveis e produzem outros fenômenos, além do simples alcance de um estado estacionário: resultam em movimentos vibracionais, periódicos ou não, situações de impacto, ressonância etc. [5]. Matematicamente, é classificada como uma equação diferencial parcial hiperbólica, junto a qual impera o Princípio da Causalidade [2][6]. Também a sua análise numérica e os procedimentos de simulação computacional são mais elaborados.

3. Método de Separação de Variáveis

Para apresentar o método de modo sucinto, mas sem perda de generalidade, considere apenas duas variáveis independentes, x e t . A ideia do MSV consiste em representar uma função de duas ou mais variáveis como um produto de funções de uma variável somente.

Assim, considere a seguinte equação diferencial parcial em termos de duas variáveis independentes:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

Faz-se:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (13)$$

O tratamento da função $u(X, t)$ pelo Método da Separação de Variáveis resulta em:

$$\frac{\partial^2 [X_n(x) T_n(t)]}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial [X_n(x) T_n(t)]}{\partial t} \quad (14)$$

Logo:

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\dot{T}_n(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n^2 \quad (15)$$

Então são geradas duas equações diferenciais ordinárias, mas que se relacionam pelas condições iniciais e de contorno independentes [7]:

$$\frac{X_n''(r)}{X_n(r)} = -\lambda_n^2 \quad (16)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\dot{T}_n(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n^2 \quad (17)$$

O MSV em sua forma preliminar apresenta algumas limitações importantes. Não poder ser aplicado em problemas cuja equação diferencial não seja homogênea ou suas condições de contorno não sejam homogêneas. Tal limitação é superada facilmente com a adoção de uma função auxiliar que obedece às condições de contorno não homogêneas e também ao termo forçante, que caracteriza uma equação diferencial matematicamente heterogênea.

Todavia, se a condição de contorno ou o termo forçante são dependentes do tempo, um tratamento matemático especial precisa ser desenvolvido relativamente à escolha da função auxiliar. É exatamente esse procedimento que é mostrado a seguir, através da

solução de um problema dinâmico particular, de grande importância prática.

Ressalta-se que tal dedução não foi encontrada nas mais importantes referências relacionadas ao assunto; apenas foi mostrada a forma como se deve proceder em obras clássicas como Graff [2] e Stephenson [7].

4. Descrição do Problema

Uma barra de massa específica e rigidez unitárias, submetida a um carregamento periódico, em que a frequência de excitação é uma variável arbitrária e será sucessivamente alterada com vistas à análise do seu comportamento físico e numérico. Nas simulações apresentadas são examinados apenas os valores dos deslocamentos na extremidade direita da barra que satisfaz a equação da onda,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (18)$$

Onde $u(x, t)$ é o deslocamento e c a velocidade de propagação da onda. O problema é mostrado com suas características geométricas e condições de contorno na Figura 1.

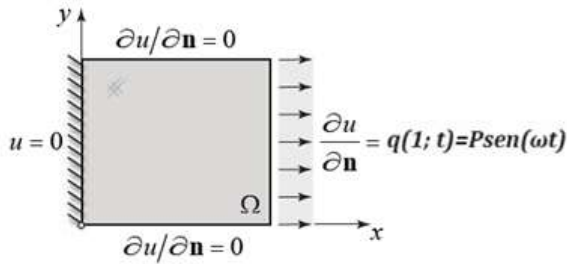


Figura 1: Barra submetida à carga variável no tempo e Condições de Contorno.

As condições de contorno são dadas por:

$$u(0, y, t) = q(x, 0, t) = q(x, l, t) = 0 \quad (19)$$

$$q(1, y, t) = P \sin(\omega t) \quad (20)$$

As condições iniciais são:

$$u(x, 0) = 0 \quad (21)$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0 \quad (22)$$

Como se pode observar, a condição de contorno natural, que fisicamente consiste de um termo forçante, é dependente do tempo, o que vai exigir uma metodologia especial para deduzir a solução analítica, obtida pelo MSV, mas seguindo o procedimento matemático adequado [2].

5. Dedução da Solução Analítica

Para resolver a solução analítica da Equação (18) para $t > 0$, $0 < x < l$ e com as condições de contorno e iniciais estabelecidas, é preciso resolver inicialmente a parte espacial, de modo que:

$$X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x + B_n \cos \lambda_n x \quad (23)$$

Para uma haste fixa-livre os modos normais são:

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{2l} \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (24)$$

Diferentemente de outras situações nas quais a condição de contorno não varia com o tempo, é preciso estabelecer funções que descrevem a variação do tempo $T_n(t)$. Estas são obtidas da seguinte forma:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2}{\rho l} \int_0^l X_n(x) P(x, t) dx \quad (25)$$

Onde $P(x, t)$ é a carga longitudinal na haste. É possível expressar a carga aplicada P , posicionada no final da barra, através da função Delta de Dirac $\delta(x)$ como:

$$P(x, t) = P \delta(l) f(t) \quad (26)$$

Substituindo a Equação (26) na Equação (25), tem-se:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2}{\rho l} \int_0^l X_n(x) P \delta(l) \sin(\omega t) dx \quad (27)$$

Pela função Delta de Dirac a Equação (27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2P}{\rho l} X_n(l) \sin(\omega t) \quad (28)$$

Substituindo a Equação (24) na Equação (28), segue:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2P}{\rho l} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(\omega t) \quad (29)$$

Resolvendo a Equação (29) em termos de $T_n(t)$ e considerando $\frac{P}{\rho l}$ unitário, tem-se:

$$T_n(t) = -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16}{n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \omega}{\pi(n^2 \pi^2 - 4\omega^2)} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8 \sin(\omega t)}{n^2 \pi^2 - 4\omega^2} \quad (30)$$

Substituindo as Equações (24) e (30) na Equação (23), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-16\omega(-1)^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right)}{(2n-1)\pi((2n-1)^2\pi^2 - 4\omega^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8(-1)^{n-1} \sin(\omega t)}{(2n-1)^2\pi^2 - 4\omega^2} \right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

Na Equação (31), pode-se considerar:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Ao substituir na Equação (31) a Equação (32), tem-se:

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\omega_n \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \frac{\sin(\omega_n x)}{\omega_n} \quad (33)$$

A Equação (33) descreve o deslocamento da barra em função do tempo devida a ação da força aplicada na extremidade direita.

6. Representações Gráficas da Solução

Os resultados aqui apresentados foram utilizados como solução de referência na avaliação da aplicação de um método discreto que usa elementos de contorno (MECID), analisando sua robustez e precisão, como parte de uma tese de doutoramento [8]. Tais resultados também foram publicados numa revista científica [9].

Nos gráficos que seguem são mostradas as respostas na extremidade direita da barra, ao longo do tempo, como uma função da frequência de excitação, como na Figura 2.

O comportamento da resposta não é harmônico, pois o efeito da frequência imposta ao termo forçante é combinado com a resposta devida às frequências naturais do sistema, que também são excitadas. Para baixas frequências de excitação, mostradas nas Figuras 2 e 3, nota-se que os picos da curva de resposta ocorrem em intervalos maiores comparativamente a Figura 4. Também as amplitudes dos picos possuem maior valor, pois o sistema pode responder com mais facilidade à excitação externa.

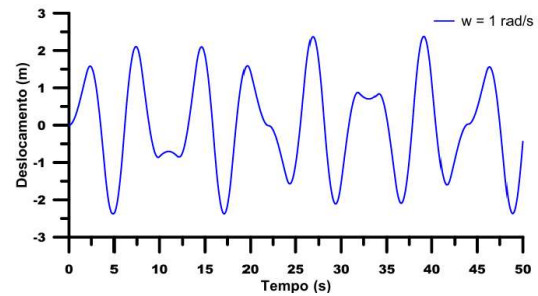


Figura 2: Resposta do deslocamento com frequência angular de 1rad/s.

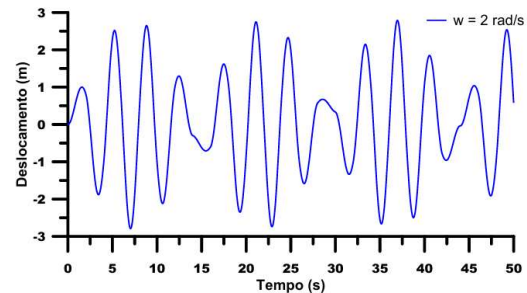


Figura 3: Resposta do deslocamento com frequência angular de 2rad/s.

Quando as frequências crescem, a resistência produzida pela inércia do sistema cresce, e as amplitudes se reduzem, como se pode observar no gráfico da Figura 4, cujas amplitudes são bem menores dos que os das figuras precedentes.

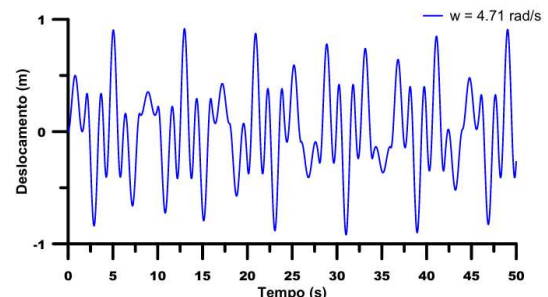


Figura 4: Resposta do deslocamento com frequência angular de 4,71rad/s.

Se a frequência de excitação se aproxima do valor de uma frequência natural surge o batimento, um fenômeno interessante na análise vibracional. Corresponde a interferência construtiva de duas ondas que se propagam numa mesma direção com frequências ligeiramente diferentes. Cria-se então uma frequência de repetição do movimento, chamada batimento, que é proporcional à diferença entre as duas frequências originais. A amplitude aumenta e diminui segundo um padrão regular. O tempo entre os pontos de amplitude zero ou entre os pontos de amplitude máxima é denominado período de batimento. É o que se observa na Figura 5 para $w = 7.84 \text{ rad/s}$.

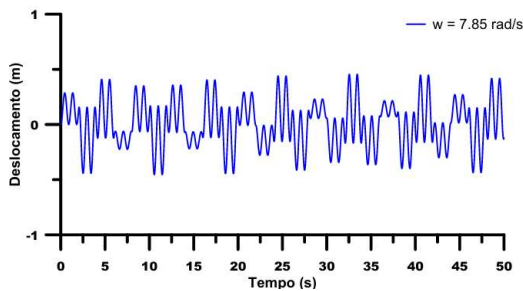


Figura 5: Resposta do deslocamento com frequência angular de 4,85rad/s.

Porém, num sistema contínuo, há muitas frequências naturais e um acréscimo na frequência de excitação pode fazer com que outra frequência interaja e crie um padrão de batimento ainda mais significativo, conforme visto na Figura 6.

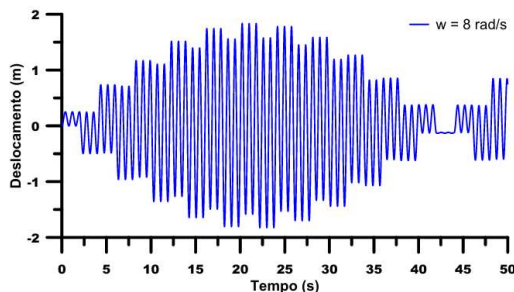


Figura 6: Resposta do deslocamento com frequência angular de 8rad/s.

7. Conclusão

Como se pode observar pela comparação da metodologia usada na obtenção de soluções disponíveis na literatura especializada para solução de problemas correlatos mais simples, sem que o carregamento seja uma função do tempo, o MSV exige a solução a parte de uma EDO adicional referente a variável tempo.

Pela pesquisa de diferentes referências relativas à solução de equações diferenciais parciais, não foram encontradas na literatura soluções similares a esta. São comuns soluções similares envolvendo sistemas discretos com apenas um grau de liberdade. São muitas as sugestões de estudo, sobretudo aplicando a técnica da transformada de Laplace, mas uma solução analítica referente ao problema em questão, de grande importância prática, que envolve o meio contínuo, com infinitos graus de liberdade, não foi encontrada.

O comportamento físico representado pela solução deste problema é bastante interessante, pois a variação da frequência de excitação modifica completamente o aspecto da resposta. Fenômenos como a amplificação dinâmica, o batimento e a ressonância ocorrem em diferentes circunstâncias, devido às diversas frequências naturais existentes e à proximidade destas com a frequência imposta pela condição de contorno. Também se pode perceber que o estado estacionário, referente ao comportamento dinâmico da resposta seguindo o padrão da frequência de excitação não ocorre, devido aos efeitos das condições iniciais, que num sistema sem amortecimento nunca se dissipam.

8. Referências

- [1] LAI, M.; KREMPL, E.; RUBEN, D. Introduction to Continuum Mechanics. 4th ed. Oxford: Elsevier, 2010.
- [2] GRAFF, K. F., Wave motion in elastic solids. Dover Publications, 1994.
- [3] COIMBRA, A. L. Lições de Mecânica do Contínuo, ed. Edgard Blusher, 1978.
- [4] BUTKOV, E. *Física matemática*. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [5] SAGAN, H. Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics. John Wiley & Sons, 1963.
- [6] MAIN, I. G. Vibration and Waves in Physics. Cambridge Universit Press, 1988.
- [7] STEPHENSON, G. Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais. Edgar Blücher, São Paulo, 1975.
- [8] SANTOS, G. A. R. O Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta aplicado aos problemas escalares de onda em meios homogêneos. 141f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santos, Vitória, 2024.
- [9] SANTOS, G. A. R.; LOEFFLER, C. F.; BULCÃO, A.; LARA, L. O. C. The Direct Interpolation Boundary Element Method for solving Acoustic wave problems in the time domain, Computational and Applied Mathematics, 2024.